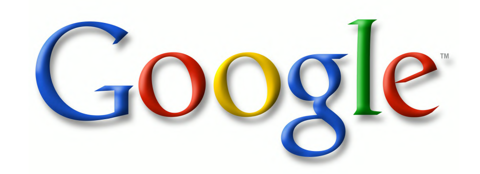
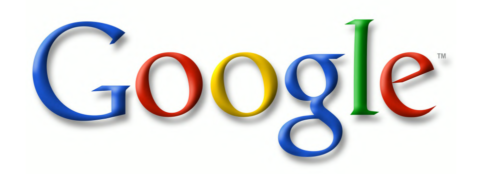
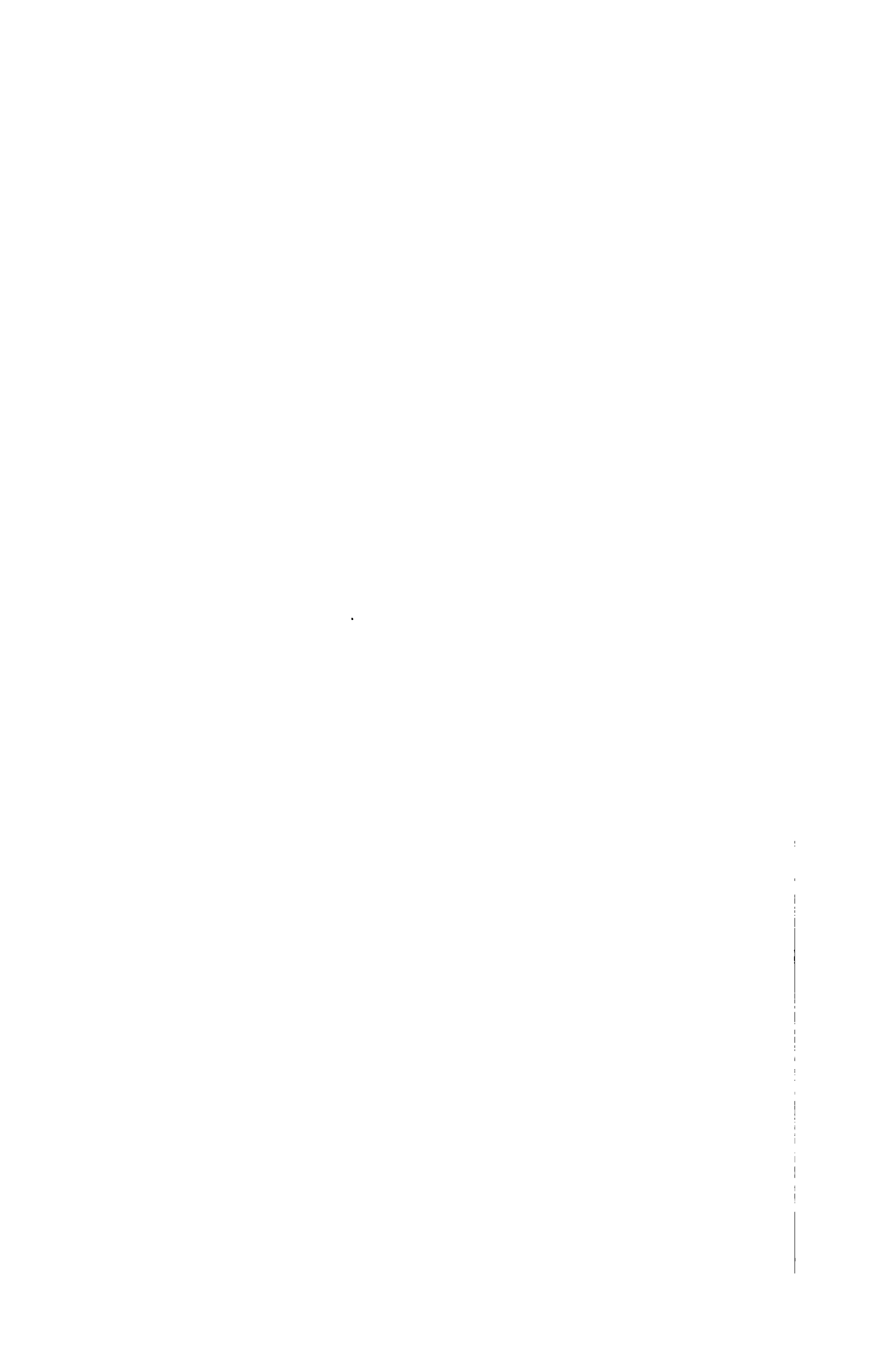
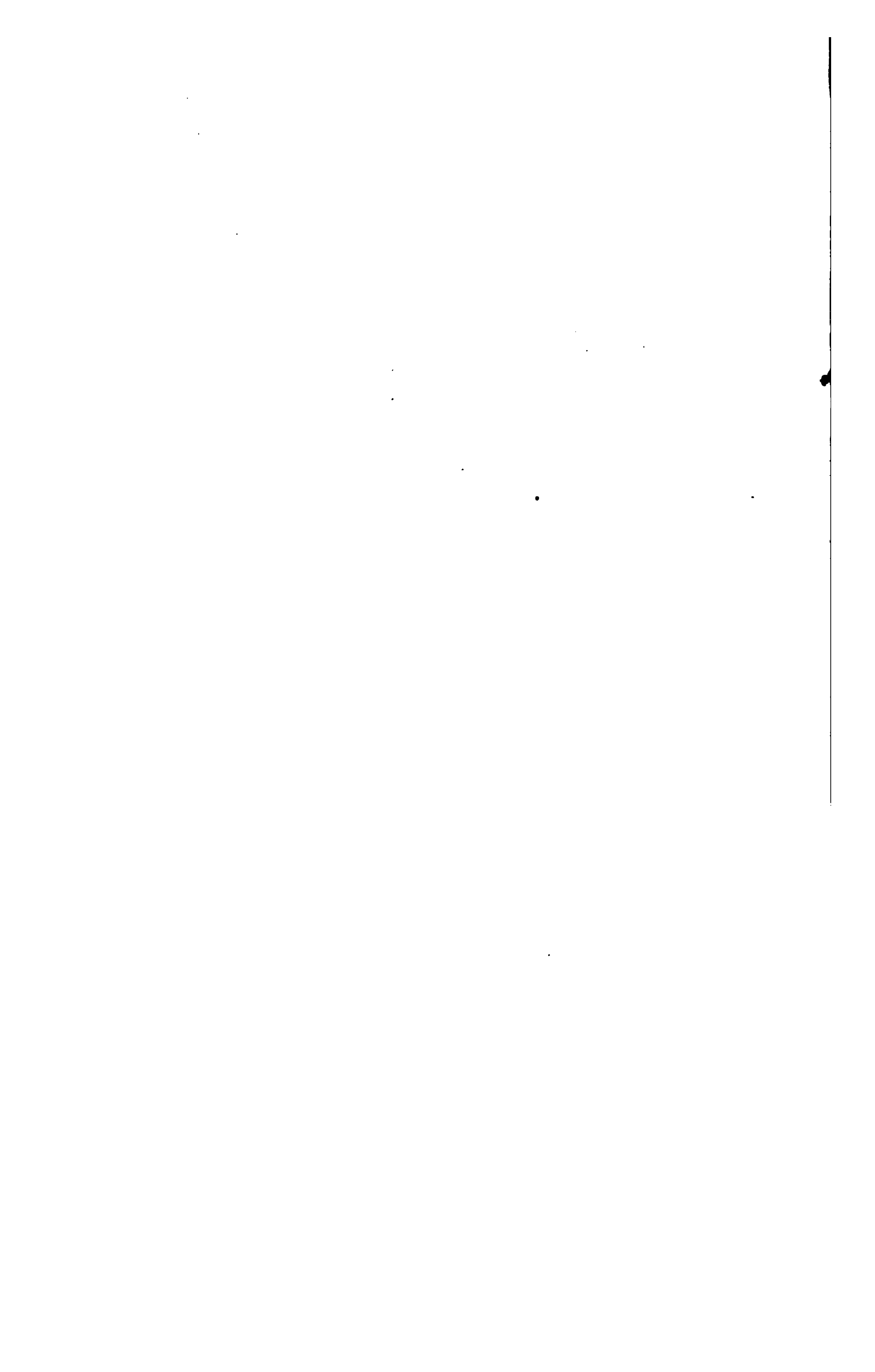








THEORIE

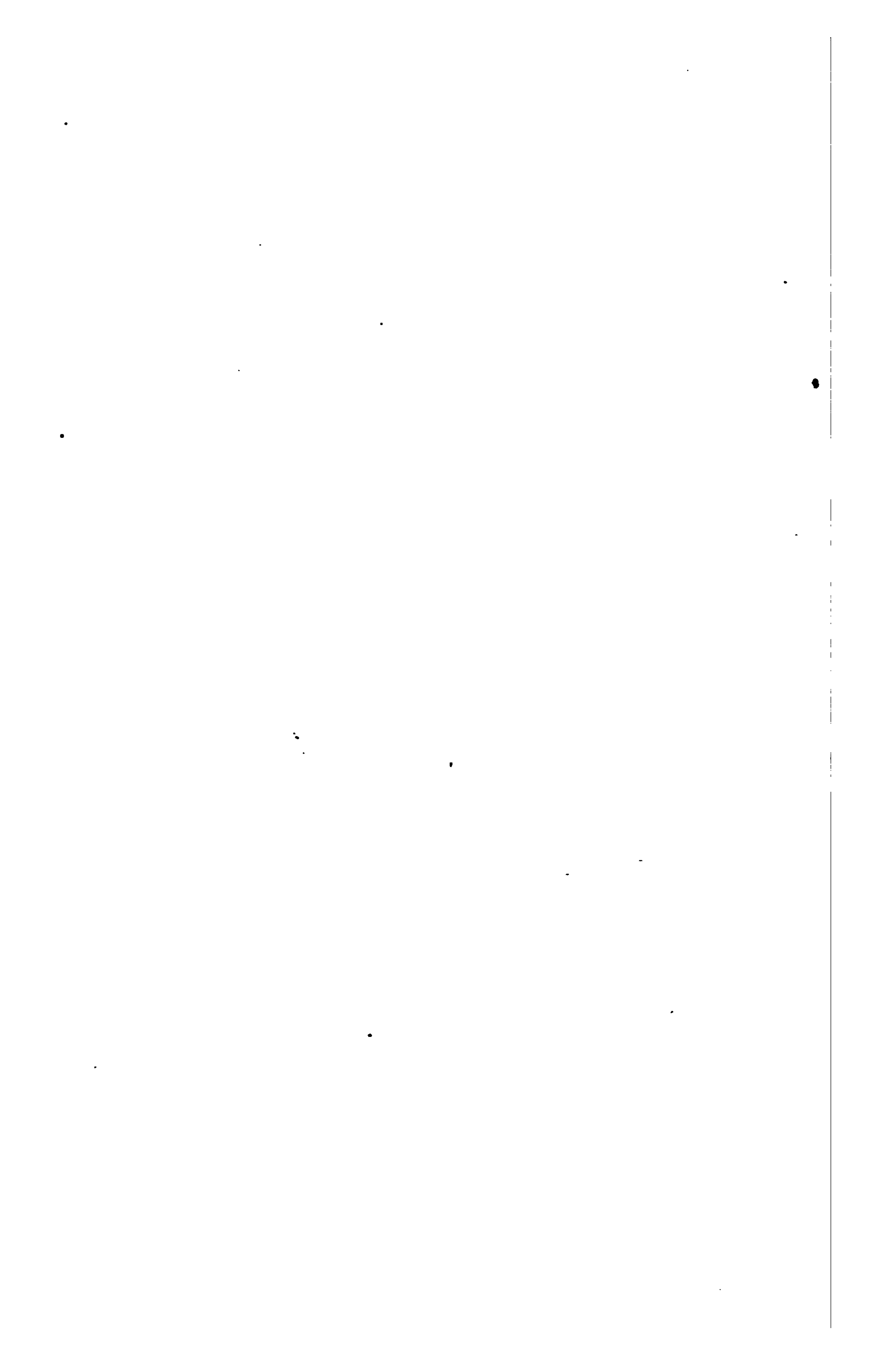
DER

BERFLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG

UND DER

RAUMKURVEN DRITTER ORDNUNG

ALS ERZEUGNISSE PROJEKTIVISCHER GEBILDE.



THEORIE

DER

OBERFLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG

UND DER

RAUMKURVEN DRITTER ORDNUNG

ALS

ERZEUGNISSE PROJEKTIVISCHER GEBILDE.

NACH JACOB STEINER'S PRINZIPIEN AUF SYNTHETISCHEM WEGE ABGELEITET

VON

DR. HEINRICH SCHRÖTER,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU.

„Stereometrische Betrachtungen sind nur dann richtig aufgefafst, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur durch die innere Vorstellung angeschaut werden.“ *Steiner.*



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1880.

Vorwort.

Als der Verfasser die Bearbeitung der „Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften“ (Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, II. Teil, zweite Auflage, B. G. Teubner Leipzig 1876) beendigt hatte, sah er sich der gröfseren Aufgabe gegenüber, die Eigenschaften der einfachsten räumlichen Erzeugnisse projektivischer Gebilde d. i. der Flächen 2. O. und der Raumkurven 3. O. gleicherweise in einer einheitlichen und möglichst vollständigen Darstellung zusammenzufassen, um den von J. Steiner in seinem Hauptwerke: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ (Berlin 1832) vorgezeichneten Plan weiter auszuführen.

Hierbei standen dem Verfasser weder Ausarbeitungen Steiner'scher Vorlesungen, die, wenn überhaupt, wohl nur in sehr früher Zeit über diese Gegenstände gehalten worden sind, noch hinterlassene Manuskripte zu Gebote, mit Ausnahme derjenigen, welche C. F. Geiser in dem Borchardt'schen Journal, Bd. 68, S. 191, veröffentlicht hat. Dagegen ist in der „systematischen Entwickelung“ selbst die Grundlage für die Behandlung der geradlinigen Flächen 2. O. (d. h. derjenigen, deren Krümmungsmafs Null oder negativ ist: Kegel, einfaches Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid) gegeben. Die Erzeugung der nicht-geradlinigen Flächen 2. O. (d. h. derjenigen mit positivem Krümmungsmafs: Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid, elliptisches Paraboloid) und der Raumkurve 3. O. vermittelst projektivischer Gebilde zweiter Stufe hat J. Seidewitz, den Spuren Steiner's folgend, auseinandergesetzt (Grunert's Archiv f. Math. und Phys. Bd. VII, VIII, IX, X), nachdem schon früher Moebius in seinem „barycentrischen Calcul“ und Chasles in seinem „Aperçu historique“ auf die Raumkurven 3. O. hingewiesen hatten.

Während die Flächen 2. O. seit langer Zeit der Gegenstand analytischer Untersuchungen gewesen und in ihren hauptsächlichsten Eigenschaften erforscht waren, verdanken wir die genauere Bekanntschaft mit den Raumkurven 3. O. dem um die Entwickelung der synthetischen Geometrie so hochverdienten Forscher Chasles, welcher in den Comptes rendus von 1857 ihre Erzeugung durch projektivische Ebenenbüschel und eine grofse Anzahl ihrer wesentlichsten Eigenschaften ohne Beweis mitteilte. Nachdem hierdurch die Aufmerksamkeit der Geometer auf diese merkwürdigen doppeltgekrümmten Linien, welche eine grofse Analogie mit den Kegelschnitten in der Ebene erkennen lassen, hingelenkt war, wurden dieselben der Gegenstand mehrfacher Untersuchungen, unter welchen vornehmlich diejenigen von L. Cremona (Borchardt's Journal Bd. 58, 60, 63) zu neuen Eigenschaften führten. Chasles war es auch, der in den Noten zu seinem Aperçu historique diejenigen Eigenschaften der Flächen 2. O. vollständig aufgedeckt hat, welche den Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte analog sind, obwohl Steiner in seiner ersten Abhandlung in Crelle's Journal („Einige geometrische Sätze“ Bd. I, S. 38) von einem etwas verschiedenen Gesichtspunkte aus schon die „Fokalkegelschnitte“ der Fläche 2. O. andeutete.

Den allgemeinsten Standpunkt für die Betrachtung der Fläche 2. O. mit Einschlufs derjenigen, welche ganz imaginär ist, gewann v. Staudt in dem „räumlichen Polarsystem“ (Geometrie der Lage, 1847 und Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856—1857) und kam auf denselben auch in seiner letzten Schrift: „Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen 2. O.“ (Nürnberg 1867) wieder zurück.

Den von der ältesten bis zur neuesten Zeit aufgesammelten reichen Schatz von Sätzen und Eigenschaften der Flächen 2. O. und der Raumkurven 3. O. nach Steiner's Prinzipien einheitlich zu ordnen, ihren naturgemäfsen Zusammenhang darzulegen und sie mit den einfachsten Mitteln abzuleiten war das Bestreben des Verfassers; er würde dabei auf Vollständigkeit der Resultate Verzicht leisten, wenn es ihm gelungen wäre, die Quellen aufzudecken und klarzulegen, aus

denen die wesentlichsten sowohl deskriptiven, als auch metrischen Eigenschaften dieser räumlichen Figuren entspringen; denn „wenn jemand alle bis jetzt bekannt gewordenen Sätze und Aufgaben nach den bisher üblichen Vorschriften zu beweisen und zu lösen sich vornehmen wollte, so wäre dazu viel Zeit und Mühe notwendig, und am Ende hätte man doch nur eine Sammlung von aus einander liegenden, wenn auch sehr scharfsinnigen Kunststücken, aber kein organisch zusammenhängendes Ganze zustande gebracht" (Syst. Entw.).

Von gleichen Gesichtspunkten gehen zwei gröfsere Werke aus, durch welche die Literatur der synthetischen Geometrie in neuerer Zeit bereichert worden ist, erstens die „Preliminari di una teoria geometrica delle superficie di L. Cremona (Bologna 1866), dessen berühmter Verfasser die Eigenschaften der algebraischen Oberflächen beliebig hoher Ordnung und Klasse und insbesondere ihre Polaritätsbeziehungen zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht hat, und demgemäfs auf die besondere Betrachtung der Flächen 2. O. nur kurz eingehen konnte, und zweitens: „Die Geometrie der Lage" von Th. Reye (II. Aufl. Hannover 1877), welches sich in vielen Punkten mit dem vorliegenden Buche berührt. Während Reye's vortreffliches Werk sich allgemeinere Ausgangspunkte gewählt und weitere Grenzen gesteckt hat, indem es die projektivischen Gebilde dritter Stufe, die Strahlensysteme und -komplexe, die Fläche 3. O. und das Flächengebüsch in den Kreis seiner Betrachtung zieht, war es die Absicht des Verfassers vorliegenden Buches, auf die Erforschung der wesentlichsten Eigenschaften der beiden einfachsten Erzeugnisse projektivischer Gebilde im Raume: Der Fläche 2. O. und der Raumkurve 3. O. sich zu beschränken, und auf diesem engeren Gebiete eingehender und mit den einfachsten Mitteln zu Werke zu gehen. Die Resultate der Einzelforschung, welche sich im Laufe der Betrachtung darboten, sind, soweit es dem Verfasser bekannt war, auf ihre Urheber zurückgeführt worden (Magnus, Hesse, Dandelin, Salmon, Joachimsthal, Jacobi, Mac-Cullagh, Townsend, Heilermann, Geiser, Sturm, Lüroth, Beyer, Vogt, Reim, H. Müller, Schönflies u. v. a.).

Der Gang der Betrachtung bot sich von selbst dar: Im

ersten Abschnitt werden die Erzeugnisse der projektivischen Gebilde erster Stufe (gerade Punktreihe, ebenes Strahlenbüschel, Ebenenbüschel) im Raume, nämlich die geradlinigen Flächen 2. O. und die Raumkurve 3. O. behandelt, nachdem das Ebenenbüschel als neues Grundgebilde zu den aus der Ebene bekannten beiden Grundgebilden hinzugenommen und eingeführt ist. Durchweg konnte sich der Verfasser auf die als bekannt vorausgesetzten Eigenschaften der Kegelschnitte stützen und hat sich überall auf die von ihm herausgegebene „Theorie der Kegelschnitte“ (s. o.) bezogen. In den Mittelpunkt der Betrachtung treten naturgemäfs die Polareigenschaften, und diese führen zugleich von den reellen Erzeugnissen zu erweiterten Begriffen: 1) vom Kegel zum Polarbündel, welches dem ebenen Polarsystem dual gegenübersteht; 2) vom einfachen Hyperboloid zum räumlichen Polarsystem; 3) von der Raumkurve 3. O. zum Nullsystem. Das räumliche Polarsystem stellt sodann die Verbindung her zwischen der geradlinigen und der nicht-geradlinigen Fläche 2. O. und führt ungezwungen auf die Konstruktion dieser Fläche durch reziproke Bündel. Als besondere Fälle treten das bisher weniger eingehend betrachtete orthogonale Hyperboloid und das gleichseitige Hyperboloid, sowie der orthogonale und der gleichseitige Kegel zu dem bekannteren gleichseitig-hyperbolischen Paraboloid hinzu, welches gewisse Eigenschaften beider besonderen Hyperboloide in sich vereinigt. Von der Raumkurve 3. O., die als Erzeugnis dreier projektivischen Ebenenbüschel eingeführt wird, sind die hauptsächlichsten Eigenschaften auf möglichst einfachem Wege abgeleitet, sowie ihre Identität mit dem ihr dual gegenüberstehenden Gebilde, der Raumkurve dritter Klasse nachgewiesen. Ihre Erzeugung durch projektivische Gebilde erster Stufe erschien als der einfachere und näher liegende Ausgangspunkt für die Ableitung ihrer Eigenschaften, obwohl manche derselben kürzer aus der Erzeugung durch kollineare Bündel sich ergeben.

Im zweiten Abschnitt werden zuvörderst die vier Grundgebilde zweiter Stufe: das Strahlenbündel, das Ebenenbündel, das Punktfeld, das Strahlenfeld eingeführt und die projektivische (kollineare und reziproke) Beziehung der Elemente

derselben auf einander festgestellt, wobei sowohl die perspektivische Lage, als auch die allgemeine Konstruktion entsprechender Elemente vermittelst projektivischer Gebilde erster Stufe zu Grunde gelegt wird. Hierauf werden die ausgezeichneten Elemente der neuen Gebilde ermittelt und bei zusammenliegenden Trägern (oder Mittelpunkten) die incidenten Elemente aufgesucht. Sodann erscheint die Raumkurve 3. O. als Erzeugnis zweier kollinearen Bündel und die Fläche 2. O. als Erzeugnis zweier reziproken Bündel; da erstere bereits in dem vorhergehenden Abschnitt ausführlich behandelt ist, so wendet sich die Betrachtung nunmehr ausschliefslich der letzteren zu; sie gelangt von der Erzeugung durch reziproke Bündel durch eine direkte Konstruktion zum räumlichen Polarsystem, dessen Kernfläche jenes Erzeugnis ist, und dadurch ist der Kreis geschlossen, welcher die Verbindung zwischen den verschiedenen Ausgangspunkten herstellt. Die Einteilung der Flächen 2. O. geschieht nach zwei Prinzipien, einmal nach dem Charakter ihrer Berührungsebenen (hyperbolische oder elliptische), und zweitens vermittelst ihrer unendlich-entfernten Elemente.

Von den allgemeinen Eigenschaften des räumlichen Polarsystems gelangt man zu den metrischen Beziehungen der konjugierten Durchmesser und zu den Fokaleigenschaften, die in Verbindung mit den Kreisschnitten zu der Mac-Cullagh'schen und der Jacobi'schen Konstruktion der Fläche 2. O. führen, welche sich durch ihre grofse Einfachheit auszeichnen.

Die eingehend untersuchten Fokalkegelschnitte erscheinen als Grenzflächen einer Schar von konfokalen Flächen 2. O., die nun betrachtet wird und zugleich den Übergang bildet zu den Gebilden 2. O.: dem Flächenbüschel (erste Stufe) und dem Flächenbündel (zweite Stufe) und zu den ihnen dual gegenüberstehenden: der Flächenschar und dem Flächengewebe.

Hierdurch werden jedoch so umfangreiche Forschungsgebiete eröffnet, dafs durch eine eingehende und erschöpfende Darstellung, wie sie in der „Theorie der Kegelschnitte“ dem Kegelschnittbüschel, der Kegelschnittschar und dem Kegelschnittnetz zuteil werden konnte, bei weitem der zulässige

Umfang dieses Buches überschritten worden wäre. Es sind daher in den beiden letzten Paragraphen nur die allgemeinsten Eigenschaften des Flächenbüschels und des Flächenbündels 2. O. kurz auseinandergesetzt, und eine genauere Erforschung dieser höheren Gebilde ist späterer Zeit vorbehalten. Zu einer solchen gehört denn auch eine vollständige Theorie der Raumkurve 4. O., sowohl derjenigen erster Species, welche als der Schnitt zweier Flächen 2. O. erscheint, als auch derjenigen zweiter Species, durch die nur eine einzige Fläche 2. O. gelegt werden kann, deren Erzeugende aus der einen Regelschar dieser Raumkurve in je einem, aus der andern Regelschar in je drei Punkten begegnen. Die Untersuchung des Flächenbündels aber führt unmittelbar zu einer Theorie der allgemeinen Fläche 3. O., wie dies Steiner angegeben und R. Sturm ausgeführt hat. Alle diese Untersuchungen blieben vorläufig ausgeschlossen.

Von den durch die Untersuchung gewonnenen Resultaten sind die nach dem Prinzip der Reziprocität ihnen dual gegenüberstehenden nur selten wiederholt abgeleitet, mitunter blofs ausgesprochen und meistens ganz fortgelassen, weil die Nachbildung derselben einmal ohne sachliche Schwierigkeit ist und andererseits als zweckmäfsige Übung betrachtet werden kann, im Buche aber nur ermüden würde.

Was die Darstellung anbetrifft, so teilt der Verfasser die Ansicht Steiner's: „Stereometrische Betrachtungen sind nur dann richtig aufgefafst, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur durch die innere Vorstellung angeschaut werden. Wenigstens ist dieses für die synthetische Betrachtungsweise erforderlich und vorzugsweise für denjenigen, der darin erfinderisch zu Werke gehen will; denn nur auf diesem Wege kann er seinen Gegenstand selbst gewähren lassen, kann er den ganzen Umfang der Eigenschaften einer Figurenverbindung in allen ihren einzelnen Fällen und nach allen ihren Grenzen hin leicht und richtig durchschauen und alle diese Fälle zusammen als ein in einander fliefsendes oder aus sich selber heraustretendes Ganze erkennen. Wenn auch im Anfange diese freie Vorstellung einige Mühe macht, so wird man doch bald eine gewisse Fertigkeit darin erlangen und sich dann für die überstandene Anstrengung hinlänglich

entschädigt finden. Wer bemüht wäre, durch andere Mittel diese Anstrengung zu umgehen, der dürfte nicht wohltun, indem er das Vorstellungsvermögen anstatt gesund, kräftig und lebensfähig zu machen, dasselbe vielmehr in dunkler schwerfälliger Auffassung erhalten würde".

Aus diesem Grunde sind nur wenige und nur mit den zum Verständnis notwendigsten Linien versehene Figuren dem Texte einverleibt; dagegen erscheint dem Verfasser eine nützliche und die Darstellung abkürzende Unterstützung der lebendigen Anschauung die zweckmäſsig gewählte und konsequent durchgeführte Bezeichnung der geometrischen Elemente und der mit ihnen vorzunehmenden Operationen. Demgemäſs drücken nach Steiner's Vorgang durchweg die deutschen (kleinen oder groſsen) Buchstaben Punkte aus und zwar die Anfangsbuchstaben des Alphabets $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c} \ldots$ Punkte, die als fest angenommen werden, die Endbuchstaben $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z} \ldots$ Punkte, die als veränderlich aufgefaſst werden. Ebenso drücken die lateinischen Buchstaben $a\ b\ c \ldots x\ y\ z \ldots$ durchweg gerade Linien, die griechischen Buchstaben $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \xi\ \eta\ \zeta \ldots$ Ebenen aus; ferner bezeichnet, wenn die Geraden a und b sich treffen:

(ab) .. den Schnittpunkt der beiden Geraden a und b
$[ab]$ .. die Verbindungsebene der beiden Geraden a und b
$|\alpha\beta|$ .. die Schnittlinie der Ebenen α und β
$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ .. die Verbindungslinie der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$
$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ .. die Verbindungsebene der drei Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$
$(\alpha\beta\gamma)$ .. den Schnittpunkt der drei Ebenen $\alpha\ \beta\ \gamma$
$[\mathfrak{a}a]$ .. die Ebene, welche den Punkt $\mathfrak{a}$ mit der Geraden a verbindet,
$(a\alpha)$ .. den Schnittpunkt der Geraden a und der Ebene α
u. s. f.

Hiernach lassen sich auch zusammengesetztere geometrische Konstruktionen direkt hinschreiben und übersichtlicher darstellen, als durch eine gezeichnete Figur. Ferner werden Punktreihen, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel am einfachsten ausgedrückt durch Voranstellen des Trägers, Mittelpunktes oder der Axe und Hinzufügung der Elemente des Gebildes in Parenthese, z. B. würde

$$l[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} \,..\, \mathfrak{x} \,..]$$

ein Ebenenbüschel bezeichnen, dessen Axe l ist, und dessen Elemente die Ebenen $[l\mathfrak{a}]$ $[l\mathfrak{b}]$ $[l\mathfrak{c}]$ .. $[l\mathfrak{x}]$ .., durch die Punkte $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ .. $\mathfrak{x}$ .. einer geraden Punktreihe gelegt, sind.

Zur Bezeichnung der Projektivität dient das von v. Staudt eingeführte und allgemein übliche Zeichen: $\barwedge$ anstatt der Gleichheit der Doppelverhältnisse. Wo Kurven oder Flächen zweiten oder höheren Grades auftreten, also Kegelschnitte, Hyperboloide, Raumkurven u. s. w. soll allemal ein kleiner in Parenthese gesetzter oberer Index, welcher den Grad oder die Klasse angiebt, beigefügt werden; also wird z. B. $\mathfrak{K}^{(2)}$ einen Kegelschnitt, $\mathfrak{H}^{(2)}$ ein Hyperboloid oder eine Hyperbel je nach dem Zusammenhange, in welchem das Zeichen auftritt, $\mathfrak{P}^{(2)}$ eine Parabel oder ein Paraboloid, $C^{(3)}$ und $C^{(4)}$ Raumkurven dritter und vierter Ordnung, $F^{(2)}$ und $F^{(3)}$ Flächen 2. und 3. O. u. s. w. bezeichnen. Die unendlich-entfernte Ebene bezeichnet ε_∞, irgend einen Punkt oder eine Gerade in derselben $\mathfrak{p}_\infty$ oder l^∞, g^∞, den unendlich-entfernten imaginären Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}_\infty$ u. s. w.

So möge denn dieses Buch, welches den vor einem halben Jahrhundert von Steiner entworfenen Plan weiter auszuführen versucht, eine ebenso günstige Aufnahme und wohlwollende Beurteilung von Seiten der Fachgenossen erfahren, wie sie der „Theorie der Kegelschnitte“ zuteil geworden ist; mögen die Ergebnisse mehrjähriger Studien, welche bisher nur in Vorlesungen an der hiesigen Universität den unmittelbaren Schülern geboten wurden, auch der übrigen studierenden Jugend Anleitung und Anregung zu selbständiger wissenschaftlicher Forschung auf dem Gebiete der synthetischen Geometrie des Raumes gewähren.

Schliefslich bleibt dem Verfasser noch übrig, seinen wissenschaftlichen Freunden, welche ihm bei der Korrektur des Druckes hilfreiche Hand geleistet haben, den Herren Gymnasiallehrer Dr. E. Toeplitz und stud. math. L. Bernert, sowie dem Herrn Verleger für die Ausstattung des Buches und sein freundliches Entgegenkommen den verbindlichsten Dank auszusprechen.

Breslau, im April 1880.

Heinrich Schröter.

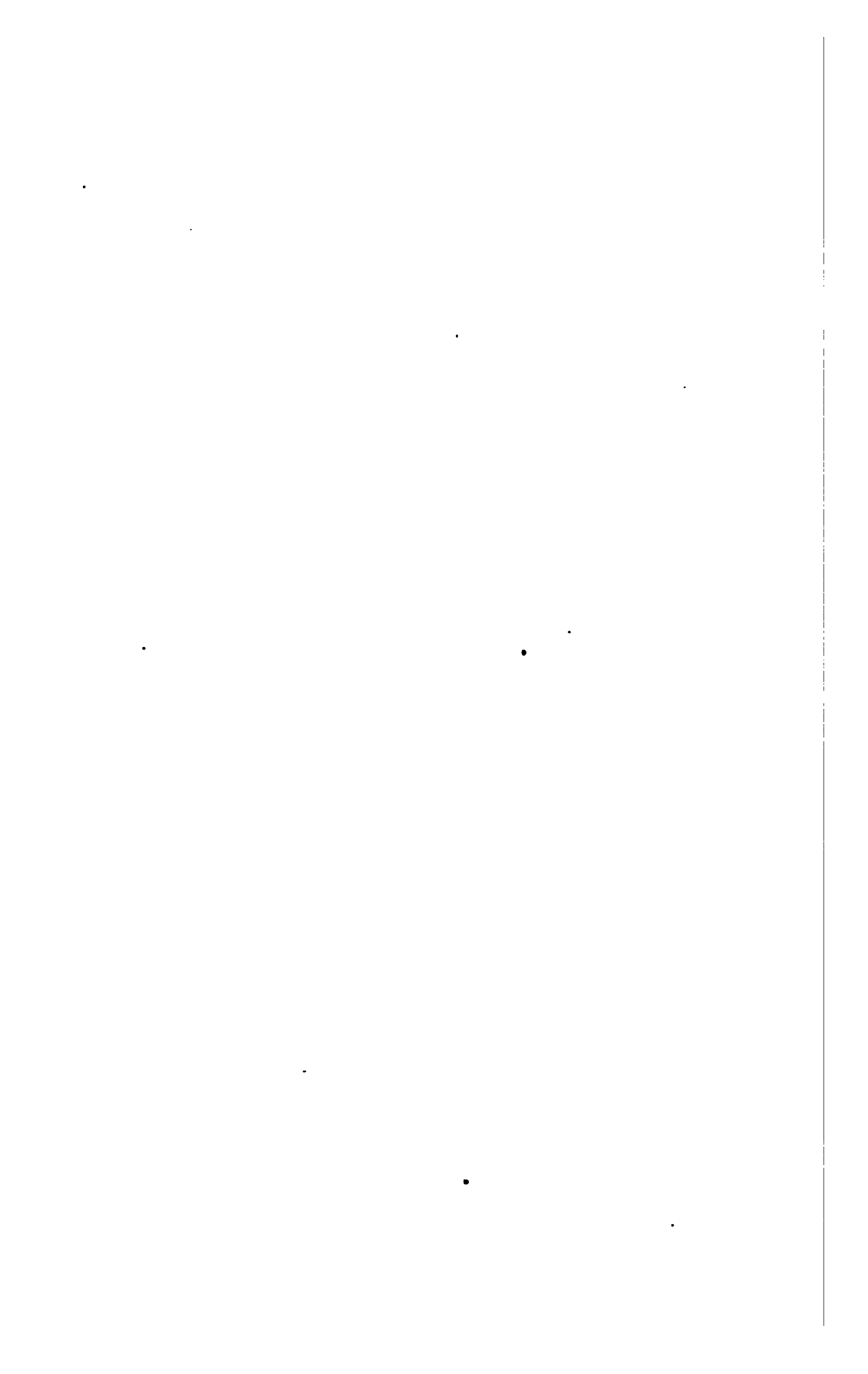
Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Die projektivischen Gebilde erster Stufe im Raume und ihre Erzeugnisse.

Zweiter Abschnitt.

Die projektivischen Gebilde zweiter Stufe und ihre Erzeugnisse.



Erster Abschnitt.

Die projektivischen Gebilde erster Stufe im Raume und ihre Erzeugnisse.

§ 1. Das Ebenenbüschel.

Zu den beiden Grundgebilden der synthetischen Geometrie der Ebene: der geraden Punktreihe und dem ebenen Strahlenbüschel tritt, sobald wir das Operationsfeld der Ebene verlassen und im Raume die Ebene selbst als neues Grundelement hinzufügen, ein drittes Grundgebilde von gleicher Mächtigkeit mit den beiden vorigen, nämlich von einfacher Unendlichkeit: Das Ebenenbüschel d. h. die Gesamtheit aller Ebenen, welche durch eine feste Gerade gehen; diese selbst heifst die Axe des Ebenenbüschels.

Wir können das Ebenenbüschel auf doppelte Weise entstehen lassen, einmal indem wir eine feste Gerade a (Axe) durch Ebenen verbinden mit den Punkten einer geraden Punktreihe:

$$l(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots),$$

deren Träger l der Geraden a nicht begegnet, und zweitens indem wir durch irgend einen Punkt $\mathfrak{A}$ im Raume und die Strahlen eines ebenen Strahlbüschels:

$$\mathfrak{B}\,|a\,b\,c\ldots x\ldots|,$$

dessen Ebene nicht durch $\mathfrak{A}$ geht, eine Reihe von Ebenen legen, welche sämtlich die beiden Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, also ihre Verbindunglinie als Axe gemeinschaftlich haben.

Hieraus geht hervor die gleiche Mächtigkeit des Ebenenbüschels mit der geraden Punktreihe und dem ebenen Strahlenbüschel und zugleich die Möglichkeit, diese drei Grundgebilde unter einander in projektivische Beziehung zu setzen.

Wir bezeichnen fortan die Elemente des Ebenenbüschels (Ebenen) durch

$$\alpha\, \beta\, \gamma \ldots \xi \ldots$$

und verstehen unter dem Doppelverhältnis von vier Ebenen eines Ebenenbüschels:

$$(\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta)$$

das Doppelverhältnis solcher vier Strahlen, welche irgend eine zur Axe a rechtwinklig gelegte Ebene aus dem Büschel ausschneidet; die Winkel zwischen solchen vier Strahlen sind die Neigungswinkel der durch dieselben gehenden Ebenen und das Doppelverhältnis wird in der bekannten Weise (Th. d. Kegelsch. § 5) aus den Sinus dieser Neigungswinkel zusammengesetzt.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass im allgemeinen eine Ebene, welche durch ein Ebenenbüschel von vier Ebenen gelegt wird, als Durchschnittsfigur ein Strahlenbüschel enthält, dessen Doppelverhältnis immer denselben Wert liefert; denn sei eine beliebige Transversalebene τ und eine zur Axe a rechtwinklig gelegte Ebene σ, so trifft die Schnittlinie $|\sigma, \tau|$ die vier Ebenen des Büschels in vier Punkten einer geraden Punktreihe, welche perspektivisch liegt sowohl mit den vier Durchschnittsstrahlen in σ als auch mit den vier Durchschnittsstrahlen in τ, folglich haben diese beiden Strahlenbüschel dasselbe Doppelverhältnis, mithin ist das Doppelverhältnis der vier Ebenen des Büschels gleich demjenigen, welches in irgend einer Transversalebene τ von den vier Durchschnittsstrahlen gebildet wird.

Zugleich erkennen wir, daſs jede beliebige Gerade l, welche den vier Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ des Büschels in vier Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ begegnet eine gerade Punktreihe von vier Punkten enthält, deren Doppelverhältnis immer denselben Wert hat, denn wir können durch l eine beliebige Ebene legen, deren Durchschnittsfigur mit dem Ebenenbüschel ein ebenes Strahlenbüschel ist, welches den konstanten Wert des Doppelverhältnisses liefert.

Irgend zwei ebene Strahlenbüschel, welche in demselben Ebenenbüschel liegen, sind allemal perspektivisch, weil ihre entsprechenden Strahlen sich in den Punkten einer geraden

Punktreihe treffen, deren Träger die Durchschnittslinie der beiden Ebenen der Strahlenbüschel ist.

Dagegen liegen irgend zwei Punktreihen, welche in demselben Ebenenbüschel sich befinden, im allgemeinen nicht perspektivisch, obwohl sie projektivisch sind wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse von irgend vier entsprechenden Punktepaaren. Vielmehr liegen sie nur dann perspektivisch, wenn sie sich im Raume treffen, weil dann in ihrem Schnittpunkte zwei entsprechende Punkte vereinigt sind; ihr Projektionscentrum ist der Durchschnittspunkt ihrer Ebene mit der Axe des Ebenenbüschels.

Unter den unendlich-vielen ebenen Strahlenbüscheln und geraden Punktreihen, welche aus einem gegebenen Ebenenbüschel durch beliebige Ebenen und Gerade herausgeschnitten werden können und die nach dem Obigen sämtlich projektivisch sind, giebt es einige besondere, die noch hervorgehoben werden sollen.

Projektivisch-gleiche Strahlenbüschel werden aus einem gegebenen Ebenenbüschel herausgeschnitten durch Ebenen, welche zu der Axe des Ebenenbüschels gleich geneigt sind.

Ebenen, die parallel laufen der Axe des Ebenenbüschels, die also durch den unendlich-entfernten Punkt der Axe gehen, werden von dem Ebenenbüschel in Parallelstrahlenbüscheln geschnitten.

Da projektivisch-ähnliche Punktreihen solche sind, deren unendlich-entfernte Punkte sich entsprechen, so werden projektivisch-ähnliche Punktreihen durch ein gegebenes Ebenenbüschel allemal auf zwei Geraden bestimmt, welche einer Ebene des Büschels parallel laufen, also, deren unendlich-entfernte Punkte mit dem unendlich-entfernten Punkte der Axe des Büschels auf einer Geraden liegen.

Außerdem werden offenbar zwei parallele Gerade, d. h. solche, die denselben unendlich-entfernten Punkt haben, in ähnlichen Punktreihen geschnitten.

Projektivisch-gleiche Punktreihen werden durch ein gegebenes Ebenenbüschel allemal ausgeschnitten auf zwei Geraden;

a) die selbst einander parallel sind und deren Ebene zu der Axe des Ebenenbüschels parallel ist,

b) die selbst einander parallel sind und deren Ebene die Axe des Ebenenbüschels in einem Punkte trifft, welcher gleich weit von beiden absteht,

c) die in einer Ebene liegen, welche zur Axe des Ebenenbüschels parallel ist, und die gleich geneigt sind gegen eine zur Axe Parallele in ihrer Ebene,

d) die gleichen kürzesten Abstand von der Axe des Ebenenbüschels haben und deren Richtungen gleich geneigt sind zu der Richtung der Axe.

Es bleibt noch der parabolische Fall zu erwähnen übrig (Theor. d. Kegelsch. § 19), wenn die Durchschnittsebene selbst durch die Axe des Ebenenbüschels geht, und andererseits, wenn die Durchschnittsgerade die Axe des Ebenenbüschels trifft.

Geht eine Ebene durch die Axe des Ebenenbüschels hindurch, so fallen sämtliche Strahlen des Strahlenbüschels, welches im allgemeinen die Durchschnittsfigur bildet, in einen einzigen zusammen (die Axe des Ebenenbüschels) und diejenige Ebene des Ebenenbüschels, welche mit der gegebenen zusammenfällt, liefert keinen bestimmten Durchschnittsstrahl, sondern jede beliebige Gerade in den beiden zusammenfallenden Ebenen kann als ihre Durchschnittslinie angesehen werden, so dass also auch der Mittelpunkt des Strahlenbüschels unbestimmt wird.

Trifft eine Gerade l die Axe a des Ebenenbüschels selbst, so konzentriert sich die ganze gerade Punktreihe, welche im allgemeinen die Durchschnittsfigur bildet, auf einen einzigen Punkt, den Schnittpunkt (la), und durch diesen Punkt selbst gehen sämtliche Ebenen des Büschels.

Als besonderer Fall eines Ebenenbüschels ist noch derjenige hervorzuheben, welcher entsteht, wenn die Axe desselben ganz im Unendlichen liegt; alsdann besteht das Büschel aus lauter Parallelebenen; alle Durchschnittsebenen liefern Parallelstrahlenbüschel; alle Geraden werden in ähnlichen Punktreihen geschnitten, diejenigen, welche gleich geneigt sind zu der Stellung der Parallelebenen, in gleichen Punktreihen.

§ 2. Projektivische Beziehung und perspektivische Lage.

Die Elemente der drei Grundgebilde können paarweise in projektivische Beziehung (gegenseitig eindeutige Abhängigkeit) gesetzt werden ebenso im Raume, wie früher in der Ebene (Th. d. K.), und zwar kann die Projektivität zweier Gebilde auf doppelte Art hergestellt werden, entweder

1) dadurch dafs die Gleichheit der Doppelverhältnisse von irgend vier Paaren entsprechender Elemente der beiden Gebilde festgesetzt wird und die Übereinstimmung des Richtungs- resp. Drehungssinnes hinzutritt, (Th. d. K. § 10), oder
2) dadurch dafs die perspektivische Lage der Gebilde die Beziehung herstellt und nach Aufhebung der perspektivischen Lage die Beziehung festgehalten wird.

Die projektivische Beziehung der Gebilde ist unabhängig davon, ob dieselben in einer Ebene oder beliebig im Raume liegend aufgefafst werden und läfst sich in gleicher Weise herstellen, mögen die auf einander bezogenen Elemente der Gebilde Punkte einer geraden Punktreihe, Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels oder Ebenen eines Ebenenbüschels sein. Es sind mithin hinsichtlich der projektivischen Beziehung die allgemeinen Gesetze und Ergebnisse, welche früher nur für Punktreihe und Strahlenbüschel in der Ebene ermittelt wurden, jetzt auch für das neue Gebilde, das Ebenenbüschel, gültig, und brauchen hier nicht besonders wiederholt zu werden.

Hinsichtlich der perspektivischen Lage der Gebilde im Raume ist aber Folgendes zu bemerken:

1. Punktreihe und Strahlenbüschel sind perspektivisch gelegen, wenn jeder Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt der geraden Punktreihe geht; da aber in diesem Falle der Träger der Punktreihe und der Mittelpunkt des Strahlenbüschels eine Ebene bestimmen, in welcher sämtliche Elemente beider Gebilde liegen, so beschränkt sich das ganze Operationsfeld nur auf eine Ebene, bietet also nichts Neues dar.

2. Zwei projektivische gerade Punktreihen liegen perspektivisch, wenn ihre Träger sich treffen und in dem Schnitt-

punkte der Träger zwei entsprechende Punkte vereinigt sind; da aber in diesem Falle die beiden Punktreihen auch in einer Ebene liegen mit ihren sämtlichen Elementenpaaren, so tritt die Betrachtung, wie im vorigen Falle, nicht aus der Ebene heraus.

3. Zwei projektivische ebene Strahlenbüschel liegen perspektivisch, wenn ihre entsprechenden Strahlen sich in Punkten einer geraden Punktreihe treffen; dies kann der Fall sein, ohne dafs die Ebenen beider Strahlenbüschel zusammenliegen, und zwar

a) wenn die Mittelpunkte der Strahlenbüschel verschiedene Punkte im Raume sind,

b) wenn die Mittelpunkte der Strahlenbüschel zusammenfallen.

Die Bedingung für die perspektivische Lage der beiden Gebilde ist im Falle *a*) die, dafs drei Paare entsprechender Strahlen sich in drei Punkten treffen, welche in einer Geraden liegen; dann müssen offenbar alle Paare entsprechender Strahlen sich auf dieser Geraden (dem perspektivischen Durchschnitt) treffen, wie in der Ebene. Die beiden Strahlenbüschel liegen in demselben Ebenenbüschel, also perspektivisch.

Im Falle *b*), wenn die Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel zusammenfallen, nicht aber ihre Ebenen, wird perspektivische Lage vorhanden sein, sobald derjenige Strahl, welcher als Schnittlinie der Ebenen ihrer Träger, beiden Strahlenbüscheln gemeinschaftlich ist, zwei entsprechende Strahlen der beiden projektivischen Büschel vereinigt. Denn alsdann werden sämtliche Ebenen, welche je zwei entsprechende Strahlen verbinden, durch eine Gerade (Axe) gehen d. h. ein Ebenenbüschel bilden, in welchem beide Strahlenbüschel liegen. Die Axe des Ebenenbüschels wird nämlich schon durch zwei Paare entsprechender Strahlen bestimmt, und da zu diesen das in dem gemeinsamen Strahle vereinigte Paar entsprechender Strahlen hinzutritt, so ist die Projektivität der beiden Strahlenbüschel mit demselben Ebenenbüschel ersichtlich.

4. Ebenenbüschel und gerade Punktreihe liegen perspektivisch, wenn jede Ebene des Büschels durch den ihr entsprechenden Punkt der Punktreihe hindurchgeht; findet dies nur bei drei Paaren entsprechender Elemente statt, so gilt es auch für alle übrigen.

5. Ebenenbüschel und ebenes Strahlenbüschel liegen perspektivisch, wenn jede Ebene des Ebenenbüschels durch den entsprechenden Strahl des Strahlenbüschels hindurchgeht, also die Axe des Ebenenbüschels durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels; sobald dies nur bei drei Paaren entsprechender Elemente stattfindet, ist es auch bei allen übrigen der Fall.

6. Zwei Ebenenbüschel in perspektivischer Lage erhält man dadurch, dafs man ein ebenes Strahlenbüschel:

$$\mathfrak{B}\,|a\,b\,c\ldots x\ldots|$$

von zwei verschiedenen Punkten des Raumes $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ aus, durch Ebenen projiziert [in gleicher Weise, wie man zwei ebene Strahlenbüschel in perspektivischer Lage dadurch erhält, dass man eine gerade Punktreihe von zwei beliebigen Punkten aus projiziert]. Hierbei treffen sich also die Axen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$ der beiden Ebenenbüschel in einem Punkte, d. h. sie liegen in einer Ebene, und die Ebene enthält zwei entsprechende Ebenen beider Büschel.

Umgekehrt heifsen zwei projektivische Ebenenbüschel perspektivisch gelegen, sobald die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen sämtlich in einer Ebene liegen und in dieser ein ebenes Strahlenbüschel bilden d. h. durch einen Punkt (der Axe) laufen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung hiefür ist die, dafs die Axen der beiden Ebenenbüschel sich treffen d. h. in einer Ebene liegen, und dafs diese Ebene zwei entsprechende Ebenen der beiden projektivischen Ebenenbüschel vereinigt.

In der That, nennen wir entsprechende Elemente der beiden projektivischen Ebenenbüschel:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \xi & \ldots, \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ldots & \xi_1 & \ldots, \end{matrix}$$

und sollen die Schnittlinien $|\alpha\alpha_1|$, $|\beta\beta_1|\ldots|\xi\xi_1|$ ein ebenes Strahlenbüschel bilden, so mufs zunächst, weil die Schnittlinie $|\alpha\alpha_1|$ die Schnittlinie $|\beta\beta_1|$ trifft, dieser Punkt, in welchem sie sich treffen, allen vier Ebenen $\alpha\alpha_1\,\beta\beta_1$ gemeinschaftlich sein, folglich müssen sich auch die Schnittlinien:

$$|\alpha\beta| = l \quad \text{und} \quad |\alpha_1\beta_1| = l_1$$

d. h. die Axen der Ebenenbüschel in diesem Punkte treffen,

und daher müssen auch alle übrigen Schnittlinien $|\xi\xi_1|$ durch diesen Punkt gehen; sollen sie nun aber ein ebenes Strahlenbüschel bilden, also alle in einer Ebene liegen, so wird dies erreicht, sobald die durch die beiden Schnittlinien $|\alpha\alpha_1|$ und $|\beta\beta_1|$ gelegte Ebene die beiden projektivischen Ebenenbüschel in identischen Strahlenbüscheln schneidet; dies wird der Fall sein, sobald noch eine dritte Schnittlinie $|\gamma\gamma_1|$ in der vorigen Ebene liegt, oder wenn die Ebene $[l\,l_1]$ zwei entsprechende Ebenen der projektivischen Ebenenbüschel vereinigt; in beiden Fällen wird nämlich die vorhin gelegte Ebene Durchschnittsfiguren mit den beiden projektivischen Ebenenbüscheln liefern, welche zwei projektivische Strahlenbüschel sind, von denen drei entsprechende Strahlenpaare sich decken; folglich müssen sich die ganzen Strahlenbüschel decken. Dem obigen Kriterium für die perspektivische Lage zweier projektivischen Ebenenbüschel läfst sich also auch folgende Form geben:

Zwei projektivische Ebenenbüschel liegen perspektivisch, sobald die Schnittlinien dreier entsprechenden Ebenenpaare in einer Ebene liegen; und es läfst sich nach dem Vorigen noch hinzufügen:

Sobald nur zwei Schnittlinien entsprechender Ebenenpaare zweier projektivischen Ebenenbüschel sich treffen, müssen sich alle Schnittlinien entsprechender Ebenenpaare in diesem Punkte treffen, welcher gleichzeitig in den Axen beider Ebenenbüschel liegt.

Auf die sich hier anknüpfenden Aufgaben, zwei gegebene projektivische Gebilde in perspektivische Lage zu bringen, wollen wir hier nicht eingehen. (Vgl. § 5.)

§ 3. Zwei projektivische Ebenenbüschel in beliebiger Lage.

Die projektivische Beziehung zweier Gebilde erster Stufe ist vollständig und eindeutig bestimmt, sobald drei Paare von Elementen als entsprechend angenommen werden (Th. d. K. § 10). Legen wir mithin durch eine beliebige Gerade l im Raume als Axe eines Ebenenbüschels drei Ebenen $\alpha\ \beta\ \gamma$ und durch eine beliebige zweite Gerade l_1, die der Geraden l nicht begegnen soll, drei Ebenen $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ und setzen $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ als entsprechende Elementenpaare fest, so ist die pro-

jektivische Beziehung beider Ebenenbüschel dadurch vollständig bestimmt, und es kann hier sehr einfach zu jeder beliebigen Ebene $\mathfrak{x}$ des ersten Büschels die entsprechende Ebene $\mathfrak{x}_1$ des zweiten Büschels konstruiert werden:

Man nehme die drei Schnittlinien:

$$|\alpha\alpha_1| = a, \quad |\beta\beta_1| = b, \quad |\gamma\gamma_1| = c$$

und konstruiere eine beliebige Gerade, welche den drei Strahlen $a\ b\ c$ gleichzeitig begegnet.

Dies geschieht am einfachsten dadurch, daſs man von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{a}$ des Strahles a durch die beiden Strahlen b und c zwei Ebenen legt, deren Schnittstrahl offenbar den Geraden b und c in zwei Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ begegnen wird, so daſs $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ in einer Geraden liegen.

Ist diese Gerade $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ konstruiert und $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt derselben, so werden allemal zwei Ebenen $[l\mathfrak{x}]$ und $[l_1\mathfrak{x}]$ entsprechende Ebenen der beiden Büschel sein, und andererseits kann man zu einer beliebigen Ebene $\mathfrak{x}$ des ersten Büschels die entsprechende des zweiten finden, indem man ihren Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ auf der Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ mit l_1 durch eine Ebene verbindet.

Diese Konstruktion, deren Richtigkeit ersichtlich ist, wird illusorisch, sobald die Axen $l l_1$ der beiden Ebenenbüschel sich treffen, weil dann auch $a\ b\ c$ durch diesen Treffpunkt gehen, welcher zugleich in allen übrigen Schnittstrahlen $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$ liegen muſs (§ 2).

Schneiden wir in diesem Falle die räumliche Figur durch eine beliebige Transversalebene, so haben wir für die Durchschnittsfigur die bekannte ebene Aufgabe: „Zu zwei ebenen Strahlenbüscheln, deren projektivische Beziehung durch drei Paare entsprechender Strahlen gegeben ist, andere Paare entsprechender Strahlen zu konstruieren“ (Th. d. K. § 10). Die räumliche Aufgabe wird also gelöst durch Projektion der ebenen Aufgabe von dem Schnittpunkt:

$$(l\,l_1) = \mathfrak{D}$$

aus. Am einfachsten gestaltet sich die Lösung folgendermaſsen:

Begegnen sich die beiden Axen $l\,l_1$ zweier Ebenenbüschel in $\mathfrak{D}$, und sind durch l drei Ebenen $\alpha\,\beta\,\gamma$, durch l_1 drei

Ebenen $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ als entsprechend gegeben, so dass also alle sechs Ebenen durch $\mathfrak{D}$ gehen, so nehme man die Schnittlinien:

$$|\alpha\beta_1|,\quad |\alpha\gamma_1|,\quad |\alpha_1\beta|,\quad |\alpha_1\gamma|,$$

bestimme die Ebenen:

$$[\alpha\beta_1,\ \alpha_1\beta],$$
$$[\alpha\gamma_1,\ \alpha_1\gamma]$$

und suche ihre Schnittlinie x auf.

Irgend eine durch x gelegte Ebene schneide α und α_1 in den Strahlen s und s_1, dann sind allemal:

$$[s_1 l] = \xi \quad \text{und} \quad [s l_1] = \xi_1$$

ein Paar entsprechender Ebenen der beiden projektivischen Ebenenbüschel. Ist umgekehrt ξ gegeben, so findet man sobald x bekannt ist aus s_1 zuerst s und dann ξ_1. Die Richtigkeit dieser Konstruktion folgt unmittelbar aus dem ebenen Problem.

Zwei projektivische Ebenenbüschel bieten ganz analoge besondere Elementenpaare dar, wie zwei projektivische ebene Strahlenbüschel; wir brauchen nur jedes der Ebenenbüschel durch eine zu seiner Axe rechtwinklige Ebene zu durchschneiden, um als Durchschnittsfiguren zwei projektivische ebene Strahlenbüschel zu erhalten, deren Winkel gleich sind den Neigungswinkeln in den Ebenenbüscheln.

Das Vorhandensein des Paares entsprechender rechter Winkel und des doppelten Systems entsprechender gleicher Winkel (Th. d. Kglsch. § 13) läfst sich daher unmittelbar auf zwei projektivische Ebenenbüschel übertragen, und es genügt, die Resultate allein hervorzuheben:

In zwei projektivischen Ebenenbüscheln giebt es zwei besondere Paare entsprechender Ebenen:

$$\sigma \text{ und } \sigma_1,\quad \tau \text{ und } \tau_1$$

von der Art, dafs sowohl σ und τ, als auch σ_1 und τ_1 zu einander rechtwinklig sind; diese entsprechenden rechtwinkligen Ebenenpaare sind immer reell vorhanden und die einzigen ihrer Art; ist $\xi\ \xi_1$ ein beliebiges Paar entsprechender Ebenen in den beiden projektivischen Ebenenbüscheln, so bleibt das Produkt:

$$\operatorname{tg}(\sigma\xi)\,.\,\operatorname{tg}(\tau_1\xi_1) = c$$

von konstantem Werte, ebenso wie das Produkt:

$$\operatorname{tg}(\tau\xi) \cdot \operatorname{tg}(\sigma_1\xi_1) = \frac{1}{c}$$

und c heisst die Potenz der projektivischen Beziehung der beiden Ebenenbüschel.

Bei der Veränderung des Ebenenpaares $\xi\xi_1$ tritt zweimal der Fall ein, dass die Faktoren des konstanten Produkts, also die Winkel $(\sigma\xi)$ und $(\tau_1\xi_1)$ einander gleich werden, mithin das Produkt in ein Quadrat übergeht; diese besonderen Ebenenpaare:

$$\gamma \text{ und } \gamma_1, \qquad \chi \text{ und } \chi_1$$

sollen Potenzebenen heifsen; für sie gelten also die Bedingungen:

$$(\sigma\gamma) = (\tau_1\gamma_1) = (\sigma\chi) = (\tau_1\chi_1),$$
$$(\tau\gamma) = (\sigma_1\gamma_1) = (\tau\chi) = (\sigma_1\chi_1).$$

Die hier ermittelten ausgezeichneten Elemente der beiden projektivischen Ebenenbüschel sind besondere Fälle der beiden Systeme von entsprechenden gleichen Winkeln, welche sich in den beiden Büscheln vorfinden, nämlich wenn die gleichen Winkel die Werte 0^0, 90^0, 180^0 haben.

Um das ganze doppelte System entsprechender gleicher Flächenwinkel der beiden projektivischen Ebenenbüschel zu erhalten, lege man durch die Axe des ersten Büschels eine beliebige Ebene α und bestimme die Ebenen $\beta\,\gamma_1\,\delta_1$ so, dafs die Winkel:

$$(\beta\sigma) = (\sigma\alpha) = (\gamma_1\tau_1) = (\tau_1\delta_1)$$

werden; sind dann die den Ebenen:

$$\alpha\;\beta\;\gamma_1\;\delta_1$$

entsprechenden:

$$\alpha_1\;\beta_1\;\gamma\;\delta,$$

so werden die Winkel:

$$1)\qquad \begin{cases}(\alpha\gamma) = (\alpha_1\gamma_1)\\(\beta\delta) = (\beta_1\delta_1)\end{cases}$$

$$2)\qquad \begin{cases}(\alpha\delta) = (\delta_1\alpha_1)\\(\beta\gamma) = (\gamma_1\beta_1)\end{cases}$$

also zwei Paare von entsprechenden gleichen Winkeln sein.

Denn weil
$$\operatorname{tg}(\alpha\sigma) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1\tau_1) = c$$
$$\operatorname{tg}(\gamma\sigma) \cdot \operatorname{tg}(\gamma_1\tau_1) = c$$
und
$$(\sigma\alpha) = (\gamma_1\tau_1)$$
ist, so haben wir auch:
$$\operatorname{tg}(\sigma\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\gamma\sigma) = c$$
$$\operatorname{tg}(\alpha_1\tau_1) \cdot \operatorname{tg}(\tau_1\gamma_1) = c$$
und da
$$(\alpha\gamma) = (\alpha\sigma) + (\sigma\gamma)$$
ist, so folgt:
$$\operatorname{tg}(\alpha\gamma) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha\sigma) + \operatorname{tg}(\sigma\gamma)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha\sigma) \cdot \operatorname{tg}(\sigma\gamma)}$$
$$= \frac{c}{1-c}\left\{\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha_1\tau_1)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\tau_1\gamma_1)}\right\}$$
$$= \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1\tau_1) + \operatorname{tg}(\tau_1\gamma_1)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_1\tau_1)\operatorname{tg}(\tau_1\gamma_1)}$$
$$= \operatorname{tg}(\alpha_1\gamma_1),$$
also
$$(\alpha\gamma) = (\alpha_1\gamma_1) \quad \text{u. s. w.}$$

Durch Veränderung der willkürlichen Ebene α des ersten Büschels erhalten wir das ganze doppelte System von entsprechenden gleichen Flächenwinkeln in den beiden projektivischen Ebenenbüscheln.

§ 4. Koaxiale Ebenenbüschel. Doppelelemente. Ebeneninvolution.

Haben zwei projektivische Ebenenbüschel dieselbe Axe, in welchem Falle wir sie koaxial nennen, so wird die Frage nach zusammenfallenden entsprechenden Elementen (Doppelelementen) zurückgeführt auf die analoge Frage bei zwei konzentrischen Strahlenbüscheln, indem man irgend eine Ebene rechtwinklig zur gemeinsamen Axe legt und die Durchschnittsfigur betrachtet. Das früher gefundene Resultat dieser Untersuchung (Th. d. K. § 14) läſst sich hiernach so aussprechen:

Zwei koaxiale projectivische Ebenenbüschel haben im allgemeinen zweimal zusammenfallende entsprechende Ebenenpaare (Doppelebenen); diese sind immer reell vorhanden, so-

bald die Ebenenbüschel ungleichlaufend sind; sind sie dagegen gleichlaufend, so entscheidet die Lage der Potenzebenen γ und γ_1, χ und χ_1 zu einander über die Realität der Doppelebenen; wird nämlich das eine Paar Potenzebenen $\gamma\chi$ durch das entsprechende Paar $\gamma_1\chi_1$ getrennt, so giebt es keine Doppelebenen; wird das Paar $\gamma\chi$ durch $\gamma_1\chi_1$ nicht getrennt, so giebt es zwei reelle Doppelebenen, und stofsen die Winkelräume $\gamma\chi$ und $\gamma_1\chi_1$ an einander, so dafs sie eine Ebene gemeinschaftlich haben (was bei gleichlaufender Lage nur dadurch geschehen kann, dafs entweder γ und γ_1 oder χ und χ_1 zusammenfallen), dann ist diese die einzige Doppelebene, d. h. in ihr fallen beide Doppelebenen zusammen.

Ein besonderer Fall koaxialer projektivischer Ebenenbüschel ist für die Folge von hervorragendem Interesse, nämlich der der Ebenen-Involution. Wie bei der Punkt- und Strahlen-Involution heifsen auch hier zwei koaxiale projektivische Ebenenbüschel involutorisch liegend, sobald es einmal vorkommt, dafs einer Ebene, als α und β_1 aufgefafst, in dem doppelten Sinne der projektivischen Beziehung dieselbe Ebene $\alpha_1 = \beta$ entsprechend ist, d. h. sobald die entsprechenden gleichen Flächenwinkel $\alpha\beta$ und $\beta_1\alpha_1$ so koinzidieren, dass α mit β_1 und β mit α_1 zusammenfällt; denn, sobald dies nur einmal eintritt, wird es immer eintreten, weil wegen der Projektivität die Doppelverhältnisse:

$$(\alpha\beta\xi\eta) = (\alpha_1\beta_1\xi_1\eta_1) = (\beta_1\alpha_1\eta_1\xi_1)$$

einander gleich sind; wenn also α und β_1, β und α_1, ξ und η_1 koincidieren, so mufs auch η mit ξ_1 zusammenfallen. Es liegt also das eine ganze System entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander. Eine solche Lage heifst involutorisch und die Ebenenpaare eines solchen Doppelgebildes konstituieren eine Ebeneninvolution.

Die Ebeneninvolution heifst eine hyperbolische, sobald die sie erzeugenden projektivischen Ebenenbüschel ungleichlaufend sind; in diesem Falle hat sie zwei reelle Doppelebenen (Asymptotenebenen) durch welche sämtliche Ebenenpaare der Involution harmonisch getrennt werden. Die beiden zu einander rechtwinkligen Halbierungsebenen der Neigungswinkel zwischen den Asymptotenebenen

heifsen die Hauptebenen der Involution; sie sind das einzige Paar rechtwinkliger konjugierter Ebenen der Involution und sind hervorgegangen aus der Koincidenz der entsprechenden rechtwinkligen Ebenenpaare der projektivischen Ebenenbüschel, während die Asymptotenebenen die zusammenfallenden Potenzebenen sind (γ und γ_1, χ und χ_1).

Die Ebeneninvolution heisst eine elliptische, sobald die sie erzeugenden projektivischen Ebenenbüschel gleichlaufend sind und (Th. d. K. S. 51) die Potenzebenen verkehrt auf einander fallen γ auf χ_1 und γ_1 auf χ. In diesem Falle existieren keine reellen Doppelebenen, sondern die elliptische Ebeneninvolution ist der Vertreter eines imaginären Ebenenpaares, dessen reelle Schnittlinie die Axe ist.

Die Eigenschaft der konstanten Potenz ist für beide Involutionen dieselbe; bezeichnen μ (und μ_1) die Hauptebenen, ξ und ξ_1 irgend ein Paar konjugierter Ebenen, so ist:

$$\operatorname{tg}(\mu\,\xi) \,.\, \operatorname{tg}(\mu\,\xi_1) = c$$

von konstantem Werte; aber während bei der hyperbolischen Involution jedes Ebenenpaar durch die beiden Asymptotenebenen (harmonisch) getrennt wird und der Wert (c) der konstanten Potenz positiv ist, wird bei der elliptischen Involution jedes Paar konjugierter Ebenen durch die Hauptebenen getrennt und der Wert der konstanten Potenz ist negativ.

Ein besonderer Fall der elliptischen Ebeneninvolution tritt ein, wenn der Wert der konstanten Potenz:

$$c = -1$$

ist; in diesem Falle sind sämtliche Paare konjugierter Ebenen rechtwinklig zu einander und die Ebeneninvolution heifst orthogonal.

Im allgemeinen hat jede Ebeneninvolution nur ein Paar rechtwinkliger konjugierter Ebenen; sobald sie aber zwei solcher Paare hat, sind sämtliche Paare konjugierter Ebenen rechtwinklig zu einander und bilden die orthogonale Ebeneninvolution.

Ein besonderer Fall der hyperbolischen Ebeneninvolution tritt ein, wenn der Wert der konstanten Potenz:

$$c = +1$$

ist; in diesem Falle haben sämtliche Paare konjugierter Ebenen

5. Ebenenbüschel und ebenes Strahlenbüschel liegen perspektivisch, wenn jede Ebene des Ebenenbüschels durch den entsprechenden Strahl des Strahlenbüschels hindurchgeht, also die Axe des Ebenenbüschels durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels; sobald dies nur bei drei Paaren entsprechender Elemente stattfindet, ist es auch bei allen übrigen der Fall.

6. Zwei Ebenenbüschel in perspektivischer Lage erhält man dadurch, dafs man ein ebenes Strahlenbüschel:

$$\mathfrak{B}\,|a\,b\,c\,\ldots\,x\,\ldots|$$

von zwei verschiedenen Punkten des Raumes $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ aus, durch Ebenen projiziert [in gleicher Weise, wie man zwei ebene Strahlenbüschel in perspektivischer Lage dadurch erhält, dass man eine gerade Punktreihe von zwei beliebigen Punkten aus projiziert]. Hierbei treffen sich also die Axen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$ der beiden Ebenenbüschel in einem Punkte, d. h. sie liegen in einer Ebene, und die Ebene enthält zwei entsprechende Ebenen beider Büschel.

Umgekehrt heifsen zwei projektivische Ebenenbüschel perspektivisch gelegen, sobald die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen sämtlich in einer Ebene liegen und in dieser ein ebenes Strahlenbüschel bilden d. h. durch einen Punkt (der Axe) laufen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung hiefür ist die, dafs die Axen der beiden Ebenenbüschel sich treffen d. h. in einer Ebene liegen, und dafs diese Ebene zwei entsprechende Ebenen der beiden projektivischen Ebenenbüschel vereinigt.

In der That, nennen wir entsprechende Elemente der beiden projektivischen Ebenenbüschel:

$$\alpha\ \beta\ \gamma\ \ldots\ \xi\ \ldots,$$
$$\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \ldots\ \xi_1\ \ldots,$$

und sollen die Schnittlinien $|\alpha\alpha_1|$, $|\beta\beta_1|\ldots|\xi\xi_1|$ ein ebenes Strahlenbüschel bilden, so mufs zunächst, weil die Schnittlinie $\alpha\alpha_1|$ die Schnittlinie $|\beta\beta_1|$ trifft, dieser Punkt, in welchem sie sich treffen, allen vier Ebenen $\alpha\alpha_1\ \beta\beta_1$ gemeinschaftlich sein, folglich müssen sich auch die Schnittlinien:

$$|\alpha\beta| = l \quad \text{und} \quad |\alpha_1\beta_1| = l_1$$

d. h. die Axen der Ebenenbüschel in diesem Punkte treffen,

mit den Doppelebenen der beiden projektivischen Büschel zusammenfallen.

Sobald nur bewiesen ist, dafs das Ebenenpaar $\xi\xi'$ wirklich eine Ebeneninvolution beschreibt, ist die letztgenannte Eigenschaft derselben unmittelbar ersichtlich; denn sobald zwei zugeordnete von vier harmonischen Elementen (ξ und ξ') zusammenfallen, mufs auch eines (ξ_1) der beiden andern mit jenen zusammenfallen, also ein Doppelelement der Involution ist notwendig ein Doppelelement der projektivischen Büschel.

Für den Fall reeller Doppelebenen der beiden projektivischen Büschel ist der Nachweis für die Ebeneninvolution $[\xi\xi']$ sehr einfach; denn seien diese Doppelebenen σ und σ_1, τ und τ_1, so müssen die Doppelverhältnisse einander gleich sein:

$$(\sigma\tau\xi\eta) = (\sigma_1\tau_1\xi_1\eta_1) = (\tau_1\sigma_1\eta_1\xi_1),$$

und da σ mit σ_1, τ mit τ_1 zusammenfällt, so bilden die Elementenpaare:

$$\sigma \text{ und } \tau, \quad \xi \text{ und } \eta_1, \quad \eta \text{ und } \xi_1$$

eine Ebeneninvolution, von der das zusammenfallende Elementenpaar ξ und η_1 eine Asymptotenebene ist; die andere Asymptotenebene mufs also die vierte harmonische ξ' sein, so dafs das Doppelverhältnis:

$$(\eta\xi_1\xi\xi') = -1$$

wird, d. h. ξ und ξ' trennen σ und τ harmonisch, also auch umgekehrt, oder ξ und ξ' erzeugen eine Ebeneninvolution, deren Asymptotenebenen σ und τ sind, w. z. b. w.

Sobald aber die Doppelebenen der koaxial liegenden projektivischen Ebenenbüschel nicht reell sind, wird der Nachweis für die Ebeneninvolution $[\xi\xi']$ etwas umständlicher. Wir leiten ihn aus den bekannten Eigenschaften der Doppelverhältnisse und den involutorischen Beziehungen in folgender Weise ab:

Es werden drei beliebige Ebenen durch die gemeinsame Axe angenommen:

$\alpha = \beta_1$ und ihre entsprechenden α_1 und β
$\alpha' = \beta'_1$ „ „ „ α'_1 „ β'
$\alpha'' = \beta''_1$ „ „ „ α''_1 „ β'';

sodann werden die vierten harmonischen Ebenen:

$\gamma\ \gamma'\ \gamma''$
konstruiert, so dafs die Werte der Doppelverhältnisse gelten:

$$(\alpha_1\ \beta\ \alpha\ \gamma) = -1$$
$$(\alpha'_1\ \beta'\ \alpha'\ \gamma') = -1$$
$$(\alpha''_1\ \beta''\ \alpha''\ \gamma'') = -1,$$

dann ist nachzuweisen, dafs die drei Ebenenpaare:

$$\alpha \text{ und } \gamma, \quad \alpha' \text{ und } \gamma', \quad \alpha'' \text{ und } \gamma''$$

einer Ebeneninvolution angehören.

Aus der Projektivität der beiden Büschel folgt:

$$(\alpha\alpha'\beta\beta') = (\alpha_1\alpha'_1\beta_1\beta'_1) = (\alpha_1\alpha'_1\alpha\alpha')$$
$$= (\alpha'\alpha\alpha'_1\alpha_1),$$

woraus hervorgeht, dafs die Ebenenpaare

$$\alpha \text{ und } \alpha', \quad \beta \text{ und } \alpha'_1, \quad \beta' \text{ und } \alpha_1$$

einer Involution angehören, weil das Paar $\alpha\alpha'$ verkehrt mit dem Paare $\alpha'\alpha$ zusammenfällt.

Derselben Involution muss auch das Ebenenpaar $\gamma\gamma'$ angehören; denn weil

$$(\alpha_1\beta\alpha\alpha') = (\beta'\alpha'_1\alpha'\alpha)$$
$$-1 = \underline{(\alpha_1\beta\gamma\alpha) = (\beta'\alpha'_1\gamma'\alpha')} = -1,$$

so folgt nach dem Moebiusschen Satze: (Th. d. Keg. § 6)

$$(\alpha_1\beta\gamma\alpha') = (\beta'\alpha'_1\gamma'\alpha),$$

folglich gehören auch $\gamma\gamma'$ als Paar konjugierter Ebenen der vorigen Involution an.

Wir haben in dieser Weise dreimal vier Paare konjugierter Elemente je einer Involution:

1) $\alpha\alpha', \quad \gamma\gamma', \quad \beta\alpha'_1, \quad \beta'\alpha_1$
2) $\alpha\alpha'', \quad \gamma\gamma'', \quad \beta\alpha''_1, \quad \beta''\alpha_1$
3) $\alpha'\alpha'', \quad \gamma'\gamma'', \quad \beta'\alpha''_1 \quad \beta''\alpha'_1.$

Nun ist aber wegen dieser Involutionen:

$$(\alpha\gamma\gamma'\gamma'') = (\alpha\gamma\gamma'\beta) \;.\; (\alpha\gamma\beta\gamma'') = (\alpha\gamma\gamma'\beta)\ (\alpha''\gamma''\alpha''_1\gamma)$$
$$(\alpha'\gamma'\gamma''\gamma) = (\alpha'\gamma'\gamma''\beta') \;.\; (\alpha'\gamma'\beta'\gamma) = (\alpha'\gamma'\gamma''\beta')\ (\alpha\gamma\alpha_1\gamma')$$
$$(\alpha''\gamma''\gamma\gamma') = (\alpha''\gamma''\gamma\beta'') \;.\; (\alpha''\gamma''\beta''\gamma') = (\alpha''\gamma''\gamma\beta'')\ (\alpha'\gamma'\alpha'_1\gamma'')$$
$$(\alpha\gamma\gamma'\gamma'') \;.\; (\alpha'\gamma'\gamma''\gamma) \;.\; (\alpha''\gamma''\gamma\gamma') = (\alpha\gamma\alpha_1\beta)\,(\alpha'\gamma'\alpha'_1\beta')\,(\alpha''\gamma''\alpha''_1\beta'')$$
$$= -1.$$

Die Bedingung:

$$(\alpha\gamma\gamma'\gamma'')\,(\alpha'\gamma'\gamma''\gamma)\,(\alpha''\gamma''\gamma\gamma') = -1\text{*)}$$

ist aber gleichwertig mit der, dass die drei Ebenenpaare:

$$\alpha\gamma,\quad \alpha'\gamma',\quad \alpha''\gamma''$$

einer Involution angehören; denn da identisch:

$$\begin{aligned}(\alpha\gamma\gamma'\gamma'') &= (\gamma''\gamma'\gamma\alpha)\\ (\alpha'\gamma'\gamma''\gamma) &= (\gamma\gamma''\gamma'\alpha)\,.\,(\gamma\gamma''\alpha\alpha')\\ (\alpha''\gamma''\gamma\gamma') &= (\gamma'\gamma\gamma''\alpha)\,.\,(\gamma'\gamma\alpha\alpha''),\end{aligned}$$

so folgt durch Multiplikation, weil

$$(\gamma''\gamma'\gamma\alpha)\,.\,(\gamma\gamma''\gamma'\alpha)\,(\gamma'\gamma\gamma''\alpha) = k\cdot\frac{1}{1-k}\cdot\frac{k-1}{k} = -1$$

ist,

$$(\gamma\gamma''\alpha\alpha') = (\alpha\alpha''\gamma\gamma'),$$

d. h. die drei Elementenpaare $\alpha\gamma$, $\alpha'\gamma'$, $\alpha''\gamma''$ gehören einer Involution an.

Wenn wir nun zwei von den Ebenenpaaren $\alpha\gamma$, $\alpha'\gamma'$, $\alpha''\gamma''$ festhalten und das dritte der Konstruktion gemäſs verändern, so durchläuft dasselbe die ganze Ebeneninvolution, welche durch die beiden ersten Ebenenpaare bestimmt wird. Es liefert also für beide Fälle, seien die Doppelelemente der beiden koaxialen projektivischen Ebenenbüschel reell oder nicht, eine und dieselbe Konstruktion eine bestimmte Ebeneninvolution, welche für den hyperbolischen Fall zu ihren Asymptotenebenen jene Doppelebenen hat und für den elliptischen Fall als Vertreter des imaginären Ebenenpaares der Doppelelemente aufzufassen ist.

§ 5. **Zwei besondere Aufgaben.**

Wir wollen hier zunächst eine besondere Aufgabe anschlieſsen, welche später Verwendung finden wird, nämlich folgende:

---

*) Lassen wir insbesondere $\alpha\gamma$ zusammenfallen, also ein Doppelelement sein, ebenso $\alpha'\gamma'$ das zweite Doppelelement, so drückt diese Bedingung, welche sich reduziert auf:

$$(\alpha''\gamma''\gamma'\gamma) = -1,$$

weiter nichts aus, als daſs irgend ein Paar konjugierter Elemente durch die Doppelelemente harmonisch getrennt wird.

Eine gegebene elliptische Ebeneninvolution durch eine solche Ebene zu durchschneiden, dafs die Durchschnittsfigur eine orthogonale Strahleninvolution wird.

Mit dieser Aufgabe gleichbedeutend, aber für die Anschauung einfacher ist die folgende:

Durch eine gegebene elliptische Strahleninvolution eine orthogonale Ebeneninvolution zu legen.

Die eine dieser beiden Aufgaben ist auf die andere zurückführbar, und die Lösung der einen giebt zugleich die der anderen. Denn sei in der ersten Aufgabe l die Axe der Ebeneninvolution und ε die durchschneidende Ebene, und legen wir durch den Schnittpunkt (l, ε) einmal die Normalen der Ebenenpaare der gegebenen Ebeneninvolution, so liegen dieselben sämtlich in einer Ebene ε_1 und sind Strahlenpaare einer Strahleninvolution; legen wir aber andererseits durch den Schnittpunkt (l, ε) alle Ebenenpaare normal zu den Strahlenpaaren der Strahleninvolution in ε, so laufen dieselben sämtlich durch eine Axe l_1, die Normale der Ebene ε, und bilden eine Ebeneninvolution. Ist nun die Strahleninvolution in ε eine orthogonale, so ist auch die Ebeneninvolution durch l_1 eine orthogonale, weil sie von den Normalebenen zu allen jenen Strahlenpaaren gebildet wird. Die Aufgabe, die Ebeneninvolution $[l]$ durch eine orthogonale Strahleninvolution $[\varepsilon]$ zu schneiden kommt also mit der Aufgabe überein, durch die Strahleninvolution $[\varepsilon_1]$ eine orthogonale Ebeneninvolution $[l_1]$ zu legen und die Lösung der einen Aufgabe liefert zugleich die der anderen.

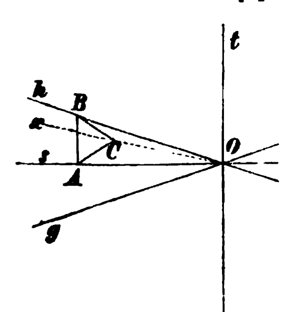


Fig. 1.

Nehmen wir demgemäfs die Strahleninvolution als gegeben an und legen sie in die Ebene des Papiers, ermitteln ihre Axen st (d. h. die rechtwinkligen konjugierten Strahlen) und ihre Potenzstrahlen gh, deren Winkel und Nebenwinkel durch s und t halbiert werden, dann bilden $stgh$ vier harmonische sich in O durchkreuzende Strahlen (Fig. 1); es soll nun durch O eine solche Axe x im Raume gelegt werden,

dafs sowohl das Ebenenpaar $[xs, xt]$ als auch das Ebenenpaar $[xg, xh]$ je ein Paar rechtwinkliger Ebenen werden; dann ist offenbar x die Axe einer orthogonalen durch die gegebene Strahleninvolution gelegten Ebeneninvolution. Da aber die vier Ebenen $x[stgh]$ ebenfalls harmonisch sein müssen und jedes Paar zugeordneter ein rechtwinkliges Paar ist, so müssen die Ebenen des einen Paares die Winkel des andern Ebenenpaares halbieren und umgekehrt, also müssen alle vier Winkel:

$$(xg, xs) = 45^0$$
$$(xs, xh) = 45^0$$
$$(xh, xt) = 45^0$$
$$(xt, xg) = 45^0$$

sein, und hieraus folgt, dafs der Strahl x nur in je einer der Ebenen gesucht werden kann, welche durch s und t rechtwinklig zur Ebene der gegebenen Strahleninvolution (des Papiers) gelegt werden. Denken wir uns daher in O auf der Ebene des Papiers das Perpendikel r errichtet und suchen den Strahl x zuerst in der Ebene $[rs]$; errichten wir zu diesem Zweck in einem beliebigen Punkte A des Strahles s das Perpendikel AB, welches in B dem Strahle h begegne und fällen aus A das Perpendikel AC auf den gesuchten Strahl x in der Ebene $[rs]$, so wird AB eine Normale sein der Ebene $[rs] = [sx] = AOC$; daher werden die Ebenen AOC und ABC zu einander rechtwinklig sein, und weil auf ihrer Schnittlinie AC der Strahl $CO = x$ rechtwinklig ist, so ist x eine Normale der Ebene ABC, folglich der Winkel ACB der Neigungswinkel der Ebenen $(xs, xh) = 45^0$, und da der Winkel $BAC = 90^0$ ist, so ist das Dreieck BAC ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, mithin

$$AB = AC$$

oder

$$OA \,.\, \mathrm{tg}\,(sh) = OA \,.\, \sin\,(sx)$$
$$\mathrm{tg}\,(sh) = \sin\,(sx).$$

Durch diese Bedingung ist der Strahl x in der Ebene $[rs]$ bestimmt und leicht zu konstruieren, unter der Voraussetzung, dafs der Winkel $(sh) < 45^0$ ist; von den beiden Winkeln (sh) und (th), welche sich zu 90^0 ergänzen, ist aber einer

immer kleiner als 45⁰ und der andere daher gröſser als 45⁰ (mit der einzigen Ausnahme, wenn beide gleich 45⁰ sind); wenn daher der gesuchte Strahl x in der Ebene $[rs]$ reell vorhanden ist, so kann er in der Ebene $[rt]$ nicht reell sein und umgekehrt; die Bedingung:

$$\operatorname{tg}(sh) = \sin(sx)$$

liefert zwei gesuchte Strahlen x uud x', deren Konstruktion (unter Annahme $(sh) < 45^0$) sich so bewerkstelligen läſst:

Man schlage über AO als Durchmesser in der Ebene $[rs]$ einen Kreis und trage das Perpendikel AB in diesen Kreis als Sehne AC oder AC' ein, dann ist jeder der beiden Strahlen $OC = x$ und $OC' = x'$ der gesuchte, d. h. er genügt der Forderung der Aufgabe oder ist Axe einer orthogonalen Ebeneninvolution, die durch die gegebene Strahleninvolution gelegt werden kann. Die Aufgabe hat also zwei und immer nur zwei reelle Lösungen, während die beiden anderen Lösungen, welche der Bedingung:

$$\operatorname{tg}(th) = \sin(ty)$$

entsprechen, in der Ebene $[rt]$ immer imaginär sind; die Strahlen x und x' liegen selbstverständlich symmetrisch zur Ebene der Strahleninvolution. Hierdurch ist die vorgelegte Aufgabe vollständig gelöst. Mit ihr ist aber zugleich eine zweite Aufgabe gelöst, nämlich folgende:

Eine gegebene hyperbolische Ebeneninvolution durch eine solche Ebene zu schneiden, daſs die Durchschnittsfigur eine gleichseitig-hyperbolische Strahleninvolution wird, oder die mit ihr gleichbedeutende:

Durch eine gegebene hyperbolische Strahleninvolution eine gleichseitig-hyperbolische Ebeneninvolution zu legen.

Beide Aufgaben, von denen die eine, wie oben, auf die andere zurückführbar ist, werden in ganz gleicher Weise gelöst, wie die vorigen.

Nennen wir in einer gegebenen Strahleninvolution s und t die Axen, g und h die Asymptotenstrahlen, so wird die Axe x einer gleichseitig-hyperbolischen Ebeneninvolution, welche durch die Strahleninvolution gelegt werden soll, so liegen

müssen, dafs die beiden Ebenen $[xg]$ und $[xh]$, welche Asymptotenebenen der Ebeneninvolution werden müssen, rechtwinklig zu einander sind und die beiden Halbierungsebenen der Winkel zwischen den Asymptotenebenen durch die Strahlen s und t gehen. Wir erkennen hieraus, dafs die gesuchte Axe x genau dieselbe Lage zu den gegebenen Strahlen $s\ t\ g\ h$ hat, wie in der oben gelösten Aufgabe, also auch in gleicher Weise gefunden wird.

Eine der vorigen sehr nahestehende Betrachtung führt zu der Lösung der Aufgabe:

Zwei gegebene projektivische Büschel: ein ebenes Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel in perspektivische Lage zu bringen.

Bestimmen wir in den beiden gegebenen projektivischen Büscheln die ausgezeichneten Elementenpaare, einmal das rechtwinklige Strahlenpaar st des Strahlenbüschels und das ihm entsprechende rechtwinklige Ebenenpaar σ_1 und τ_1 des Ebenenbüschels, sodann die Potenzstrahlen gh des Strahlenbüschels und die entsprechenden Potenzebenen $\gamma_1 \chi_1$ des Ebenenbüschels, so dafs die Gleichheit der Winkel stattfindet:

$$(sg) = (\tau_1 \gamma_1) = (hs) = (\chi_1 \tau_1)$$

und die konstante Potenz der projektivischen Beziehung:

$$\operatorname{tg}(sx) \,.\, \operatorname{tg}(\tau_1 \xi_1) = c$$

oder

$$\operatorname{tg}(tx) \,.\, \operatorname{tg}(\sigma_1 \xi_1) = \frac{1}{c}$$

ihrem absoluten Werte nach durch $\operatorname{tg}^2(sg) = c$ repräsentiert wird; denken wir uns sodann das Strahlenbüschel in die Ebene des Papiers gelegt, so wird die Axe des Ebenenbüschels, welches mit dem Strahlenbüschel perspektivisch gelegt werden soll, so dafs also das rechtwinklige Ebenenpaar $\sigma_1 \tau_1$ resp. durch das rechtwinklige Strahlenpaar st geht, seine Axe nur in einer der beiden Ebenen haben können, welche durch s und t rechtwinklig zur Ebene des Papiers gelegt werden. Errichten wir also in dem Mittelpunkte O des Strahlenbüschels ein Perpendikel r auf der Ebene des Papiers, so kann die gesuchte Axe x des Ebenenbüschels nur entweder in der Ebene $[rs]$ oder in der Ebene $[rt]$ liegen. Suchen wir x zunächst in der Ebene $[rs]$, und errichten wir

in einem beliebigen Punkte A des Strahles s das Perpendikel AB, welches g in B trifft (Fig. 2), dann ist

$$OA \cdot \operatorname{tg}(sg) = AB.$$

Denken wir uns sodann aus A ein Perpendikel AC auf den gesuchten Strahl x herabgelassen in der Ebene $[rs]$, so wird, weil AB eine Normale der Ebene $[rs]$ ist, die Ebene ACB rechtwinklig zur Ebene $[rs]$ oder AOC sein, und weil x rechtwinklig ist auf der Schnittlinie AC beider rechtwinkligen Ebenen ACB und ACO, so mufs x eine Normale der Ebene ACB sein, folglich ist auch CB normal auf x; also der ebene Winkel ACB ist der Neigungswinkel der Ebenen $[xs]$ und $[xg]$ oder σ_1 und γ_1. Nun

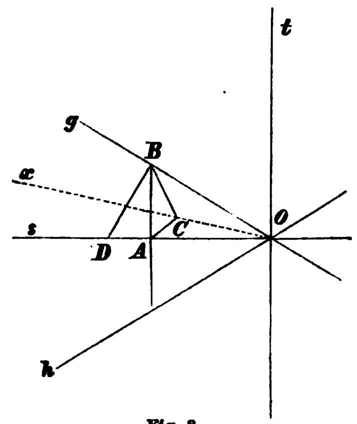


Fig. 2.

haben wir aber in dem bei A rechtwinkligen Dreieck CAB:

$$AC \cdot \operatorname{tg}(\sigma_1\gamma_1) = AB$$

und in dem Dreieck OAC:

$$OA \cdot \sin(sx) = AC,$$

folglich:

$$\operatorname{tg}(sg) = \sin(sx) \cdot \operatorname{tg}(\sigma_1\gamma_1)$$

oder, da die Winkel $(\sigma_1\gamma_1)$ und $(\tau_1\gamma_1)$ sich zu 90^0 ergänzen,

$$\operatorname{tg}(sg)\operatorname{tg}(\tau_1\gamma_1) = \sin(sx).$$

Dies ist aber der Wert der konstanten Potenz der projektivischen Beziehung, also entweder c oder $\frac{1}{c}$; von diesen beiden Werten mufs notwendig einer > 1, der andere < 1 sein (mit einziger Ausnahme, wenn beide $= 1$ sind); nennen wir x den gesuchten Strahl in der $[rs]$-Ebene und y in der $[rt]$-Ebene, so wird von den beiden Gleichungen:

$$\sin(sx) = c$$

$$\sin(ty) = \frac{1}{c}$$

nur eine reelle Auflösungen zulassen, weil der Sinus < 1 sein

mufs; also wird ein reeller Strahl nur in einer der beiden Ebenen $[sr]$ oder $[tr]$ möglich sein, wie es auch die hieraus hervorgehende Konstruktion des Strahles x selbst zeigt. Da nämlich g und γ_1 Potenzstrahl und Potenzebene sind, so sind die Winkel (sg) und $(\tau_1\gamma_1)$ einander gleich; die Winkel (sg) und $(\sigma_1\gamma_1)$ ergänzen sich also zu 90^0, und da mithin

$$\text{tg}\,(sg)\,.\,\text{tg}\,(\sigma_1\gamma_1) = 1$$

wird, so folgt:

$$OA\,.\,AC = AB^2,$$

woraus folgende Konstruktion von C und damit des Strahles x hervorgeht: Man errichte in der Ebene des Papiers in einem beliebigen Punkte A des Strahles s das Perpendikel AB, welches in B dem Strahl g begegnet; in B errichte man auf dem Strahl g das Perpendikel, welches in D dem Strahl s begegnet. Beschreibt man sodann in der $[rs]$-Ebene über OA als Durchmesser einen Kreis und trägt in denselben $AC = AD$ als Sehne ein, was in doppelter Weise geschehen kann, so erhält man zwei Punkte C und C' dieses Kreises, welche mit O verbunden die gesuchten Strahlen:

$$OC = x, \quad OC' = x'$$

in der $[rs]$-Ebene liefern. Sobald $AD > AO$ ist, d. h. der Winkel $(sg) > 45^0$, wird die Konstruktion in der $[rs]$-Ebene zu keiner reellen Lösung führen, dagegen dieselbe Konstruktion in der $[rt]$-Ebene die reellen Strahlen y und y' liefern und umgekehrt, so dafs auch diese Aufgabe, wie die früheren, nur zwei reelle Lösungen hat und dieselben immer vorhanden sind.

In dem Grenzfalle, wenn $(sg) = 45^0$, fallen offenbar beide reelle Lösungen in dem Strahle r zusammen, zu dem sie im allgemeinen symmetrisch liegen.*)

§ 6. Der Kegel zweiter Ordnung.

Nachdem wir die drei Grundgebilde erster Stufe, die gerade Punktreihe, das ebene Strahlenbüschel und das Ebenenbüschel, die projektivische Beziehung derselben und ihre ausgezeichneten Elemente kennen gelernt haben, wollen wir sie

*) Vgl. die Auflösung dieser Aufgabe in Steiner's: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten etc." S. 231.

bei beliebiger Lage im Raume auffassen und ihre Erzeugnisse aufsuchen.

Wir beginnen mit einer geraden Punktreihe:

$$l(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots)$$

auf dem Träger l und einem ebenen Strahlenbüschel:

$$\mathfrak{B}\,|\,abc\ldots x\ldots|,$$

die beliebig im Raume liegend angenommen und in projektivische Beziehung gesetzt werden. Vorausgesetzt, dafs der Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Strahlenbüschels nicht in dem Träger l der Punktreihe liegt, können wir jeden Punkt $\mathfrak{x}$ der Punktreihe mit dem entsprechenden Strahl x des Strahlenbüschels durch eine Ebene ξ verbinden und den Ort sämtlicher Ebenen ξ untersuchen.

Verbinden wir den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Strahlenbüschels mit den Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots$ der Punktreihe, so erhalten wir ein zweites mit dem ersten projektivisches Strahlenbüschel, welches denselben Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ hat, und dessen Ebene $[\mathfrak{B}l]$ ist; nennen wir den Strahl $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}|$ desselben x_1, so haben wir zwei projektivische Strahlenbüschel:

$$\mathfrak{B}\,|\,abc\ldots x\ldots| \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}\,|\,a_1b_1c_1\ldots x_1\ldots|,$$

welche denselben Mittelpunkt haben, aber in verschiedenen Ebenen liegen und wir erkennen, dass das Erzeugnis dieser beiden Gebilde mit dem vorigen Erzeugnis identisch ist, indem die Ebene

$$\xi = [x\mathfrak{x}] = [x\dot{x}_1]$$

ist.

Legen wir durch die räumliche Figur eine beliebige Transversalebene ε, so schneidet dieselbe die beiden ebenen Strahlenbüschel $\mathfrak{B}|x|$ und $\mathfrak{B}|x_1|$ in zwei geraden Punktreihen $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}_1)$, welche projektivisch sind, weil es die Strahlenbüschel sind; die Gerade $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$ umhüllt also in der Transversalebene ε einen Kegelschnitt (Th. d. K. § 20) und der gesuchte Ort der Ebene ξ wird nichts anderes sein als *der Ort sämtlicher Ebenen, welche einen festen Punkt $\mathfrak{B}$ im Raume mit den Tangenten eines ebenen Kegelschnitts verbinden.*

Diese Gesamtheit von Ebenen nennen wir einen *Kegel zweiter Klasse.* Dieselbe Gesamtheit von Ebenen erhalten

wir auch, wenn wir zwei beliebige Punktreihen ($\mathfrak{x}$) und ($\mathfrak{x}_1$), die mit den Strahlenbüscheln $\mathfrak{B}|x|$ und $\mathfrak{B}|x_1|$ perspektivisch liegen, ohne in derselben Ebene enthalten zu sein, zur Erzeugung verwenden. Also:

Wenn ein beliebiger fester Punkt $\mathfrak{B}$ im Raume mit je zwei entsprechenden Punkten irgend zweier projektivischen geraden Punktreihen:

$$l(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots) \text{ und } l_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{x}_1\ldots)$$

durch eine Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1]$ verbunden wird, so umhüllt dieselbe einen Kegel zweiter Klasse. Ebenso wie der Kegelschnitt gleichzeitig als Tangentengebilde (von Geraden eingehüllt) und als Punktgebilde (von Punkten beschrieben) auftritt [die Identität beider Gebilde ist in d. Th. d. K. § 23 nachgewiesen], tritt nun auch der Kegel gleichzeitig als Ebenengebilde (von Ebenen umhüllt) und als Strahlengebilde (von Strahlen beschrieben) auf; in letzterem Sinne heifst er Kegel zweiten Grades und ist als die Gesamtheit aller Strahlen aufzufassen, welche einen festen Punkt $\mathfrak{B}$ im Raume mit sämtlichen Punkten eines ebenen Kegelschnitts verbinden.

Aus der Perspektive von dem Punkte $\mathfrak{B}$ aus, dem Mittelpunkt des Kegels, nach den Punkten oder nach den Tangenten eines ebenen Kegelschnitts geht also der Kegel zweiter Ordnung als Strahlen- oder als Ebenengebilde hervor, und die Identität beider Gebilde folgt aus derjenigen, welche für den Kegelschnitt nachgewiesen ist.

Hieraus ergiebt sich nun eine Erzeugung des Kegels als Strahlengebilde:

Wenn zwei projektivische Ebenenbüschel:

$$l[\alpha\beta\gamma\ldots\xi\ldots] \text{ und } l_1[\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\xi_1\ldots]$$

so liegen, dafs ihre Axen l und l_1 sich in einem Punkt $\mathfrak{B}$ treffen, ohne dafs die sie verbindende Ebene zwei entsprechende Ebenen beider Büschel vereinigt (perspektivische Lage, § 2), dann schneiden sich entsprechende Ebenen $\xi\xi_1$ in Strahlen, deren Gesamtheit einen Kegel zweiten Grades bildet.

Ferner folgt als Haupteigenschaft:

Jede Ebene hat als Durchschnittsfigur mit

einem Kegel einem Kegelschnitt, denn diese Durchschnittsfigur ist das Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüschel, welche die Ebene aus den beiden erzeugenden Ebenenbüscheln $l[\mathfrak{x}]$ und $l_1[\mathfrak{x}_1]$ ausschneidet. (Die Durchschnittsfigur zerfällt in ein Linienpaar, sobald die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Kegels geht.)

Es folgen ferner hieraus die Konstruktionen des Kegels durch fünf Strahlen oder fünf Berührungsebenen, die dem Pascalschen und Brianchonschen Satze analogen Sätze für den Kegel und eine grofse Menge von Eigenschaften, welche unmittelbar aus dieser perspektivischen Beziehung abzulesen sind, und deren besondere Aussprache eine unnötige Wiederholung wäre; es treten nur bei dieser perspektivischen Auffassung an Stelle von

Punkten und Strahlen ... beim Kegelschnitt
Strahlen und Ebenen ... beim Kegel.

Dagegen giebt es besondere Eigenschaften des Kegelschnitts, welche beim Kegel ihre Eigentümlichkeit verlieren, nämlich alle diejenigen, welche an die unendlich-entfernte Gerade g_∞ in der Ebene des Kegelschnitts geknüpft sind. Legen wir durch den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Kegels eine Ebene parallel zu derjenigen des Kegelschnitts, aus dessen Perspektive der Kegel hervorgeht, so hat diese Ebene nichts voraus vor jeder andern durch $\mathfrak{B}$ gelegten Ebene, während die unendlich-entfernte Gerade g_∞ in der Ebene des Kegelschnitts eine ausgezeichnete, ein für alle Mal voraus bestimmte Gerade dieser Ebene ist. Während also beim Kegelschnitt die g_∞ eine Einteilung in drei Gattungen (Ellipse, Parabel und Hyperbel, Th. d. K. § 25) hervorruft, fällt diese beim Kegel fort.

Hiervon macht nur ein Fall eine Ausnahme, nämlich wenn der Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Kegels selbst im Unendlichen liegt, also sämtliche Kegelstrahlen einander parallel sind. In diesem Falle nennt man den Kegel einen Cylinder und die unendlich-entfernte Ebene ε_∞, welche im Raume eine unveränderliche, ein für alle Mal gegebene ist, wie in der Ebene die unendlich-entfernte Gerade g_∞, geht beim Cylinder durch den Mittelpunkt desselben. Sie schneidet also, wie jede durch den Mittelpunkt eines Kegels gelegte Ebene, den

Cylinder im allgemeinen in einem Linienpaar, welches entweder aus zwei reellen Geraden oder aus zwei zusammenfallenden Geraden bestehen oder imaginär sein kann. Demgemäfs heifst der Cylinder entweder ein **hyperbolischer**, oder ein **parabolischer** oder ein **elliptischer**, je nachdem er die parallele Perspektive einer Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist.

Die ebenen Durchschnittskurven durch irgend einen Cylinder dieser drei Gattungen gehören also auch immer einer und derselben Gattung an und es kann [durch eine Transversalebene] z. B. aus einem elliptischen Cylinder niemals eine Hyperbel geschnitten werden.

Dagegen können aus einem und demselben Kegel (mit endlichem Mittelpunkt $\mathfrak{B}$) alle drei Gattungen von Kegelschnitten durch eine Ebene ausgeschnitten werden. Dies hängt allein von der Stellung der schneidenden Ebene ab. Jede durch den Mittelpunkt des Kegels gelegte Ebene schneidet denselben, wie wir wissen, in einem Linienpaar, welches entweder reell oder imaginär sein oder zusammenfallen kann. Nennen wir diese drei Gattungen von Ebenen (hyperbolische, elliptische, parabolische oder Berührungsebenen)

$$\varepsilon_h, \quad \varepsilon_e, \quad \varepsilon_p,$$

so wird eine beliebige Durchschnittsebene, die durch den Kegel gelegt wird, denselben in einer Hyperbel, Ellipse oder Parabel schneiden, je nachdem sie die Stellung ε_h, ε_e oder ε_p hat; in letzterem Falle mufs sie also einem Kegelstrahle parallel sein.

Obwohl der Kegel $\mathfrak{B}^{(2)}$ aus der Perspektive des Kegelschnitts hervorgeht, so tritt er doch andererseits selbst als **dualistisch gegenüberstehendes Gebilde des ebenen Kegelschnitts** auf; wenn wir nämlich anstatt, wie zu Anfang, von Strahlenbüschel und Punktreihe in projektivischer Beziehung und beliebiger räumlicher Lage auszugehen, von Strahlenbüschel und Ebenenbüschel ausgehen:

$$\mathfrak{B}|abc\ldots x\ldots| \quad \text{und} \quad l_1[\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\xi_1\ldots]$$

in projektivischer Beziehung und bei beliebiger räumlicher Lage, so trifft jeder Strahl x die entsprechende Ebene ξ_1 in einem Punkte, dessen Ort offenbar ein ebener Kegelschnitt

ist, welcher ganz in der Ebene des Stralenbüschels $\mathfrak{B}|x|$ liegt und als Erzeugnis der beiden projektivischen Strahlenbüschel erscheint, deren eins $\mathfrak{B}|x|$ ist und das andere der Durchschnitt der Ebene des ersteren mit dem Ebenenbüschel $l_1[\xi_1]$. Hiernach steht dieser Kegelschnitt dualistisch gegenüber dem vorigen Kegel. Den Punkten des Kegelschnitts entsprechen die Berührungsebenen des Kegels, der Ebene des Kegelschnitts der Mittelpunkt des Kegels, den Tangenten des Kegelschnitts die Strahlen des Kegels. Überhaupt steht dem Kegelschnitt in der Geometrie der Ebene dualistisch gegenüber der Kegel in der Geometrie des Punktes. Ebenso wie wir uns die Ebene erfüllt denken mit Punkten und Strahlen (als Punkt-feld und Strahlen-feld), können wir durch einen Punkt im Raume die gleiche Mannigfaltigkeit von Strahlen und von Ebenen hindurchlegen und nennen dieses Gebilde gleichzeitig Strahlenbündel und Ebenenbündel. Obwohl nun diese Gebilde der zweiten Stufe angehören und demgemäſs auch erst in dem zweiten Abschnitt näher untersucht werden sollen, so ist es doch ein von ihnen abhängiges Gebilde, welches wir schon beim Kegelschnitt kennen gelernt haben, und dessen dualistisch gegenüberstehendes Gebilde bei der Untersuchung des Kegels unser hauptsächlichstes Interesse in Anspruch nimmt. Wir haben in der Theorie der Kegelschnitte das ebene Polarsystem kennen gelernt, als dessen besondere Elemente die Punkte und Tangenten des Kegelschnitts auftreten (Th. d. K. § 56) und welches als der Vertreter des Kegelschnitts anzusehen ist, auch wenn derselbe gar keine reellen Punkte und Tangenten hat. Dem entsprechend ist die Perspektive des ebenen Polarsystems von irgend einem Punkte $\mathfrak{B}$ des Raumes aus genommen, das Polarbündel, der Vertreter des Kegels, und in dem reellen Falle sind die incidenten konjugierten Elemente des Polarbündels die Strahlen und Berührungsebenen des Kegels, welche aber auch sämtlich imaginär sein können.

Bevor wir auf die nähere Untersuchung des Polarbündels eingehen, bemerken wir einen charakteristischen Unterschied zwischen ihm und dem ebenen Polarsystem. Dieses hat nämlich eine ausgezeichnete von vorn herein gegebene Gerade g_∞, die unendlich-entfernte Gerade, während ein ein-

ziges analoges ausgezeichnetes Element beim Polarbündel nicht vorhanden ist. Welche besonderen Elemente hier an die Stelle treten, werden wir später sehen.

§ 7. Das Polarbündel. Konstruktion desselben aus den Elementen der projektivischen Gebilde.

Obwohl wir die allgemeinen Eigenschaften des Polarbündels aus der Perspektive des ebenen Polarsystems ableiten können, so ziehen wir es doch vor, dieselben aus den Elementen der projektivischen Gebilde, welche den Kegel erzeugen, unabhängig herzuleiten und das Polarbündel in folgender Weise zu konstruieren:

Gegeben sind zwei projektivische Gebilde: ein ebenes Strahlenbüschel:

$$\mathfrak{B}|abc\ldots x\ldots|$$

und eine gerade Punktreihe:

$$l_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{x}_1\ldots).$$

Eine beliebige durch $\mathfrak{B}$ gelegte Ebene σ schneidet die Gebilde im allgemeinen in zwei sich nicht entsprechenden Elementen, einem Strahl x und einem Punkt $\mathfrak{y}_1$, denen entsprechen mögen der Punkt $\mathfrak{x}_1$ und der Strahl y; durch y und $\mathfrak{x}_1$ wird eine Ebene gelegt, welche σ in einem Strahle l schneidet; von $\mathfrak{B}$ aus gehen dann drei Strahlen in einer Ebene, nämlich der letzte Schnittstrahl l und die Strahlen y und $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}_1|$; zu diesem wird der vierte harmonische dem Schnittstrahl l zugeordnete Strahl s konstruiert und

der Ebene σ ... der Strahl s

zugeordnet, dann konstituieren σ und s als Polarebene und Polarstrahl ein Polarbündel, dessen Kernfläche der Kegel ist, welcher von den gegebenen projektivischen Gebilden erzeugt wird, (d. h. für diesen Kegel sind allemal σ und s Polarebene und Polarstrahl).

Die Betrachtung gestaltet sich symmetrischer, wenn wir statt der Punktreihe:

$$l_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{x}_1\ldots)$$

ein mit derselben perspektivisches Strahlenbüschel von $\mathfrak{B}$ aus legen und dessen Strahlen bezeichnen:

$$\mathfrak{B}\,|\,a_1\,b_1\,c_1\ldots x_1\ldots|;$$

wo $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}_1| = x_1$ ist.

Dann haben wir zwei projektivische Strahlenbüschel mit gemeinsamem Mittelpunkt in verschiedenen Ebenen. Die Schnittlinie der beiden ebenen Träger vereinigt zwei nicht entsprechende Strahlen e und f_1, deren entsprechende Strahlen e_1 und f seien; diese werden durch eine Ebene τ verbunden. Nehmen wir irgend zwei Paare entsprechender Strahlen xx_1 und yy_1 hinzu, so giebt die Projektivität der Büschel die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(efxy) = (e_1 f_1 x_1 y_1)$$

oder

$$(efxy) = (f_1 e_1 y_1 x_1);$$

da nun e mit f_1 koinzidiert, so liegen diese vier Strahlenpaare perspektivisch, d. h. in demselben Ebenenbüschel, durch dessen Axe also die drei Ebenen gehen:

$$[fe_1],\quad [xy_1],\quad [yx_1].$$

Dies sagt aus, dass die Schnittlinie:

$$l = |\,xy_1,\ yx_1\,|$$

in der festen Ebene τ sich bewegt, welche die Strahlen f und e_1 verbindet.

Wir bezeichnen nun die veränderliche Ebene $[xy_1]$ durch σ und suchen zu dem Schnittstrahl l und den Strahlen yx_1 den zugeordneten vierten harmonischen Strahl s, so dafs

$$(yx_1 ls) = -1$$

wird. Dadurch wird der Ebene σ der Strahl s zugeordnet und wir wollen die Abhängigkeit dieser einander zugeordneten Elemente untersuchen, indem wir zeigen, dass

1) wenn einer beliebigen Ebene σ (durch $\mathfrak{B}$) mittelst der angegebenen Konstruktion der Strahl s zugeordnet ist, alsdann irgend einer durch s gelegten Ebene σ' ein Strahl s' zugeordnet ist, welcher in der ersten Ebene σ liegen mufs.

Beweis.

Möge eine beliebige durch s gelegte Ebene σ' die Träger ε und ε_1 der beiden projektivischen Strahlenbüschel in den Strahlen

$$u \text{ und } v_1$$

schneiden, deren entsprechende

$$u_1 \text{ und } v$$

seien, dann wird sowohl die Schnittlinie

$$|uv_1, vu_1| = m$$

als auch die Schnittlinie

$$|yv_1, vy_1| = n$$

nach dem Obigen in derselben festen Ebene τ liegen, in welcher auch l liegt.

Werden nun die vier harmonischen Strahlen:

$$y\ x_1\ l\ s$$

mit v_1 durch vier Ebenen verbunden, so erhalten wir vier harmonische Ebenen, welche die Ebene τ wieder in vier harmonischen Strahlen schneiden müssen, nämlich:

$$n\ e_1\ l\ m,$$

und diese vier harmonischen Strahlen werden mit y_1 verbunden vier neue harmonische Ebenen liefern, deren Durchschnitt mit der Ebene $[v\,u_1]$ folgende vier harmonische Strahlen liefert:

$$v\ u_1\ s'\ m,$$

wo s' den Schnittstrahl der Ebene $[y_1 l]$ oder σ mit der Ebene $[v u_1]$ bedeutet; hiernach ist also s' der vierte harmonische Strahl zu $v u_1$ und m, dem letzteren Strahle zugeordnet und liegt in der Ebene σ, wodurch unser Satz bewiesen ist.

2) Wenn wir die Ebene σ um eine beliebige in ihr festgehaltene Axe s' herumdrehen, so verändert sich auch ihr zugeordneter Strahl s und beschreibt eine bestimmte Ebene σ', so dafs das Ebenenbüschel $s'[\sigma]$ und das ebene Strahlenbüschel $\sigma'|s|$ projektivisch sind und involutorisch liegen.

Beweis.

Bei der Drehung der veränderlichen Ebene σ um den in ihr festgehaltenen Strahl s' beschreiben die beiden Strahlen x und y_1 zwei perspektivisch liegende Strahlenbüschel in den Ebenen ε und ε_1, welche das Ebenenbüschel $s'[\sigma]$ durchschneiden. Wegen der Projektivität der beiden gegebenen Gebilde beschreibt nun x_1 ein mit x und y ein mit y_1 projektivisches Strahlenbüschel, folglich sind auch die von den Strahlen x_1 nnd y beschriebenen Strahlenbüschel mit dem Ebenenbüschel $s'[\sigma]$, also auch unter sich projektivisch.

Die veränderliche Ebene $[x_1 y]$ wird daher einen Kegel umhüllen, welcher aufser den beiden Trägern ε und ε_1 offenbar auch die Ebene τ berührt, denn sobald die veränderliche Ebene σ in die Lage $[s' e]$ (oder $[s' f_1]$) gelangt, geht x_1 in e_1 und y in f über, also ist $[e_1 f] = \tau$ auch eine Berührungsebene des vorigen Kegels. Dieser Kegel (der ein anderer ist, als der von den gegebenen projektivischen Strahlenbüscheln erzeugte) hat drei feste Berührungsebenen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \tau$, und eine veränderliche Berührungsebene schneidet dieselben in drei Strahlen $y\ x_1\ l$, zu denen allemal der vierte harmonische, dem l zugeordnete Strahl s konstruiert wird. Wir wissen aber, dafs „wenn vier feste Ebenen, die durch einen Punkt $\mathfrak{B}$ gehen, von einer durch diesen Punkt gelegten veränderlichen Ebene in vier Strahlen geschnitten werden, deren Doppelverhältnis bei gegebener Zuordnung einen konstanten Wert hat (hier $= -1$), die veränderliche Ebene einen Kegel umhüllt, welcher die vier festen Ebenen berührt“, und können diesen Satz so umkehren: „Wenn drei feste Berührungsebenen ($\varepsilon\ \varepsilon_1\ \tau$) eines Kegels von einer veränderlichen Berührungsebene desselben in drei Strahlen ($y x_1 l$) geschnitten werden und in dieser Ebene ein vierter Strahl (s) so konstruiert wird, dafs das Doppelverhältnis derselben ($y x_1 l s$) bei gegebener Zuordnung einen unveränderlichen Wert behält (hier $= -1$), dann mufs der Strahl s eine vierte feste Berührungsebene des Kegels durchlaufen“ (vergl. Th. d. K. S. 124).

Hierdurch ist also nachgewiesen, dafs bei der Drehung der Ebene σ um einen festen Strahl s' der ihr zugeordnete Strahl s eine Ebene σ' beschreibt und in dieser ein Strahlenbüschel um den Punkt $\mathfrak{B}$ erzeugt. Die Projektivität dieses Strahlenbüschels mit dem vorigen Ebenenbüschel $s'[\sigma]$ leuchtet unmittelbar ein, weil eine veränderliche Berührungsebene eines Kegels irgend zwei feste Berührungsebenen allemal in projektivischen Strahlenbüscheln schneidet, also hier die veränderliche Berührungsebene $[x_1 y]$ des vorigen Kegels die beiden festen Berührungsebenen σ' und τ in den Strahlen s und l schneidet, welche projektivische Strahlenbüschel beschreiben müssen. Das von l beschriebene Strahlenbüschel liegt aber perspektivisch mit dem Ebenenbüschel, welches σ beschreibt, also sind auch Ebenenbüschel $s'[\sigma]$ und Strahlenbüschel $\sigma'|s|$ projektivisch. Dafs endlich die beiden projektivischen Gebilde

involutorisch liegen; zeigt der Satz 1), welcher aussagt, dafs, wenn man eine Ebene σ und den ihr zugeordneten Strahl s hat, einer durch s gelegten Ebene σ' ein Strahl s' zugeordnet ist, welcher in σ liegen mufs. Hierdurch ist aber die involutorische Lage erwiesen, und es folgt zugleich, dafs zu der Ebene σ' der zugeordnete Strahl s' sein mufs. Denn denken wir uns zwei Ebenen σ durch s' gelegt, eine erste und eine zweite, so sind ihnen zwei Strahlen s zugeordnet, welche die Ebene σ' bestimmen. Da nun diese Ebene σ' durch den ersten und auch durch den zweiten der Strahlen s geht, so mufs der ihr zugeordnete Strahl sowohl in der ersten als auch in der zweiten der Ebenen σ liegen kraft des Satzes 1), folglich der Strahl s' sein.

Hierdurch ist nun die Natur des Polarbündels vollständig klar gelegt:

Jeder durch den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Polarbündels gelegten Ebene σ wird ein bestimmter durch $\mathfrak{B}$ gehender Strahl s (vermittelst der oben angegebenen Konstruktion) zugeordnet; er soll der **Polarstrahl** der Ebene heifsen. Gleichzeitig wird jedem Strahl s' durch $\mathfrak{B}$ eine bestimmte Ebene σ' zugeordnet, welche die **Polarebene** des Strahls heisst, indem für alle durch s' gelegten Ebenen die Polarstrahlen in der Polarebene σ' liegen. Dreht sich die veränderliche Ebene σ um einen in ihr festgehaltenen Strahl s', und beschreibt also ein Ebenenbüschel, so bewegt sich ihr Polarstrahl s in einer festen Ebene σ', der Polarebene des Strahls s' und beschreibt ein ebenes Strahlenbüschel, welches mit dem von σ beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch ist und involutorisch liegt, d. h. legt man durch s' ein Ebenenbüschel $[\sigma]$ und verbindet zugleich s' mit den Polarstrahlen s der Ebenen σ, so erhält man Ebenenpaare einer Ebeneninvolution. Dreht man in einer beliebigen Ebene σ' einen Strahl s um den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ und bestimmt zugleich den Schnittstrahl der Polarebene σ von s mit der Ebene σ', so erhält man in dieser Ebene eine Strahleninvolution. Im Polarbündel ist also jede durch $\mathfrak{B}$ gelegte Ebene der Träger einer bestimmten Strahleninvolution und jeder durch $\mathfrak{B}$ gehende Strahl die Axe einer bestimmten Ebeneninvolution; sind σ und s Polarebene und Polarstrahl, so liegen die ihnen zugehörigen Involutionen perspektivisch.

§ 8. Einige allgemeine Eigenschaften des Polarbündels.

Unter den sämtlichen Strahlen- und Ebenen-Involutionen, welche in einem Polarbündel enthalten sind, kann es hyperbolische, parabolische und elliptische geben; die parabolischen erfüllen, wie wir sehen werden, einen gewissen Ort, die andern gewisse Gebiete, welche durch jenen Ort von einander getrennt werden.

Im allgemeinen werden Polarebene und Polarstrahl eines Polarbündels nicht in einander liegen; suchen wir zunächst solche besondere Ebenen im Bündel ($\mathfrak{B}$) auf, deren Polarstrahlen in ihnen selbst liegen. Wenn eine Ebene $[xy_1] = \sigma$ (§ 7), welche in l die Ebene τ schneidet, ihren Polarstrahl selbst enthalten soll, so mufs die Ebene $[x_1 y]$, welche sowohl den Polarstrahl s als auch den Strahl l enthält, mit der vorigen zwei Strahlen gemein haben, die zusammenfallen, d. h. es muss x mit y und y_1 mit x_1 zusammenfallen, oder die gesuchte Ebene σ mufs eine Berührungsebene des Kegels sein, welcher das Erzeugnis der beiden ursprünglich gegebenen projektivischen Büschel $\mathfrak{B}|x|$ und $\mathfrak{B}|x_1|$ ist. In diesem Falle wird der Polarstrahl s der vierte harmonische zu l zugeordnete und ist als Schnittstrahl zweier unendlich-naher Berührungsebenen ($[xx_1]$ und $[yy_1]$) d. h. als Berührungsstrahl oder Kegelstrahl erkennbar.

Eine Berührungsebene des Kegels [des Erzeugnisses der gegebenen projektivischen Büschel $\mathfrak{B}|x|$ und $\mathfrak{B}|x_1|$] hat also zu ihrem Polarstrahl den in ihr liegenden Kegelstrahl (Berührungsstrahl), und umgekehrt hat ein Kegelstrahl zu seiner Polarebene die Berührungsebene am Kegel längs dieses Strahles. Berührungsebene und Kegelstrahl erscheinen hiernach als besondere Fälle von Polarebene und Polarstrahl; die zugehörigen Strahlen- und Ebeneninvolutionen nehmen in diesem Falle den parabolischen Charakter an. Da die Strahlen und Berührungsebenen des Kegels unabhängig sind von der Erzeugung desselben durch die ursprünglichen Büschel $\mathfrak{B}|x|$ und $\mathfrak{B}|x_1|$, so bleiben auch die parabolischen Strahlen- und Ebeneninvolutionen unabhängig von der Erzeugung des Kegels. Sie trennen die Gebiete der hyperbolischen und elliptischen Involutionen von einander.

Nehmen wir einen Strahl s (durch 𝔅) als die Axe einer hyperbolischen Ebeneninvolution im Polarbündel an, so müssen die beiden Asymptotenebenen derselben offenbar Berührungsebenen des Kegels sein, weil ihre Polarstrahlen in ihnen selbst liegen; also die Polarebene σ des Strahls s ist nichts anderes, als diejenige Ebene, welche die beiden Berührungsstrahlen der durch s an den Kegel gelegten Berührungsebenen verbindet. Diese Ebeneninvolution ist aber durch die beiden Asymptotenebenen vollständig bestimmt, also auch unabhängig von der Erzeugung des Kegels. Ebenso ist der Polarstrahl s einer Ebene σ, welche den Kegel in zwei Strahlen schneidet, nichts anderes als die Schnittlinie der beiden Berührungsebenen des Kegels längs jenen Strahlen und die Strahleninvolution, welche einer Ebene σ im Polarbündel zugehört, hat zu Asymptoten die beiden Kegelstrahlen, in welchen die Ebene σ den Kegel schneidet.

Für den hyperbolischen Fall sind also ebenso wie für den parabolischen Fall Polarebene und Polarstrahl mit ihren Involutionen unabhängig von der ursprünglichen Erzeugung des Kegels. Hyperbolische Strahlen s sind diejenigen in dem ganzen Gebiete aufserhalb des Kegels, welches von sämtlichen Berührungsebenen des Kegels erfüllt wird; hyperbolische Ebenen σ alle diejenigen, welche den Kegel in reellen Strahlenpaaren schneiden. Jetzt bleiben für das übrige Gebiet nur noch die elliptischen Involutionen. Dafs auch diese unabhängig sind von der ursprünglichen Erzeugung des Kegels, folgt daraus, dafs die hyperbolischen und parabolischen es sind und die elliptischen vermittelst der hyperbolischen konstruiert werden können.

Nehmen wir einen Strahl s (durch 𝔅) als die Axe einer elliptischen Ebeneninvolution im Polarbündel an, so darf keine Berührungsebene des Kegels durch ihn gehen; er mufs also ganz in dem Gebiete innerhalb des Kegels liegen, welches von keiner Berührungsebene getroffen wird. Hieraus folgt, dass jede durch s gelegte Ebene σ' eine hyperbolische sein mufs, d. h. den Kegel in zwei reellen Strahlen schneidet; denn wäre dies nicht der Fall, so müfste die Ebene σ' ganz in dem von den Berührungsebenen erfüllten Gebiete liegen, und es müfsten in jedem durch 𝔅 gehenden Strahle der Ebene

σ' (also auch in s) zwei Berührungsebenen des Kegels sich schneiden, was gegen die Voraussetzung ist. Die Polarebene σ des elliptischen Strahls s ist aber offenbar der Träger einer elliptischen Strahleninvolution wegen der perspektivischen Lage zweier Involutionen, deren Träger Polarebene und Polarstrahl sind.

Wir nennen kurz elliptischen oder hyperbolischen Strahl im Polarbündel, elliptische oder hyperbolische Ebene solche, welche die Axen oder Träger bez. zugehöriger elliptischer oder hyperbolischer Involutionen sind, und haben demgemäſs folgendes Verhalten:

Durch einen elliptischen Strahl im Polarbündel gehen nur hyperbolische Ebenen, in einer elliptischen Ebene liegen nur hyperbolische Strahlen; durch einen hyperbolischen Strahl gehen sowohl elliptische, als auch hyperbolische Ebenen, welche durch zwei parabolische Ebenen (Berührungsebenen) von einander getrennt werden; in einer hyperbolischen Ebene liegen sowohl elliptische als auch hyperbolische Strahlen, welche durch zwei parabolische Strahlen (Kegelstrahlen) von einander getrennt werden.

K o n j u g i e r t e S t r a h l e n im Polarbündel (oder in Bezug auf den Kegel) heiſsen zwei solche Strahlen durch $\mathfrak{B}$, welche k o n j u g i e r t e Strahlen in derjenigen Strahleninvolution sind, deren Träger die Verbindungsebene beider Strahlen ist, oder auch: zwei solche Strahlen, von denen jeder in der Polarebene des andern liegt.

K o n j u g i e r t e E b e n e n im Polarbündel heiſsen zwei solche Ebenen durch $\mathfrak{B}$, welche konjugierte Ebenen in derjenigen Ebeneninvolution sind, deren Axe die Schnittlinie beider Ebenen ist, oder auch: zwei solche Ebenen, deren jede durch den Polarstrahl der andern geht.

Konjugierte Strahlen und Ebenen im Polarbündel bieten mehrere bemerkenswerte Sätze dar:

Wenn wir in einer beliebigen durch $\mathfrak{B}$ gelegten Ebene ε einen veränderlichen Strahl x bewegen, so ist das von ihm beschriebene Strahlenbüschel projektivisch mit dem Ebenenbüschel, welches die Polarebene ξ des Strahles x beschreibt; möge diese Polarebene ξ irgend eine zweite durch $\mathfrak{B}$ gelegte Ebene ε' in dem Strahle x' schneiden, so sind x und x' kon-

jugierte Strahlen im Polarbündel und beschreiben in den Ebenen ε und ε' zwei projektivische Strahlenbüschel. Dem Schnittstrahl $|\varepsilon\varepsilon'|$ entspricht, weil er in beiden Ebenen liegt, je einmal ein konjugierter Strahl in jeder der beiden Ebenen und die Ebene τ, welche diese beiden Strahlen verbindet, mufs die Polarebene des Strahles $|\varepsilon\varepsilon'|$ sein, weil sie zwei zu ihm konjugierte Strahlen enthält. Wir wissen aber (§ 7), dafs in der Ebene τ allemal die Schnittlinie:

$$|xy',\ x'y|$$

liegen mufs, wo xx' und yy' irgend zwei Paare konjugierter Strahlen in den Ebenen ε und ε' bedeuten; folglich liegt der Schnittstrahl $|xy',\ x'y|$ in der Polarebene des Schnittstrahls $|xy,\ x'y'|$, d. h. diese beiden Strahlen sind ebenfalls konjugierte. Wir haben also folgenden Satz:

Wenn im Polarbündel ($\mathfrak{B}$) irgend zwei Paare konjugierter Strahlen xx' und yy' sind, so sind die Strahlen

$$|xy',\ x'y| \quad \text{und} \quad |xy,\ x'y'|$$

allemal ein drittes Paar konjugierter Strahlen.

Und in gleicher Weise gilt der polar-gegenüberstehende Satz:

Wenn im Polarbündel ($\mathfrak{B}$) irgend zwei Paare konjugierter Ebenen $\xi\xi'$ und $\eta\eta'$ sind, so sind die Verbindungsebenen:

$$[\xi\eta',\ \xi'\eta] \quad \text{und} \quad [\xi\eta,\ \xi'\eta']$$

allemal ein drittes Paar konjugierter Ebenen.

Wenn wir irgend zwei konjugierte Strahlen xx' im Polarbündel durch eine Ebene verbinden und von derselben den Polarstrahl x'' nehmen, so ist offenbar nicht blofs x'' der Polarstrahl der Ebene $[xx']$, sondern auch x der Polarstrahl der Ebene $[x'x'']$ und x' der Polarstrahl der Ebene $[xx'']$; es ist also jeder der drei Strahlen $xx'x''$ der Polarstrahl der die beiden übrigen verbindenden (gegenüberliegenden) Ebene, und zugleich jede der drei Ebenen $[xx']$, $[xx'']$, $[x'x'']$ die Polarebene des dritten (gegenüberliegenden) Strahles. Ein solches Tripel von Strahlen und gleichzeitig Ebenen nennt man ein Polardreikant und gleichzeitig Polardreiflach im Polarbündel.

Ist einer von drei Strahlen eines Polardreikants ein elliptischer, so müssen nach dem Vorigen die beiden durch ihn gehenden Ebenen, also auch die beiden übrigen Strahlen des Polardreikants hyperbolische sein; ist dagegen einer der drei Strahlen eines Polardreikants hyperbolisch, so muſs die ihm gegenüberliegende Ebene auch eine hyperbolische sein, und da die beiden in ihr liegenden konjugierten Strahlen des Polardreikants durch die Asymptoten harmonisch getrennt werden, so muſs einer derselben ein elliptischer, der andere ein hyperbolischer sein; wir haben also wie im vorigen Fall dasselbe Ergebnis:

Von den drei Strahlen eines Polardreikants (und den drei Ebenen eines Polardreiflachs) ist immer einer (eine) elliptisch und die beiden anderen hyperbolisch.

Nehmen wir zwei beliebige Paare konjugierter Strahlen:

$$xx' \quad \text{und} \quad yy'$$

und seien die Polarstrahlen der Ebenen $[xx']$ und $[yy']$ durch x'' und y'' bezeichnet, dann haben wir zwei Polardreikante:

$$xx'x'' \quad \text{und} \quad yy'y'';$$

da nun nach dem vorigen Satze die beiden Strahlen

$$|xy', x'y| \quad \text{und} \quad |xy, x'y'|$$

auch konjugierte Strahlen sein müssen, also der eine in der Polarebene des andern liegen muſs und die Polarebene des ersteren die Verbindungsebene der beiden Strahlen:

$$|x'x'', yy''| \quad \text{und} \quad |xx'', y'y''| \quad \text{ist},$$

so müssen die drei Strahlen:

$$|xy, x'y'|, \quad |xx'', y'y''|, \quad |x'x'', yy''|$$

in einer Ebene liegen; diese sind aber die Durchschnittslinien der gegenüberstehenden Seitenflächen eines einfachen Sechskants:

$$x' \; x'' \; x \; y \; y'' \; y',$$

dessen sechs Kanten infolge der Umkehrung des Pascalschen Satzes auf einem Kegel liegen müssen; wir erhalten also den Satz:

Die sechs Strahlen zweier Polardreikante im Polarbündel sind allemal sechs Strahlen eines Kegels, und ebenso den polaren Satz:

Die sechs Ebenen zweier Polardreiflache im Polarbündel sind allemal sechs Berührungsebenen eines Kegels.

Eine weitere Folge des obigen Satzes liefert eine Beziehung zwischen irgend einem Dreikant und seinem Polardreiflach.

Seien drei beliebige durch den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ eines Polarbündels gezogene Strahlen $x\ y\ z$ und ihre drei Polarebenen $\xi\ \eta\ \zeta$; bezeichnen wir die Schnittlinien:

$$|\eta\zeta| = x', \quad |\zeta\xi| = y', \quad |\xi\eta| = z',$$

Dann sind offenbar x' und y ein Paar konjugierter Strahlen und ebenso auch y' und x, mithin nach dem vorigen Satze auch

$$|xy,\ x'y'| \quad \text{und} \quad |xx',\ yy'|$$

ein drittes Paar konjugierter Strahlen; nun ist aber $[x'y'] = \zeta$ die Polarebene von z und $[xy]$ die Polarebene von $|\xi\eta| = z'$, also der Strahl $|xy,\ x'y'|$ der Polarstrahl der Ebene $[zz']$, in in welcher notwendig der zweite Strahl $|xx',\ yy'|$ liegen muss, d. h.

Die drei Ebenen $[xx']$, $[yy']$, $[zz']$ schneiden sich in einem Strahle und daher gilt der Satz:

Im Polarbündel liegen ein beliebiges Dreikant und seine Polarfigur perspektivisch d. h.

Sind $x\ y\ z$ drei beliebige Strahlen im Polarbündel und ihre Polarebenen $\xi\ \eta\ \zeta$, und bezeichnen wir die Schnittlinien:

$$|\eta\zeta| = x', \quad |\zeta\xi| = y', \quad |\xi\eta| = z'$$

und die Verbindungsebenen:

$$[yz] = \xi', \quad [zx] = \eta', \quad [xy] = \zeta',$$

so schneiden sich sowohl $[xx']$, $[yy']$, $[zz']$ in einem Strahle, als auch liegen $|\xi\xi'|$, $|\eta\eta'|$, $|\zeta\zeta'|$ in einer Ebene und diese ist die Polarebene des vorigen Strahls.

Zu den Kegelstrahlen (parabolischen Strahlen des Polarbündels) steht ein beliebiges Polardreikant in eigentümlicher Beziehung, die wir noch hervorheben wollen:

Seien $x\ y\ z$ die drei Kanten eines Polardreikants im Polarbündel (oder in Bezug auf den Kegel), und wird durch einen Polarstrahl x eine solche Ebene gelegt, welche den Kegel in zwei reellen Strahlen b und c schneidet; möge ferner

die Ebene $[cy]$ dem Kegel in dem zweiten Kegelstrahl a begegnen, dann mufs die Ebene $[yz]$, als Polarebene von x durch den vierten harmonischen Strahl x' gehen, so dafs

$$(bcxx') = -1$$

ist und ebenso mufs die Ebene $[xz]$, als Polarebene von y, durch den vierten harmonischen Strahl y' gehen, so dafs

$$(cayy') = -1$$

ist; aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(cbxx') = (cay'y)$$

folgt die Projektivität und aus der Koinzidenz von c die perspektivische Lage der beiden ebenen Strahlenbüschel, so dafs also die drei Ebenen:

$$[ab], \quad [xy'], \quad [x'y]$$

sich in einem Strahle schneiden müssen; die Ebene $[xy']$ ist aber identisch mit $[xz]$ und die Ebene $[yx']$ identisch mit $[yz]$, also die Schnittlinie $|xy', x'y| = z$ und daher mufs $[ab]$ durch z gehen; die drei Flächen des Dreikants abc gehen also durch die drei Strahlen xyz des Polardreikants; $[bc]$ durch x, $[ca]$ durch y, $[ab]$ durch z.

Durch Veränderung der ersten durch x gelegten Ebene erhalten wir unendlich viele dem Kegel einbeschriebene Dreiflache, deren Ebenen durch die drei Kanten eines gegebenen Polardreikants gehen.

Halten wir andererseits in der Figur den Strahl c und den Strahl z fest, verändern aber das Paar konjugierter Strahlen x und y in der fest bleibenden Polarebene von z, welches die dieser Ebene zugehörige Strahleninvolution erzeugt, so werden die Ebenen $[cx]$ und $[cy]$ eine Ebeneninvolution erzeugen, und während die Kegelstrahlen a und b sich verändern, wird die Verbindungsebene $[ab]$ durch den festen Strahl z laufen. Wir erhalten hierdurch folgenden Satz:

Wenn man irgend einen Kegelstrahl (c) mit den Strahlenpaaren der einer beliebigen Ebene im Polarbündel zugehörigen Strahleninvolution durch Ebenenpaare verbindet, so durchschneiden dieselben den Kegel zum andern Male in Strahlenpaaren (ab), deren Verbindungsebene durch einen

festen Strahl läuft, den Polarstrahl der ebenen Strahleninvolution.

Oder umgekehrt:

Wenn man einen beliebigen Kegelstrahl zur Axe einer Ebeneninvolution wählt, so durchbohren die Ebenenpaare derselben den Kegel zum andern Male in Strahlenpaaren, deren Verbindungsebene durch einen festen Strahl läuft, welcher ein elliptischer oder hyperbolischer Strahl ist, je nachdem die gegebene Ebeneninvolution elliptisch oder hyperbolisch ist.

Wir unterdrücken die weitere Umkehrung dieses Satzes, sowie die Aussprache des polaren Nebensatzes.

In dem Vorstehenden sind die hauptsächlichsten allgemeinen Eigenschaften des Polarbündels abgeleitet aus der Konstruktion desselben vermittelst der Elemente der projektivischen Gebilde, welche den Kegel erzeugen, der die parabolischen Elemente des Polarbündels enthält. Wir können aber auch das Polarbündel konstruieren durch gewisse Bestimmungsstücke aus seinen eigenen Elementen, nämlich: Polarstrahlen und Polarebenen, konjugierte Strahlen und konjugierte Ebenen, Polardreikante und Polardreiflache, unabhängig davon, ob das Polarbündel parabolische Elemente enthält oder nicht. In der That führen solche Konstruktionen (vgl. Th. d. K. § 58) auch zu Polarbündeln, welche kein einziges parabolisches Element besitzen. In diesem Falle sagen wir, der Kegel sei imaginär und in dem Polarbündel haben wir ein reelles Gebilde als Vertreter des imaginären Kegels. Alle übrigen Eigenschaften des Polarbündels bleiben unverändert bestehen, nur diejenigen hören auf, welche sich auf die parabolischen Elemente (Kegelstrahlen und Berührungsebenen) beziehen. Sämtliche Strahlen- und Ebeneninvolutionen in einem solchen Polarbündel sind natürlich elliptische, und ein solches Polarbündel heifst daher ein elliptisches, gegenüber dem hyperbolischen, dessen Kegel der Kern des Polarbündels genannt wird.

Der elliptische oder hyperbolische Charakter des Polarbündels wird am einfachsten erkannt aus den Involutionen zweier konjugierter Strahlen oder Ebenen:

1) Sind irgend zwei konjugierte Strahlen im Polarbündel die Axen zweier zugehöriger elliptischer Ebeneninvolutionen, so sind sämtliche Ebenen- und Strahleninvolutionen, die im Polarbündel vorkommen, elliptisch; das Polarbündel ist ein elliptisches und besitzt keinen reellen Kernkegel.

2) Wenn dagegen von den Ebeneninvolutionen, welche zweien konjugierten Strahlen im Polarbündel zugehören, nur eine (oder beide) hyperbolisch sind, so ist das Polarbündel ein hyperbolisches und hat einen reellen Kernkegel. Die Involutionen zerfallen, wie wir gesehen haben, in hyperbolische und elliptische, welche durch die parabolischen (Kegelstrahlen und Berührungsebenen) von einander getrennt werden.

Nehmen wir im Falle 1) zwei beliebige konjugierte Ebenen des Polarbündels und die ihnen zugehörigen Strahleninvolutionen als elliptisch an; sei a die Schnittlinie der beiden Träger, b und c die dem a konjugierten Strahlen in den beiden Strahleninvolutionen, so daſs also abc ein Polardreikant im Bündel ist. Schneidet endlich eine beliebige Ebene ε, die durch den Mittelpunkt des Bündels gelegt wird, die Ebenen

$$[ab], \quad [bc], \quad [ca]$$

in den Strahlen

$$z, \quad x, \quad y,$$

so werden in den beiden konjugierten Ebenen $[ab]$ und $[ac]$ die zu z und y konjugierten Strahlen z' und y' der Annahme gemäſs so liegen müssen, daſs sowohl die Strahlenpaare ab und zz', als auch die Strahlenpaare ac und yy' einander trennen. Nun ist aber von y die Polarebene offenbar $[by']$ und von z die Polarebene $[cz']$; schneiden sich daher

$$[by', cz'] = s$$

in dem Strahle s, so ist s der Polarstrahl zur Ebene ε.

Nun ist bekanntlich der Wert eines Doppelverhältnisses negativ oder positiv, je nachdem das eine Paar zugeordneter Elemente durch das andere Paar getrennt wird oder nicht; folglich sind unserer Annahme gemäſs die Doppelverhältnisse:

$$s[abcz] \text{ negativ},$$
$$s[acby] \text{ negativ}.$$

Wenn aber $s[abcz]$ negativ ist, so mufs $s[aczb]$ positiv sein, und weil das Produkt:

$$s[aczb]\,.\,s[acby] = s[aczy]$$

den ersten Faktor links positiv, den zweiten negativ hat, so ist es negativ. Da also das Doppelverhältnis:

$$s[aczy]$$

negativ ist, so mufs $s[aycz]$ positiv sein, oder, was dasselbe ist $s[czay]$ positiv; nun ist aber der Voraussetzung nach $s[czba]$ negativ, also das Produkt:

$$s[czba]\,.\,s[czay] = s[czby]$$

negativ und hieraus folgt, dafs das Ebenenpaar $[sc]$, $[sz]$ durch das Ebenenpaar $[sb]$, $[sy]$ getrennt werden mufs. Die dem Strahl s im Polarbündel zugehörige Ebeneninvolution ist also notwendig eine elliptische, ebenso wie die der Ebene ε zugehörige Strahleninvolution, welche mit der Ebeneninvolution perspektivisch liegt. Da nun die Ebene ε ganz willkürlich im Polarbündel angenommen war, so enthalten sämtliche Ebenen und also auch sämtliche Strahlen des Polarbündels in diesem Falle elliptische Involutionen. Die einzige Ausnahme, bei welcher der von uns geführte Nachweis illusorisch wird, macht die Ebene $[bc]$ und ihr Polarstrahl a; denn sobald die willkürliche Ebene ε in die Lage von $[bc]$ rückt, geht s nach a und die vorige Betrachtung läfst uns im Stich. Wir können aber auch für die Ebene $[bc]$ den elliptischen Charakter auf folgende Art nachweisen:

Die dem Strahle s zugehörige Ebeneninvolution ist, wie wir nachgewiesen haben, eine elliptische, und wir kennen von ihr drei Paare konjugierter Ebenen, nämlich:

$$[sb],\ [sy], \qquad [sc],\ [sz] \qquad \text{und} \qquad [sa],\ [sx],$$

von denen jedes Paar ein anderes trennen mufs.

Da nun das Doppelverhältnis $s[acby]$ der Annahme nach negativ ist, so mufs $s[abcy]$ positiv sein; da ferner $s[axby]$ negativ ist, so mufs auch $s[abxy]$ positiv sein, folglich auch das Produkt:

$$s[abcy]\,.\,s[abyx] = s[abcx]$$

positiv d. h. $s[abcx]$ ist positiv.

Zweitens haben wir der Annahme nach $s[abcz]$ negativ,

folglich $s[acbz]$ positiv, ferner $s[axcz]$ negativ, also $s[acxz]$ positiv, mithin auch das Produkt:

$$s[acbz] \cdot s[aczx] = s[acbx]$$

positiv, d. h. $s[acbx]$ ist positiv.

Weil aber $s[abcx]$ und $s[acbx]$ beide positiv sind und zusammen 1 geben, so muſs der Wert eines jeden von beiden unter 1 liegen, folglich muſs das Doppelverhältnis

$$s[bcax]$$

negativ sein, d. h. die Ebene $[sb]$ und $[sc]$ werden durch die Ebenen $[sa]$ und $[sx]$ getrennt; mithin werden auch die Ebenen $[ab]$ und $[ac]$ durch die Ebenen $[as]$ und $[ax]$ getrennt, also ist die Ebeneninvolution des Strahles a eine elliptische d. h. die drei Strahlen des Polarbündels abc also auch die drei Ebenen $[bc]$, $[ca]$, $[ba]$ sind sämtlich elliptischen Charakters.

In dem andern Falle 2) aber, sobald nur irgend ein hyperbolischer Strahl oder eine hyperbolische Ebene im Polarbündel vorkommen, giebt es natürlich parabolische Elemente, also einen reellen Kernkegel.

Ein besonders einfacher Fall von Polarbündeln elliptischen Charakters ist das orthogonale Polarbündel; wir verstehen darunter sämtliche Strahlen x und die darauf rechtwinkligen Ebenen $\mathfrak{x}$ als Polarstrahlen und Polarebenen durch den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Bündels gelegt. Dieses Gebilde erfüllt, wie unmittelbar ersichtlich, alle Bedingungen des Polarbündels, indem alle Strahlen- und Ebeneninvolutionen orthogonale werden, und die projektivische Beziehung in Gleichheit übergeht; auch ist ersichtlich, daſs das orthogonale Polarbündel keine parabolischen Elemente d. h. keinen reellen Kernkegel haben kann.

Suchen wir den Durchschnitt dieses besonderen (orthogonalen) Polarbündels mit der unendlich-entfernten Ebene ε_∞ auf, so haben wir in derselben ein ebenes elliptisches Polarsystem mit imaginärer Kernkurve und erkennen zugleich welchen besonderen Charakters dieser imaginäre Kegelschnitt sein muſs. Irgend eine Ebene, durch den Mittelpunkt des Polarbündels gelegt, schneidet nämlich aus demselben eine orthogonale (cirkulare) Strahleninvolution aus, deren imaginäre Doppelstrahlen nach den beiden unendlich-entfernten imagi-

nären Kreispunkten hingehen (Th. d. K. S. 78, 162), durch welche, unserer Auffassung nach, sämtliche Kreise der Ebene hindurchgehen. Denken wir uns demgemäfs um den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Polarbündels eine beliebige Kugel gelegt, so schneidet dieselbe ε_∞ in allen denjenigen imaginären Punkten, welche als imaginäre Kreispunkte auf irgend einer Ebene, die ε_∞ in einer unendlich-entfernten Geraden schneidet, aufzufassen sind. Da aber eine Ebene eine Kugel im allgemeinen in einem Kreise schneidet, so halten wir dies konsequent auch für den imaginären Schnitt mit ε_∞ fest und sprechen von dem imaginären Kreise in der unendlich-entfernten Ebene; durch ihn gehen sämtliche Kugeln, die irgendwie im Raume liegend angenommen werden, und wir haben ihn als einen unveränderlichen ein für alle Mal gegebenen aufzufassen, der durch keine Verschiebung des Raumes geändert wird. Das orthogonale Polarbündel hat einen imaginären Kernkegel, dessen Strahlen von dem Mittelpunkte $\mathfrak{B}$ des Bündels nach dem imaginären Kreise der unendlich-entfernten Ebene hingehen. Jedes irgendwie im Raume gestellte orthogonale Polarbündel schneidet aber ε_∞ immer in demselben ebenen Polarsystem, folglich bleibt auch der imaginäre Kreis in ε_∞ immer derselbe, und alle Kugeln im Raume müssen durch ihn gehen.

§ 9. Die Hauptaxen und Hauptebenen des Polarbündels.

Bei dem zuletzt betrachteten orthogonalen Polarbündel fanden wir sämtliche Polardreikante als Tripel rechtwinkliger Strahlen; es drängt sich daher die Frage auf, ob in dem allgemeinen, beliebig gegebenen Polarbündel auch solche rechtwinklige Polardreikante vorkommen. Unmittelbar leuchtet ein, dafs höchstens ein solches Tripel von Strahlen vorkommen kann im allgemeinen Polarbündel; denn kämen zwei vor, so wäre dasselbe dadurch schon mehr als bestimmt und zeigte sich als orthogonales Polarbündel. Ob aber wirklich und immer ein rechtwinkliges Dreikant als Polardreikant im Bündel vorhanden ist, erfahren wir durch Beantwortung der Frage:

Giebt es im Polarbündel einen Strahl, dessen Polarebene zu ihm rechtwinklig ist?

Legen wir durch den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des gegebenen Polarbündels einen beliebigen Strahl x, suchen dessen Polarebene ξ auf und zugleich seine Normalebene ξ_1 (d. h. diejenige Ebene, welche auf x rechtwinklig steht), so schneiden sich die Ebenen $\xi\xi_1$ in einem Strahle

$$s = |\xi\xi_1|;$$

x und s sind der Konstruktion zufolge konjugierte Strahlen im Polarbündel und rechtwinklig zu einander, weil s in der Normalebene von x liegt. Verändern wir jetzt den Strahl x in einer beliebigen durch $\mathfrak{B}$ gelegten Ebene ε, so verändert sich auch ξ und beschreibt auf Grund des Polarbündels ein Ebenenbüschel $[l]$, welches projektivisch ist mit dem Strahlenbüschel $|x|$; l ist der Polarstrahl der Ebene ε. Es verändert sich aber auch ξ_1 und beschreibt ein Ebenenbüschel $[l_1]$, welches projektivisch-gleich ist mit dem Strahlenbüschel $|x|$; l_1 ist die Normale der Ebene ε. Die beiden Ebenenbüschel

$$l[\xi] \quad \text{und} \quad l_1[\xi_1]$$

sind daher unter einander projektivisch und erzeugen einen Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}$. Alle Strahlen $s = |\xi\xi_1|$ dieses Kegels besitzen also die verlangte Eigenschaft, rechtwinklige konjugierte Strahlen zu sein zu dem jedesmaligen x.

Legen wir jetzt eine zweite Ebene ε' durch $\mathfrak{B}$ und drehen in ihr einen veränderlichen Strahl x' und wiederholen die vorige Konstruktion, so erhalten wir einen zweiten Kegel, dessen Strahlen s' dieselbe Eigenschaft haben, wie die vorigen Strahlen s.

Die beiden Kegel haben nun von vorn herein einen gemeinschaftlichen Strahl s_0, der leicht zu ermitteln ist. Die beiden Ebenen ε und ε' schneiden sich nämlich in einem Strahle x_0, dessen Polarebene und Normalebene sich in s_0 schneiden. Für diesen besonderen Strahl s_0, der beiden Kegeln gemeinschaftlich ist, fallen also die Strahlen x_0 und x_0' zusammen. Außerdem schneiden sich aber die beiden Kegel im allgemeinen noch in drei andern Strahlen $s_1\, s_2\, s_3$ (Th. d. K. § 54), deren jeder die Eigenschaft haben muſs, daſs es für ihn zwei verschiedene zu ihm rechtwinklige und zugleich konjugierte Strahlen x und x' geben muſs; die Ebene, welche beide verbindet, muſs also seine Polarebene

sein und zugleich auf ihm rechtwinklig stehen. Die vorgelegte Aufgabe läſst daher im allgemeinen drei und nur drei Auflösungen zu.

Von diesen drei Auflösungen muſs wenigstens eine (s. a. a. O.) immer reell sein; sei dieser reelle Strahl s_1 und seine zu ihm rechtwinklige Polarebene σ_1, dann ist diese der Träger einer Strahleninvolution im Polarbündel, welche immer zwei reelle rechtwinklige konjugierte Strahlen (Axen) hat; diese sind nichts anderes, als die beiden übrigen gesuchten Strahlen s_2 und s_3, denn offenbar ist s_2 der Polarstrahl der Ebene $[s_1 s_3]$ und auf ihr rechtwinklig und ebenso s_3 der Polarstrahl der Ebene $[s_1 s_2]$ und auf ihr rechtwinklig; da es aber nicht mehr als drei solcher rechtwinkliger Paare geben kann, so sind dies die gesuchten; die drei Strahlen

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3$$

und die drei Ebenen

$$\sigma_1 = [s_2 s_3], \quad \sigma_2 = [s_3 s_1], \quad \sigma_3 = [s_1 s_2]$$

bilden zugleich, wie wir sehen, ein Polardreikant und Polardreiflach im Bündel. Also:

Es giebt im Polarbündel immer drei reelle Strahlen, deren Polarebenen zu ihnen rechtwinklig sind; jene sind selbst zu einander rechtwinklig (bilden ein rechtwinkliges Dreikant), und diese sind die Ebenen, welche je zwei von ihnen verbinden. Die Strahlen und Ebenen dieses rechtwinkligen Polardreikants und Polardreiflachs im Bündel heiſsen die Hauptaxen und Hauptebenen desselben.

Jede der Hauptebenen ist der Träger einer Strahleninvolution, jede der Hauptaxen die Axe einer Ebeneninvolution im Polarbündel. Aus unserer frühern Untersuchung über die Art dieser Involutionen bei jedem Polar-Dreikant oder -Dreiflach folgt in dem Falle des elliptischen Polarbündels (mit imaginärem Kernkegel), daſs sämtliche Involutionen elliptisch sind, dagegen beim hyperbolischen Polarbündel (mit reellem Kernkegel):

Von den drei Hauptebenen des Kegels schneiden zwei denselben in reellen Linienpaaren, die dritte nicht (in einem imaginären Linienpaar); von

den drei Hauptaxen ist eine elliptisch (liegt im inneren Raume des Kegels, welcher von keiner Berührungsebene getroffen wird), die beiden andern sind hyperbolisch (die Schnittlinien von Paaren reeller Berührungsebenen des Kegels).

Dasselbe Resultat folgt auch aus einer Beziehung zwischen den Potenzen der drei Strahleninvolutionen, welche in den Hauptebenen des Polarbündels liegen. Bezeichnen wir nämlich abweichend von der früher gewählten Bezeichnung die drei Hauptaxen durch:

$$a, \quad b, \quad c$$

und die drei Hauptebenen durch:

$$\alpha = [bc],$$
$$\beta = [ca],$$
$$\gamma = [ab];$$

seien die Potenzen der Strahleninvolutionen in den drei Hauptebenen P_{bc}, P_{ca}, P_{ab} d. h. indem wir irgend ein Paar konjugierter Strahlen in der $[bc]$-Ebene durch xx', in der $[ca]$-Ebene durch yy', in der $[ab]$-Ebene durch zz' bezeichnen:

$$P_{bc} = \operatorname{tg}(bx) \cdot \operatorname{tg}(bx') = \frac{1}{\operatorname{tg}(cx) \cdot \operatorname{tg}(cx')} = \frac{1}{P_{cb}},$$

$$P_{ca} = \operatorname{tg}(cy) \cdot \operatorname{tg}(cy') = \frac{1}{\operatorname{tg}(ay) \cdot \operatorname{tg}(ay')} = \frac{1}{P_{ac}},$$

$$P_{ab} = \operatorname{tg}(az) \cdot \operatorname{tg}(az') = \frac{1}{\operatorname{tg}(bz) \cdot \operatorname{tg}(bz')} = \frac{1}{P_{ba}}.$$

Denken wir uns nun irgend eine Ebene rechtwinklig zur a-Axe, also parallel zur $[bc]$-Ebene gelegt in der Entfernung r vom Mittelpunkte $\mathfrak{B}$ des Bündels, so wird die Durchschnittsfigur ein ebenes Polarsystem sein, dessen Mittelpunkt in dem Durchschnittspunkt mit der a-Axe liegt, und dessen Hauptaxen die Schnittlinien mit der $[ac]$-Ebene und $[ab]$-Ebene sind. Die Strahleninvolution der konjugierten Durchmesser dieses ebenen Polarsystems wird parallel und gleich sein der Strahleninvolution in der $[bc]$-Ebene unseres Bündels, also die Potenz dieser Involution ist P_{bc}; nun läſst sich diese leicht ausdrücken durch die Potenzen auf den beiden Hauptaxen des ebenen Polarsystems; sie ist nämlich gleich dem negativen Quotienten

dieser beiden Potenzen der Punktinvolutionen auf den Hauptaxen*) und diese sind:

$$r^2 \,.\, \mathrm{tg}\,(az) \,.\, \mathrm{tg}\,(az') = r^2 P_{ab},$$

$$r^2 \,.\, \mathrm{tg}\,(ay) \,.\, \mathrm{tg}\,(ay') = \frac{r^2}{P_{ca}}.$$

Der negative Quotient ist also:

$$-\frac{r^2}{P_{ca}} \cdot \frac{1}{r^2 . P_{ab}} = P_{bc},$$

oder:

$$P_{bc} \,.\, P_{ca} \,.\, P_{ab} = -1.$$

Da das Produkt der drei Potenzen dieser Strahleninvolutionen in den drei Hauptebenen gleich — 1 ist, so müssen entweder alle drei elliptisch oder zwei hyperbolisch und eine elliptisch sein, wie oben gefunden wurde.

Für den Fall des reellen Kegels sei a die elliptische Axe desselben, durch welche die beiden hyperbolischen Hauptebenen gehen; jede derselben enthält zwei reelle Strahlenpaare des Kegels, und die Halbierungslinien der Winkel jedes Strahlenpaars sind die Hauptaxen des Kegels; die Potenzen P_{ab} und P_{ac} werden also die Quadrate der Tangenten der halben Winkel, welche die Kegelstrahlen in der $[ab]$- und $[ac]$-Ebene bilden, (die man auch Kegelöffnung zu nennen pflegt.) Die obige Relation liefert die Potenz der Strahleninvolution in der dritten (elliptischen) Hauptebene, ausgedrückt durch die beiden Kegelöffnungen.

*) Siehe Th. d. K. S. 452. Bei der Bestimmung der Hauptaxen des ebenen Polarsystems wurde gefunden:

$$Mx \,.\, Mx' = P_a \quad \text{und} \quad M\xi \,.\, M\xi' = P_b,$$

es sind aber die Verhältnisse:

$$\frac{M\xi}{Mx} = \pm\, \mathrm{tg}(a\mathfrak{B}), \qquad \frac{M\xi'}{Mx'} = \pm\, \mathrm{tg}\,(a\mathfrak{A}),$$

und $\mathrm{tg}\,(a\mathfrak{B}) \,.\, \mathrm{tg}\,(a\mathfrak{A})$ ist die Potenz der Strahleninvolution der konjugierten Durchmesser, welche wir mit P_M bezeichnen wollen. Das Vorzeichen in dem Ausdruck:

$$P_M = \pm \frac{P_b}{P_a}$$

bestimmt sich leicht daraus, daſs für entgegengesetzte Werte von P_a und P_b die Strahleninvolution der konjugierten Durchmesser hyperbolisch, für gleichartige dagegen elliptisch werden muſs; also gilt nur das untere Zeichen.

Vermittelst der Hauptaxen und Hauptebenen des Kegels können wir uns leicht eine anschauliche Vorstellung von der Gestalt der Kegeloberfläche machen; denn sei a die elliptische Kegelaxe, also die $[bc]$-Ebene die elliptische Hauptebene, und drehen wir um a eine veränderliche Ebene, so mufs dieselbe allemal zwei reelle Kegelstrahlen ausschneiden, und diese sind die Asymptoten der Strahleninvolution, von welcher die Axe a und die Schnittlinie mit der $[bc]$-Ebene ein Paar konjugierter Strahlen sind; da aber letztere immer rechtwinklig auf einander bleiben, so sind sie für jede dieser Strahleninvolutionen die Axen und halbieren also allemal die Winkel zwischen den Asymptoten und hieraus folgt:

Die Kegelstrahlen liegen paarweise symmetrisch in jeder durch eine der Hauptaxen gelegten Ebene zu dieser Hauptaxe.

Hieraus folgt auch, dafs die Kegelstrahlen symmetrisch liegen zu der $[bc]$-Ebene, der Normalebene des Strahls a, und demnach teilt auch jede der drei Hauptebenen den Kegel in symmetrische Hälften. Ebenso folgt, dafs jede Ebene, welche zu einer der drei Hauptaxen normal gestellt wird, den Kegel in einem Kegelschnitt schneidet, für welchen der Schnittpunkt mit jener Axe der Mittelpunkt und die Schnittlinien mit den beiden durch diese Axe gehenden Hauptebenen die Hauptaxen der Durchschnittsfigur sind. Wenn wir also zur elliptischen Hauptaxe des Kegels eine rechtwinklige Ebene legen, so schneidet dieselbe den Kegel in einer Ellipse, deren beide Axen gegeben sind, und die Kegeloberfläche entsteht durch die Bewegung eines Strahls, welcher sich um einen Punkt, der senkrecht über dem Mittelpunkt der Ellipse liegt, dreht und sich an den Umring der Ellipse anlehnt.

§ 10. Die Brennstrahlen und Kreisebenen des Polarbündels (Kegels).

Eine Frage von besonderer Wichtigkeit beim Polarbündel, mag dasselbe einen reellen oder imaginären Kernkegel haben, ist die nach solchen Ebenen- und Strahleninvolutionen, welche orthogonal sind, d. h. die Doppelfrage:

Giebt es Strahlen im Polarbündel, deren zugehörige Ebeneninvolution eine orthogonale ist, und wie findet man dieselben?	Giebt es im Polarbündel Ebenen, deren zugehörige Strahleninvolution eine orthogonale ist, und wie findet man dieselben?

Von diesen beiden Fragen ist die eine auf die andere zurückzuführen. Denken wir uns nämlich in dem gegebenen Polarbündel $\mathfrak{B}$ zu jedem Strahle x die Normalebene $\mathfrak{x}'$ und zu der entsprechenden Polarebene $\mathfrak{x}$ den Normalstrahl x' gezogen, so bestimmen die Elementenpaare x' und $\mathfrak{x}'$ ein neues Polarbündel, welches wir das reziproke nennen wollen; denn es ist leicht zu erkennen, dafs die Paare x' und $\mathfrak{x}'$ alle notwendigen Bedingungen eines Polarbündels erfüllen. Ist das gegebene Polarbündel ein hyperbolisches mit reellem Kernkegel, so ist auch das reziproke Polarbündel ein hyberbolisches, und die Berührungsebenen seines Kernkegels sind die Normalebenen zu den entsprechenden Strahlen des Kernkegels im gegebenen Polarbündel; ebenso die Strahlen des Kernkegels im reziproken Polarbündel die Normalen auf den entsprechenden Berührungsebenen des Kernkegels im gegebenen Polarbündel. Ist nun in dem gegebenen Polarbündel ein Strahl von der verlangten Beschaffenheit gefunden, so wird die Normalebene desselben eine Ebene der verlangten Beschaffenheit für das reziproke Polarbündel sein und umgekehrt. Wenn wir daher die beiden obigen Fragen betrachten, so liefert die Antwort der Frage links für das gegebene Polarbündel zugleich die Antwort der Frage rechts für das reziproke Polarbündel und umgekehrt.

Die eine Frage ist also auf die andere zurückgeführt. Jede der beiden einander gegenüberstehenden Fragen ist in ganz gleicher Weise selbständig zu beantworten, wie aus der dualen Natur des Polarbündels hervorgeht; wir werden daher nur eine der beiden Fragen beantworten und die erlangten Resultate in bekannter Weise übertragen.

Um eine solche Ebene im Polarbündel zu ermitteln, deren zugehörige Strahleninvolution eine orthogonale ist d. h. aus Paaren rechtwinkliger Strahlen besteht, bemerken wir zuerst, dafs diese Ebene notwendig durch eine der drei Hauptaxen des Polarbündels gehen mufs. Denn ginge die gesuchte Ebene

nicht durch eine der Hauptaxen (z. B. nicht durch die a-Axe), so würde sie die $[bc]$-Ebene in einem Strahle s schneiden, dessen Polarebene σ sowohl durch den zu s rechtwinkligen Strahl t in ihrer Ebene, als auch durch a gehen müſste; folglich müſste die Polarebene σ des Strahles s auf demselben rechtwinklig stehen, d. h. ein viertes Paar von zu einander rechtwinkligen Polarstrahlen und Polarebenen sein; das Polarbündel selbst würde also den partikularen Charakter haben, daſs die $[bc]$-Hauptebene eine orthogonale Strahleninvolution enthielte, was bei einem gegebenen Polarbündel im allgemeinen nicht der Fall sein wird. Wir haben daher eine Ebene von der verlangten Beschaffenheit nur unter denjenigen Ebenen zu suchen, welche durch eine der Hauptaxen des Bündels gehen.

Wir drehen nun um die a-Axe des Polarbündels eine veränderliche Ebene ξ', welche einer festen durch den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Bündels gelegten Ebene ε in dem Strahle x begegne, der ein ebenes Strahlenbüschel $|x|$ beschreibt. Die Polarebene ξ des Strahles x beschreibt zufolge der Natur des Polarbündels ein Ebenenbüschel, dessen Axe e der Polarstrahl der festen Ebene ε ist. Legen wir ferner noch die Normalebene zu dem veränderlichen Strahl x und bezeichnen sie durch ξ_1, so wird bei der Bewegung von x die Ebene ξ_1 sich um einen festen Strahl e_1 drehen, die Normale der Ebene e, und die drei Ebenenbüschel:

$$a[\xi'], \quad e[\xi], \quad e_1[\xi_1]$$

müssen projektivisch sein, das erste mit dem zweiten zufolge der Natur des Polarbündels, das erste mit dem dritten projektivisch-gleich; folglich sind auch die beiden Ebenenbüschel:

$$e[\xi] \quad \text{und} \quad e_1[\xi_1]$$

mit einander projektivisch, und der veränderliche Schnittstrahl $|\xi\xi_1|$ entsprechender Ebenen beschreibt daher einen Kegel, welcher offenbar auch durch die a-Axe gehen muſs; denn sobald der Strahl x in die Schnittlinie von ε mit der $[bc]$-Ebene fällt, muſs sowohl ξ als auch ξ_1 durch a gehen Wenn wir daher a mit der veränderlichen Schnittlinie $|\xi\xi_1|$ verbinden, so erhalten wir um die Axe a zwei koaxiale projektivische Ebenenbüschel, einmal das ursprüngliche $a[\xi']$ und zweitens das Ebenenbüschel, dessen Element durch die feste Axe a und die veränderliche Schnittlinie $|\xi\xi_1|$ geht.

Diese beiden koaxialen Ebenenbüschel sind nicht allein projektivisch, sondern sie liegen auch involutorisch; denn gelangt die Ebene ξ' insbesondere in die $[ab]$-Ebene, so mufs von dem Schnittstrahl der Ebene ε mit $[ab]$ sowohl die Polarebene, als auch die Normalebene durch den Strahl c gehen, also ist der zugehörige Schnittstrahl $|\xi\xi_1|$ in diesem besonderen Falle c, und gelangt andererseits die Ebene ξ' in die Lage von $[ac]$, so mufs von dem Schnittstrahl der Ebene ε mit $[ac]$ sowohl die Polarebene als auch die Normalebene durch den Strahl b gehen, also ist der zugehörige Schnittstrahl $|\xi\xi_1|$ in diesem besonderen Falle b; die Strahlen b und c entsprechen sich also in beiderlei Sinn und dadurch ist die involutorische Lage nachgewiesen. Die veränderliche Ebene ξ' und die durch den Schnittstrahl $|\xi\xi_1|$ und die feste Axe a gelegte Ebene sind also ein Paar konjugierter Ebenen einer Ebeneninvolution.

Da die Ebene ξ_1 rechtwinklig ist zu dem Strahle $x = \xi'\xi$, so wird auch der Strahl $|\xi\xi_1|$ rechtwinklig sein zu x; diese beiden Strahlen sind also konjugierte rechtwinklige in der sie verbindenden Ebene, also die Axen der Strahleninvolution, welche dieser Ebene im Polarbündel zugehört; umgekehrt giebt es in jeder beliebigen durch den Mittelpunkt des Bündels gelegten Ebene nur ein einziges bestimmtes Axenpaar st; sei dieses gefunden, und fassen wir dann die Ebene $[as]$ als unsere frühere ε auf, so mufs die Polarebene von s durch t gehen, die Normalebene aber auch, folglich wird $t = |\xi\xi_1|$ und wir können folgenden Satz aussprechen:

Wenn man im Polarbündel für jede beliebige Ebene das Axenpaar st der ihr zugehörigen Strahleninvolution ermittelt und durch eine der Hauptaxen, z. B. die a-Axe, das Ebenenpaar $[as]$ und $[at]$ legt, so gehören alle diese Paare einer bestimmten neuen Ebeneninvolution an.

Wir erhalten also die drei Hauptaxen des Polarbündels als die Axen dreier bestimmter Ebeneninvolutionen, deren Konstruktion wir kennen; diese können nun entweder elliptisch oder hyperbolisch sein; ist aber eine hyperbolisch, so fallen in eine Asymptotenebene dieser Involution zwei Ebenen $[as]$ und $[at]$ zusammen; folglich liegen in ihr zwei rechtwinklige konjugierte Strahlen st und aufserdem der Strahl a und der

Schnittstrahl der Ebene mit der $[bc]$-Ebene, welches offenbar ein zweites Paar konjugierter rechtwinkliger Strahlen ist. Daraus folgt nun, dafs diese Asymptotenebene der Träger einer im Polarbündel ihr zugehörigen orthogonalen Strahleninvolution sein mufs, weil diese zwei Paare rechtwinkliger Strahlen hat. Die Ebenen von der verlangten Beschaffenheit sind also gefunden als die Asymptotenebenen dreier bestimmter Ebeneninvolutionen, deren Axen die drei Hauptaxen des Polarbündels sind. Es kommt jetzt darauf an, zu ermitteln, ob und welche von diesen drei Ebeneninvolutionen hyperbolisch sind.

Nehmen wir zu diesem Behufe irgend ein Paar rechtwinkliger konjugierter Strahlen s und t im Polarbündel an und legen die Ebenenpaare:

$$\begin{array}{cc|cc|cc} [ab] & [ac] & [bc] & [ba] & [ca] & [cb] \\ [as] & [at] & [bs] & [bt] & [cs] & [ct], \end{array}$$

so wird zu untersuchen sein, ob in jedem dieser drei Fälle das eine Ebenenpaar durch das andere getrennt wird oder nicht.

Jede der drei Hauptaxen des Polarbündels wird durch den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ in zwei unendlich-lange Hälften geteilt, die nach entgegengesetzten Richtungen verlaufend unterschieden werden sollen durch die Bezeichnung:

$$\underset{+}{a} \text{ und } \underset{-}{a}, \quad \underset{+}{b} \text{ und } \underset{-}{b}, \quad \underset{+}{c} \text{ und } \underset{-}{c}.$$

Die Halbstrahlen teilen jede der Hauptebenen in vier Quadranten, die paarweise als Gegenquadranten auftreten und so bezeichnet werden sollen:

$$\begin{array}{cccc} \underset{+\,+}{b\,c} & \underset{-\,-}{b\,c} & \underset{+\,-}{b\,c} & \underset{-\,+}{b\,c} \\ \underset{+\,+}{c\,a} & \underset{-\,-}{c\,a} & \underset{+\,-}{c\,a} & \underset{-\,+}{c\,a} \\ \underset{+\,+}{a\,b} & \underset{-\,-}{a\,b} & \underset{+\,-}{a\,b} & \underset{-\,+}{a\,b}; \end{array}$$

endlich teilen die drei Hauptebenen den ganzen unendlichen Raum um den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Bündels in acht Oktanten, die paarweise als Gegenoktanten auftreten und so bezeichnet werden sollen:

$$\underset{+\,+\,+}{a\;b\;c}\qquad \underset{+\,+\,-}{a\;b\;c}\qquad \underset{+\,-\,+}{a\;b\;c}\qquad \underset{-\,+\,+}{a\;b\;c},$$

$$\underset{-\,-\,-}{a\;b\;c}\qquad \underset{-\,-\,+}{a\;b\;c}\qquad \underset{-\,+\,-}{a\;b\;c}\qquad \underset{+\,-\,-}{a\;b\;c}.$$

Nach dieser Bezeichnung können wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, denjenigen Oktanten, in welchen der Strahl s hineinfällt, als den Oktanten $\underset{+\,+\,+}{a\;b\;c}$ und zugleich seinen Gegenoktanten $\underset{-\,-\,-}{a\;b\;c}$ annehmen; der zu s rechtwinklige Strahl t kann alsdann nur in einem der drei übrigen Oktantenpaare liegen; wir haben also nur drei Fälle zu untersuchen:

1) s in $\underset{\substack{+\,+\,+\\-\,-\,-}}{a\;b\;c}$, t in $\underset{\substack{+\,+\,-\\-\,-\,+}}{a\;b\;c}$

2) s in $\underset{\substack{+\,+\,+\\-\,-\,-}}{a\;b\;c}$, t in $\underset{\substack{+\,-\,+\\-\,+\,-}}{a\;b\;c}$

3) s in $\underset{\substack{+\,+\,+\\-\,-\,-}}{a\;b\;c}$, t in $\underset{\substack{-\,+\,+\\+\,-\,-}}{a\;b\;c}$.

. Bestimmen wir nun die Durchschnittslinien der Ebenen $[as]$ und $[at]$ mit der Ebene $[bc]$, so erkennen wir in jedem der drei Fälle, in welchen Quadranten dieselben liegen (denn ist der Oktant $a\;b\;c$ mit irgend welchen Vorzeichen gegeben und fällt der Strahl s in denselben hinein, so kann die Ebene $[as]$ die Ebene $[bc]$ nur in einem solchen Strahle schneiden, der in denjenigen Quadranten hineinfällt, welchen die Vorzeichen von b und c bestimmen), nämlich:

$\vert as,\ bc\vert$			$\vert at,\ bc\vert$		
1) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{b\;c}$,	2) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{b\;c}$,	3) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{b\;c}$,	1) $\underset{\substack{+\,-\\-\,+}}{b\;c}$,	2) $\underset{\substack{-\,+\\+\,-}}{b\;c}$,	3) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{b\;c}$,
$\vert bs,\ ca\vert$			$\vert bt,\ ca\vert$		
1) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{c\;a}$,	2) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{c\;a}$,	3) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{c\;a}$,	1) $\underset{\substack{-\,+\\+\,-}}{c\;a}$,	2) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{c\;a}$,	3) $\underset{\substack{+\,-\\-\,+}}{c\;a}$,
$\vert cs,\ ab\vert$			$\vert ct,\ ab\vert$		
1) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{a\;b}$,	2) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{a\;b}$,	3) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{a\;b}$,	1) $\underset{\substack{+\,+\\-\,-}}{a\;b}$,	2) $\underset{\substack{+\,-\\-\,+}}{a\;b}$,	3) $\underset{\substack{-\,+\\+\,-}}{a\;b}$.

Aus dieser Tabelle ersehen wir unmittelbar, dafs in jedem der drei Fälle 1), 2), 3), welche eintreten können, immer eine der zu untersuchenden Ebeneninvolutionen hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein

müssen. Hieraus folgt, dafs von den gesuchten Ebenen immer zwei reell und die vier übrigen imaginär sein müssen. Also: es giebt durch den Mittelpunkt des Polarbündels nur zwei bestimmte reelle Ebenen, deren zugehörige Strahleninvolutionen orthogonal sind. Diese gehen durch eine der drei Hauptaxen des Bündels und sind gleich geneigt zu den beiden Hauptebenen, welche durch diese Axe gehen.

Wir nennen diese Ebenen die Kreisebenen des Polarbündels, weil jede von ihnen den Kernkegel in demjenigen imaginären Linienpaar schneidet, welches nach den imaginären Kreispunkten im Unendlichen hingeht. Hieraus folgt, dafs jede Ebene, die zu einer dieser beiden Kreisebenen parallel ist, den Kernkegel des Polarbündels in einem (reellen oder imaginären) Kreise schneiden mufs, also für den Fall des hyperbolischen Polarbündels:

Eine Ebene kann nur in zwei bestimmten reellen Stellungen einen gegebenen Kegel zweiter Ordnung in einem Kreise schneiden; diese beiden Stellungen haben die Richtung einer der drei Hauptaxen gemeinschaftlich und gleiche Neigung gegen die beiden Hauptebenen, welche durch diese Hauptaxen gehen.

Hieraus folgt umgekehrt, dafs jeder Kegel zweiter Ordnung erzeugt werden kann durch die Bewegung eines Strahles, welcher beständig durch einen festen Punkt 𝔅 läuft und sich an die Peripherie eines Kreises anlehnt. Eine Hauptebene des Kegels ist diejenige, welche durch den Punkt 𝔅 und den Mittelpunkt des Kreises rechtwinklig zu seiner Ebene gelegt werden kann. Diese Ebene schneidet den Kreis in einem Durchmesser, dessen Endpunkte mit 𝔅 verbunden die zwei Kegelstrahlen in dieser Hauptebene sind; die Halbierungslinien zwischen den Winkeln dieser Kegelstrahlen sind zwei Hauptaxen des Kegels, die dritte ist die Normale zur ersten Hauptebene im Punkte 𝔅. Legen wir durch diese Hauptaxe eine Ebene, welche zu den beiden andern Hauptaxen die symmetrische Stellung hat mit der Ebene des ursprünglichen Kreises, so hat dieselbe die Stellung der zweiten Kreisebene des Kegels.

Die der vorigen Untersuchung dual gegenüberstehende führt zu einem durchaus analogen Resultat, welches wir, wie oben bemerkt ist, unmittelbar aus dem reziproken Bündel ablesen können:

Wenn man im Polarbündel durch jeden beliebigen Strahl das rechtwinklige konjugierte Ebenenpaar der dem Strahle zugehörigen Ebeneninvolution ermittelt, so schneiden alle solche Ebenenpaare eine der drei Hauptebenen in Strahlenpaaren, die einer neuen Strahleninvolution angehören. Für jede dieser drei Strahleninvolutionen in den drei Hauptebenen sind die beiden in einer Hauptebene liegenden Hauptaxen des Polarbündels gleichzeitig ein Paar konjugierter Strahlen der neuen Strahleninvolution, also, da sie rechtwinklig zu einander sind, die Axen dieser Strahleninvolution.

Von den drei neuen Strahleninvolutionen in den drei Hauptebenen sind zwei elliptisch und eine hyperbolisch; die letztere hat zwei reelle Asymptoten; jede derselben, welche „Brennstrahlen“ heifsen, besitzt die ausgezeichnete, ihr allein zukommende Eigenschaft, dafs die im Polarbündel ihr zugehörige Ebeneninvolution eine orthogonale ist. Die beiden reellen Brennstrahlen liegen in einer der drei Hauptebenen symmetrisch zu jeder der beiden in dieser Hauptebene liegenden Hauptaxen.

Ferner ist unmittelbar ersichtlich, dafs jede Ebene, welche auf einem der beiden Brennstrahlen des Kegels rechtwinklig steht, denselben in einem Kegelschnitt schneidet, für welchen der Durchbohrungspunkt des Brennstrahles ein Brennpunkt ist.

Wenn wir zu dem gegebenen Polarbündel das reziproke, wie es oben genannt wurde, dadurch herstellen, dafs wir zu jedem Paar von Polarstrahl und Polarebene die auf dem Polarstrahl rechtwinklige Ebene und den auf der Polarebene rechtwinkligen Strahl als die Elementenpaare eines neuen Polarbündels auffassen, so haben wir zwischen den Brenn-

strahlen und Kreisebenen dieser beiden reziproken Bündel die Beziehung:

Die auf den Brennstrahlen des gegebenen Polarbündels rechtwinklig gestellten Ebenen sind die Kreisebenen des reziproken Polarbündels, und die zu den Kreisebenen des gegebenen Polarbündels rechtwinkligen Strahlen sind die Brennstrahlen des reziproken Polarbündels.

§ 11. Einige Eigenschaften der Brennstrahlen und Kreisebenen.

Legen wir jetzt der Betrachtung ein Polarbündel mit reellem Kernkegel zu Grunde, so bieten die Brennstrahlen und Kreisebenen des Kegels mehrere besonders einfache Eigenschaften desselben dar.

Zunächst erkennen wir, dafs, wenn wir irgend zwei Berührungsebenen $\tau\tau_1$ des Kegels nehmen, die sich in einem Strahle s schneiden, die hyperbolische Ebeneninvolution für s durch diese beiden Asymptotenebenen gegeben ist. Sind nun f und f_1 die beiden Brennstrahlen in einer der drei Hauptebenen, so sind $[sf]$ und $[sf_1]$ die Asymptotenebenen einer neuen Ebeneninvolution, deren rechtwinklige konjugierte Ebenen die Winkelhalbierenden zwischen τ und τ_1 sein müssen; also gilt der Doppelsatz:

Irgend zwei Berührungsebenen des Kegels und die beiden durch ihren Schnittstrahl und die Brennstrahlen des Kegels gelegten Ebenen haben dieselben Winkelhalbierungsebenen.	Irgend zwei Kegelstrahlen und das Strahlenpaar, in welchem die sie verbindende Ebene von den beiden Kreisebenen des Kegels geschnitten wird, haben dasselbe Paar Halbierungsstrahlen.

Fallen insondere die beiden Berührungsebenen zusammen, so wird ihr Schnittstrahl der Berührungsstrahl, und fallen zwei Kegelstrahlen zusammen, so ist die sie verbindende Ebene die Berührungsebene; wir haben also den speciellen Fall des vorigen Satzes:

Verbindet man irgend einen Kegelstrahl mit den beiden Brennstrahlen des Kegels durch Ebenen, so halbiert die Berührungsebene am Kegelstrahl den Winkel des Ebenenpaars.

Eine Berührungsebene des Kegels wird von den beiden Kreisebenen allemal in einem Strahlenpaar geschnitten, dessen Winkel halbiert wird durch den Kegelstrahl der Berührungsebene.

Sei s der Schnittstrahl zweier beliebiger Berührungsebenen $\tau\tau_1$ des Kegels, dessen Brennstrahlen ff_1 seien und wir denken uns zu f den gegen die Ebene τ symmetrisch liegenden Strahl g bestimmt, so dafs die Winkel (sf) und (sg) einander gleich sind und die Ebene τ den Neigungswinkel der Ebenen $[sf]$, $[sg]$ halbiert; denken wir uns in gleicher Weise zum Strahl f_1 den gegen die Ebene τ_1 symmetrischen Strahl g_1 ermittelt, dann werden die beiden Dreikante:

$$gsf_1 \quad \text{und} \quad fsg_1$$

einander kongruent sein, weil sie zwei Flächenwinkel und den eingeschlossenen Kantenwinkel gleich haben, also mufs auch der Winkel der dritten Fläche bei beiden Dreikanten gleich sein; daraus folgt, wenn wir die beiden Berührungsstrahlen der Ebenen τ und τ_1 mit dem Kegel durch t und t_1 bezeichnen:

$$(tf) + (tf_1) = (t_1f) + (t_1f_1).$$

Halten wir nun den Kegelstrahl t fest, verändern aber t_1, so bleibt die linke Seite der Gleichung konstant und wir haben den Doppelsatz:

Die Summe der Winkel, welche ein veränderlicher Kegelstrahl mit den beiden Brennstrahlen bildet, ist konstant.

Die Summe der Winkel, welche eine veränderliche Berührungsebene des Kegels mit den beiden Kreisebenen bildet, ist konstant.

Wir können mit gleichem Recht an Stelle der konstanten Summe auch eine konstante Differenz einführen; denn zwei Strahlen bilden zwei Paare von Scheitelwinkeln mit einander, die sich zu 180° ergänzen; bezeichnen wir den einen Winkel $(t_1f) = \vartheta_1$ und den komplementären mit $\vartheta' = 180 - \vartheta_1$, so haben wir aus der Beziehung:

$$\vartheta + \vartheta_1 = c$$

die andere $\vartheta + 180^0 - \vartheta' = c$ oder

$$\vartheta - \vartheta' = c - 180^0 = c'.$$

Je nachdem wir also den einen oder den andern der Halbstrahlen oder Halbebenen auffassen, in welche ein Strahl durch einen auf ihr befindlichen Punkt, eine Ebene durch einen in ihr befindlichen Strahl geteilt wird, gelangen wir zu einer konstanten Summe oder einer konstanten Differenz. Die bei Ellipse und Hyperbel getrennt auftretenden Fokaleigenschaften fliefsen beim Kegel zusammen (s. o. S. 27).

Aus dieser Eigenschaft der konstanten Summe der Winkel zwischen einem veränderlichen Kegelstrahl und den zwei festen Brennstrahlen ergiebt sich die bekannte und einfachste mechanische Konstruktion des Kegels, welche zugleich die deutlichste Anschauung von seiner Gestalt gewährt.

Wir können nach dem Vorigen leicht die Lage der Brennstrahlen und der Kreisebenen zu den Hauptaxen und Hauptebenen des Kegels aus metrischen Relationen ermitteln. Sei a die elliptische Axe des Kegels, welche also in den innern Raum desselben hineinfällt, und durch welche die beiden hyperbolischen Hauptebenen des Kegels, die $[ab]$-Ebene und die $[ac]$-Ebene gehen, deren jede zwei reelle Kegelstrahlen enthält; bezeichnen wir die Kegelöffnungen in diesen beiden Hauptebenen, d. h. die Winkel zwischen den beiden Kegelstrahlen und zwar denjenigen Winkelraum, in welchen die elliptische Axe a hineinfällt:

in der $[ab]$-Ebene durch 2φ,
„ „ $[ac]$-Ebene „ 2ϑ,

und nehmen aufserdem, da diese beiden Winkel im allgemeinen nicht gleich sein werden, an:

$$\varphi > \vartheta;$$

die beiden Brennstrahlen mögen den Winkel 2ε mit einander bilden, und zwar sei dies derjenige Winkelraum, in welchen die a-Axe hineinfällt. Die beiden Brennstrahlen müssen entweder in der $[ab]$- oder in der $[ac]$-Ebene, liegen, und wir können nun leicht erkennen, in welcher von beiden sie wirklich liegen, und welche Winkel sie mit der a-Axe bilden;

die konstante Summe ist nämlich $= 2\varphi$ oder $= 2\vartheta$, je nachdem die reellen Brennstrahlen in der einen oder andern Hauptebene liegen; nehmen wir an, sie liegen in der $[ab]$-Ebene und es sei s einer der beiden Kegelstrahlen in der $[ac]$-Ebene, dann bilden die drei Strahlen $a\,f\,s$ ein Dreikant, welches von einer zu a rechtwinkligen Ebene in dem Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{s}$ getroffen wird. Nun sind die Winkel

$$(as) = \vartheta, \quad (af) = \varepsilon, \quad (sf) = \varphi;$$

wenn wir also die Seite $\mathfrak{f}\mathfrak{s}$ doppelt ausdrücken in dem Dreieck $\mathfrak{f}\mathfrak{a}\mathfrak{s}$ und in dem Dreieck $\mathfrak{f}\mathfrak{B}\mathfrak{s}$, so folgt:

$$\mathrm{tg}^2\,\vartheta + \mathrm{tg}^2\,\varepsilon = \frac{1}{\cos^2\vartheta} + \frac{1}{\cos^2\varepsilon} - \frac{2\cos\varphi}{\cos\vartheta\,.\,\cos\varepsilon},$$

woraus folgt:

$$\text{(I)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \cos\varepsilon = \frac{\cos\varphi}{\cos\vartheta},$$

und hieraus ergiebt sich, dafs ε nur reell sein kann, wenn $\varphi > \vartheta$; die beiden Brennstrahlen liegen also in der $[ab]$-Ebene, d. h. in derjenigen der beiden hyperbolischen Hauptebenen, welche die gröfsere Kegelöffnung darbietet. Vertauschen wir in der letzten Formel φ und ϑ, so ergiebt sich kein reeller Wert für ε, weil der Cos > 1 wird.

Wir können aber auch für die imaginären Brennstrahlen die Potenzen der sie vertretenden elliptischen Strahleninvolutionen ermitteln, wenn wir, wie in § 9, die Potenzen der Strahleninvolutionen in den drei Hauptebenen einführen, nämlich die Werte:

$$P_{bc} = -\frac{1}{P_{cb}}, \quad P_{ca} = -\frac{1}{P_{ac}}, \quad P_{ab} = -\frac{1}{P_{ba}},$$

welche der Bedingung unterworfen sind:

$$P_{bc}\,.\,P_{ca}\,.\,P_{ab} = -1.$$

Für die beiden hyperbolischen Hauptebenen ist nämlich:

$$P_{ab} = \mathrm{tg}^2\,\varphi, \qquad P_{ac} = \mathrm{tg}^2\,\vartheta$$

also, da aus

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\varphi}{\cos\vartheta} \quad \text{folgt:} \quad \mathrm{tg}^2\,\varepsilon = \frac{\mathrm{tg}^2\,\varphi - \mathrm{tg}^2\,\vartheta}{1 + \mathrm{tg}^2\,\vartheta},$$

und $\mathrm{tg}^2\,\varepsilon$ die Potenz der Strahleninvolution in der $[ab]$-Ebene ist, deren Doppelstrahlen die Brennstrahlen sind, folgt:

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon = \frac{P_{ab} - P_{ac}}{1 + P_{ac}} \quad \text{oder, da} \quad P_{ac} = \frac{1}{P_{ca}}$$

und
$$P_{ab} \cdot P_{ca} = -\frac{1}{P_{bc}} = -P_{cb} \text{ ist,}$$

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon = -\frac{P_{cb} + 1}{P_{ca} + 1}.$$

Bezeichnen wir demgemäſs die Potenzen der drei Strahleninvolutionen in den Hauptebenen des Kegels, deren Doppelstrahlen die Brennstrahlen sind, durch

$$F_{ab}, \quad F_{bc}, \quad F_{ca},$$

so ergiebt sich:

$$\begin{cases} F_{ab} = -\dfrac{P_{cb} + 1}{P_{ca} + 1}, \\ F_{bc} = -\dfrac{P_{ac} + 1}{P_{ab} + 1}, \\ F_{ca} = -\dfrac{P_{ba} + 1}{P_{bc} + 1}, \end{cases}$$

woraus die Beziehung folgt:

$$F_{ab} \cdot F_{bc} \cdot F_{ca} = +1.$$

Hiernach könnten entweder alle drei Strahleninvolutionen hyperbolisch oder zwei elliptisch und eine hyperbolisch sein; daſs der erste Fall aber in der That nicht eintreten kann, folgt leicht aus der Bedingung:

$$P_{ab} \, P_{bc} \, P_{ca} = -1,$$

denn sowohl für den Fall, daſs alle drei Werte P_{ab} P_{bc} P_{ca} negativ sind (imaginärer Kegel), als auch für den Fall, daſs von den drei Werten P_{ab} P_{bc} P_{ca} zwei positiv und der dritte negativ ist (reeller Kegel), immer muſs von den drei Werten F_{ab} F_{bc} F_{ca} einer positiv und die beiden andern negativ sein.

Aus der Beziehung (I), welche die Lage der beiden reellen Brennstrahlen liefert, läſst sich sofort eine zweite Relation ableiten, aus welcher die Lage der beiden Kreisebenen hervorgeht. Wenn wir nämlich den reziproken Kegel bilden, dessen Berührungsebenen normal sind zu den Strahlen des gegebenen Kegels, so ist ersichtlich, daſs die elliptische Axe a für beide Kegel denselben Charakter hat; dagegen sind in den beiden

Hauptebenen, welche durch diese Axe gehen, für den reziproken Kegel die Kegelöffnungen:

in der $[ab]$-Ebene $180^0 - 2\varphi$,

„ „ $[ac]$-Ebene $180^0 - 2\vartheta$

und da $\varphi > \vartheta$, so mufs $90^0 - \varphi < 90^0 - \vartheta$ sein.

Die Brennstrahlen des reziproken Kegels müssen daher notwendig in der $[ac]$-Ebene liegen, und, bezeichnen wir den Winkel, welchen sie mit einander bilden und zwar den Winkelraum, in welchen die a-Axe hineinfällt, durch

$$180^0 - 2E,$$

dann haben wir nach dem Obigen die Beziehung:

$$\cos(90^0 - E) = \frac{\cos(90^0 - \vartheta)}{\cos(90^0 - \varphi)} \quad \text{oder}$$

$$\text{(II)} \quad \ldots\ldots\ldots \sin E = \frac{\sin\vartheta}{\sin\varphi}.$$

Die Kreisebenen gehen also durch die b-Axe des Kegels, d. h. diejenige von den beiden hyperbolischen Axen des Kegels, deren Berührungsebenen an den Kegel den kleineren Winkel einschliefsen. Wenn daher die a-Axe diejenige (elliptische) Hauptaxe des Kegels ist, welche in denselben hineinfällt, die beiden andern (hyperbolischen) die b-Axe und c-Axe, wenn ferner die beiden durch die b-Axe an den Kegel gelegten Berührungsebenen einen Neigungswinkel $= 2\vartheta$, die beiden durch die c-Axe an den Kegel gelegten Berührungsebenen einen Neigungswinkel $= 2\varphi$ einschliefsen, wobei die Winkelräume gemeint sind, in denen der Kegel selbst enthalten ist, wenn endlich

$$\varphi > \vartheta$$

angenommen wird, dann liegen die beiden Brennstrahlen in der $[ab]$-Ebene und die beiden Kreisebenen gehen durch die b-Axe. Vertauschen wir ϑ und φ, so ergiebt sich kein reeller Wert für E, weil der Sin > 1 wird. Der Winkel, welchen die beiden Kreisebenen mit einander bilden, und zwar derjenige Winkelraum, in welchem die Kegelfläche nicht liegt, ist $= 2E$.

In dem besonderen Falle, wenn $\varphi = \vartheta$ ist, d. h. die Kegelöffnungen in den beiden Hauptschnitten einander gleich sind, wird $\varepsilon = 0$, d. h. die beiden Brennstrahlen fallen

mit der a-Axe zusammen und $E = 90^0$, d. h. die beiden Kreisebenen fallen mit der $[bc]$-Ebene zusammen. In diesem Falle ergiebt sich aus der obigen Eigenschaft der konstanten Winkelsumme, dafs der Kegel ein Rotationskegel (gerader Kegel oder Kreiskegel) ist, der nur in der einzigen Stellung, rechtwinklig zur Rotationsaxe, Kreisschnitte zuläfst.

Die obige Betrachtung, welche uns zu der Eigenschaft der konstanten Winkelsumme führte, läfst noch ein anderes bemerkenswertes Resultat erkennen, welches zu weiteren Folgerungen führt:

Aus der Kongruenz der beiden obigen Dreikante:

$$gsf_1 \quad \text{und} \quad fsg_1$$

folgt, dafs der Winkel der Ebenen $[gs]$ und $[gf_1]$ oder, was dasselbe ist, der Ebenen $[fs]$ und $[ft]$ gleich sein mufs dem Winkel zwischen den Ebenen $[fs]$ und $[fg_1]$, also auch dem Winkel zwischen den Ebenen $[fs]$ und $[ft_1]$. Hieraus folgt, wenn wir die polar gegenüberstehende Betrachtung ergänzen, der Doppelsatz:

Verbindet man einen Brennstrahl mit den beiden Berührungsstrahlen zweier beliebiger Berührungsebenen des Kegels und zugleich mit dem Schnittstrahl beider Berührungsebenen, so wird der Winkel des so entstehenden Ebenenpaars durch die dritte Ebene halbiert.

Zwei Berührungsebenen des Kegels schneiden auf einer Kreisebene desselben einen Winkel aus, welcher halbiert wird durch denjenigen Strahl, in welchem die Verbindungsebene der Berührungsstrahlen der beiden vorigen Berührungsebenen die Kreisebene schneidet.

Tritt noch eine dritte Berührungsebene hinzu, so finden diese Sätze dreimal statt und ergeben folgendes Resultat:

Werden die Schenkel eines veränderlichen Winkels, welcher durch eine veränderliche Berührungsebene auf zwei festgehaltenen Berührungs-

Wird ein veränderlicher Kegelstrahl mit zwei festen Kegelstrahlen durch Ebenen verbunden, so schneiden dieselben auf einer Kreisebene einen

ebenen des Kegels ausgeschnitten wird, mit einem Brennstrahl durch ein Ebenenpaar verbunden, so bleibt der Neigungswinkel dieses Ebenenpaars von unveränderter Gröfse.

Winkel von unveränderter Gröfse aus.

Hieraus folgt eine doppelte Erzeugungsart des Kegels:

Gehen durch einen Punkt des Raumes zwei feste Ebenen und ein fester Strahl, und dreht man um diesen einen diëdrischen Winkel von unveränderter Gröfse, so schneiden die Seitenflächen desselben die beiden festen Ebenen in zwei Strahlen, deren Verbindungsebene einen Kegel zweiter Ordnung umhüllt, für welchen die beiden festen Ebenen Berührungsebenen und der feste Strahl ein Brennstrahl ist.

Gehen durch einen Punkt des Raumes zwei feste Strahlen und eine feste Ebene, und dreht man in letzterer um den gemeinsamen Punkt als Scheitel einen Winkel von unveränderlicher Gröfse, verbindet die Schenkel desselben mit den beiden festen Strahlen durch Ebenen, so schneiden sich diese beiden Ebenen in einem Strahle, der einen Kegel zweiter Ordnung beschreibt, für welchen die beiden festen Strahlen Kegelstrahlen und die feste Ebene eine Kreisebene ist.

Wir müssen uns hier versagen, auf eine weitere Untersuchung der Eigenschaften des Kegels einzugehen, welche sich an die Brennstrahlen und Kreisebenen desselben anschliefsen, und deren Analogie mit den bekannten Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte hier wesentlich ergänzt wird durch eine uneingeschränkte Dualität.*)

*) Vergl. H. Vogt, der sphärische Kegelschnitt, Breslau 1873.

§ 12. Der orthogonale Kegel.

Es giebt einen besonderen Kegel, der in der Geometrie des Punktes eine ähnliche Stellung einnimmt, wie der Kreis in der Geometrie der Ebene. Da dieser Kegel sich mitunter bei räumlichen Untersuchungen darbietet, so wollen wir hier näher auf ihn eingehen.

Drehen sich um zwei durch einen Punkt $\mathfrak{B}$ gehende Axen s und s_1 zwei Ebenen, die beständig zu einander rechtwinklig bleiben, so beschreibt ihr Schnittstrahl einen Kegel zweiter Ordnung von besonderer Art.

Dieser Kegel soll orthogonal heifsen. Offenbar ist der Ort des Schnittstrahls der beiden rechtwinkligen Ebenen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ ein Kegel; legen wir nun eine beliebige Transversalebene τ normal zu dem einen Strahle s, so schneidet dieselbe alle Ebenen $\mathfrak{x}$ des Büschels s in Strahlen x eines Strahlenbüschels $\mathfrak{O}$ und die Ebenen $\mathfrak{x}_1$ in Strahlen x_1 eines Strahlenbüschels $\mathfrak{O}_1$; da aber die Ebene $\mathfrak{x}_1$ zur Ebene $\mathfrak{x}$ normal ist und auch die Ebene τ zur Ebene $\mathfrak{x}$ normal ist (weil τ durch die Normale s der Ebene $\mathfrak{x}$ geht), so mufs die Schnittlinie $|\mathfrak{x}_1 \tau| = x_1$ eine Normale der Ebene $\mathfrak{x}$, also auf dem Strahle x rechtwinklig sein, d. h. der Schnittpunkt $(x x_1)$ beschreibt in der Ebene τ einen Kreis, von welchem $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ ein Durchmesser ist. Wird also der Schnittpunkt $(x x_1) = \mathfrak{x}$ bezeichnet, so beschreibt der Strahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1| = \mathfrak{B}\mathfrak{x}$ einen Kegel, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ ist, und der die Ebene τ in einem Kreise schneidet. Ebenso schneidet der Kegel auch jede zu dem andern Strahle s_1 normale Ebene τ_1 in einem Kreise.

Die Stellungen der beiden Kreisebenen unseres Kegels sind also rechtwinklig zu den Kegelstrahlen s und s_1, wie wir auch auf folgende Weise einsehen: der Kegel geht durch die Strahlen s und s_1 selbst und hat zu Berührungsebenen in denselben diejenigen beiden Ebenen, welche zur Verbindungsebene $[s s_1]$ rechtwinklig durch s und s_1 gelegt werden. Wenn wir noch die beiden Normalebenen zu den Strahlen s und s_1 durch $\mathfrak{B}$ legen, so sind dies offenbar die beiden Kreisebenen $[\varkappa]$ und $[\varkappa_1]$ des orthogonalen Kegels; denn sei x

ein beliebiger Kegelstrahl, so müssen die beiden Ebenen $[sx]$ und $[s_1 x]$ auf einander rechtwinklig sein. Die Ebene $\varkappa$ ist aber Normalebene des Strahles s, folglich steht sie auch rechtwinklig auf $[sx]$, und daher müssen die beiden Ebenen $[sx]$ und $[s_1 x]$ auf der Ebene $\varkappa$ einen rechten Winkel ausschneiden d. h. einen Winkel von unveränderlicher Gröfse; nach dem auf Seite 66 (rechts) stehenden Satze ist also $[\varkappa]$ eine Kreisebene des Kegels und aus demselben Grunde $[\varkappa_1]$ die andere Kreisebene.

Der orthogonale Kegel hat also die besondere Eigentümlichkeit, dafs seine Kreisebenen rechtwinklig stehen auf zwei Kegelstrahlen. Hieraus entspringt sofort eine Bedingung zwischen den Kegelöffnungen in den Hauptebenen. Die auf Seite 64 abgeleitete Beziehung (II.):

$$\sin E = \frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi}$$

ergiebt nämlich hier, da $\vartheta + E = 90^0$ ist:

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \vartheta$$

als Bedingung für den orthogonalen Kegel, die sich auch so schreiben lässt:

$$\operatorname{ctg}^2 \vartheta - \operatorname{ctg}^2 \varphi = 1 .$$

Diese Bedingung zeigt zugleich, dass $\vartheta < 45^0$ d. h. die Kegelöffnung 2ϑ in der $[ac]$-Ebene, in welcher nicht die Brennstrahlen liegen, kleiner als 90^0 sein mufs. Die Kreisebenen, welche durch die b-Axe gehen, also auf der $[ac]$-Ebene rechtwinklig stehen, schliefsen daher einen über 90^0 betragenden Winkelraum ein, in welchen der Kegel hineinfällt.

Das vorige Resultat läfst sich auch etwas anders aussprechen. Seien die Schnittlinien der Ebenen $[sx]$ und $[s_1 x]$ mit der Ebene $[\varkappa]$ die Strahlen t und t_1, so ist klar, dafs dieselben mit x zusammen ein rechtwinkliges Dreikant bilden, weil sie selbst einen Winkel von 90^0 einschliefsen und die Ebenen $[sx]$ und $[s_1 x]$ zu einander unter 90^0 geneigt sind; mithin ist auch der Winkel (tx) und $(t_1 x)$ gleich 90^0. Wir haben daher folgenden Satz:

Wenn ein rechter Winkel $(t_1 x)$ sich so bewegt, dafs seine Ebene sich um einen festen Strahl (s_1) dreht und der eine Schenkel (t_1) in einer festen

Ebene $[\varkappa]$ sich bewegt um seinen unveränderten Scheitel, so beschreibt der andere Schenkel (x) einen orthogonalen Kegel zweiter Ordnnng, welcher durch den festen Strahl (s_1) selbst geht und die feste Ebene zu einer Kreisebene hat, während die andere Kreisebene auf dem festen Strahle (s_1) normal steht.

Oder auch:

Wenn man eine feste Ebene $(\varkappa)$ und einen festen Strahl (s_1) hat und um denselben eine veränderliche Ebene (ε_1) dreht, welche die feste in dem veränderlichen Strahle t_1 schneidet, so beschreibt die auf t_1 rechtwinklig stehende in der bewegten Ebene (ε_1) liegende Gerade (x) einen orthogonalen Kegel zweiter Ordnung, welcher durch den festen Strahl (s_1) geht und die feste Ebene $(\varkappa)$ zu einer Kreisebene hat, wärend die andere Kreisebene auf dem festen Strahl (s_1) normal steht.

Wir erkennen unmittelbar, dafs die Ebene $[ss_1]$ eine Hauptebene des orthogonalen Kegels $\mathfrak{B}^{(2)}$ ist; denn nehmen wir irgend einen Kegelstrahl g, so wird der zu demselben in Bezug auf die Ebene $[ss_1]$ symmetrisch liegende Strahl oder das Spiegelbild g_1 des Strahles g in Bezug auf die Ebene $[ss_1]$ notwendig auch ein Kegelstrahl von $\mathfrak{B}^{(2)}$ sein; denn sobald die Ebenen $[sg]$ und $[s_1 g]$ zu einander rechtwinklig sind, müssen auch die Ebenen $[sg_1]$ und $[s_1 g_1]$ zu einander rechtwinklig sein. Die Halbierungslinien der Winkel (ss_1) sind also zwei Hauptaxen des orthogonalen Kegels $\mathfrak{B}^{(2)}$ und die dritte Hauptaxe ist die Normale der Ebene $[ss_1]$ im Punkte $\mathfrak{B}$. Die vier Strahlen $|ss_1 gg_1|$ sind vier harmonische Strahlen des Kegels $\mathfrak{B}^{(2)}$. Wählen wir g und g_1 zu Axen zweier neuen den Kegel $\mathfrak{B}^{(2)}$ erzeugenden projektivischen Ebenenbüschel, so erkennen wir, dafs dieselben projektivisch-gleich sind. Denn die Berührungsebenen des Kegels $\mathfrak{B}^{(2)}$ längs der Strahlen $|gg_1|$ sind gleich geneigt zu der Verbindungsebene $[gg_1]$, weil diese normal ist zur Ebene $[ss_1]$. Bezeichnen wir diese Berührungsebenen längs der Kegelstrahlen g und g_1 durch $[gg]$ und $[g_1 g_1]$, so sind die vier Ebenen des Büschels:

$$g[gg_1ss_1]$$

harmonisch, und ebenso die vier Ebenen des Büschels:

$$g_1[g_1gss_1]$$

harmonisch; da aber die Ebenen $[gs]$ und $[gs_1]$ auf einander rechtwinklig stehen, so halbieren sie die Neigungswinkel zwischen den beiden andern $[gg]$ und $[gg_1]$ und da ebenso die Ebenen $[g_1s]$ und $[g_1s_1]$ auf einander rechtwinklig stehen, so halbieren sie die Winkel zwischen den beiden andern $[g_1g_1]$ und $[g_1g]$; nun ist aber der Winkel, welchen die Ebenen $[gg]$ und $[gg_1]$ bilden, gleich demjenigen, welchen die Ebenen $[g_1g_1]$ und $[g_1g]$ mit einander bilden, folglich sind auch die Hälften dieser Winkel einander gleich. Die vier Ebenen des Büschels $g[gg_1ss_1]$ bilden also dieselben Winkel mit einander, wie die vier Ebenen des Büschels $g_1[g_1gss_1]$. Da ferner die Dopelverhältnisse der harmonischen Büschel:

$$g[gg_1ss_1] \quad \text{und} \quad g_1[gg_1ss_1]$$

einander gleich sind, so sind von den beiden projektivischen den Kegel $\mathfrak{B}^{(2)}$ erzeugenden Ebenenbüscheln mit den Axen g und g_1 vier Paare entsprechender Ebenen unter einander gleich geneigt, mithin die beiden Büschel g und g_1 projektivisch-gleich. Wir schliefsen also:

Ein orthogonaler Kegel kann auf unendlich viele Arten durch zwei projektivisch-gleiche Ebenenbüschel erzeugt werden.

Umgekehrt schliefsen wir:

Zwei projektivisch-gleiche Ebenenbüschel, deren Axen g und g_1 sich in $\mathfrak{B}$ treffen (und die nicht perspektivisch liegen) erzeugen allemal einen orthogonalen Kegel $\mathfrak{B}^{(2)}$.

Gehen wir nämlich von der Verbindungsebene $[gg_1]$ der Axen der gegebenen projektivisch-gleichen Ebenenbüschel aus, welche beiden gemeinsam ist und nehmen die ihr in doppeltem Sinne entsprechenden Ebenen $[gg]$ und $[g_1g_1]$, halbieren die Neigungswinkel zwischen dem einen Ebenenpaar $[gg_1]$ und $[gg]$ durch zwei zu einander rechtwinklige Ebenen und auch die Neigungswinkel zwischen dem andern Ebenenpaar $[g_1g]$ und $[g_1g_1]$ durch zwei zu einander rechtwinklige Ebenen, so erhalten wir durch $\mathfrak{B}$ ein Vierflach, von welchem ein Paar

Gegenkanten g und g_1 ist; dasselbe hat noch zwei andere Paare von Gegenkanten, die wir s und s_1, s' und s'_1 nennen wollen; dann wird, weil die Ebenenbüschel projektivisch gleich sein sollen, entweder das eine Paar ss_1 oder das andere Paar $s's'_1$ Schnittlinien entsprechender Ebenen sein müssen. Wählen wir dieses Paar zu Axen zweier neuen Ebenenbüschel, deren je zwei entsprechende Ebenen zu einander rechtwinklig sind, so erzeugen dieselben einen orthogonalen Kegel, welcher mit dem Erzeugnis der gegebenen projektivisch-gleichen Ebenenbüschel g und g_1 identisch ist.*)

Dem orthogonalen Kegel steht als duales Gebilde gegenüber ein Kegel, der auf folgende Art erzeugt wird:

Wenn die Schenkel eines rechten Winkels sich in zwei beliebigen festen Ebenen $\varepsilon\varepsilon_1$ bewegen, während der Scheitel unverändert bleibt, so umhüllt seine Ebene einen besonderen Kegel, welcher die beiden festen Ebenen $\varepsilon\varepsilon_1$ selbst berührt, und dessen Brennstrahlen normal sind zu den beiden festen Ebenen.

In der That, sei $\mathfrak{B}$ ein beliebiger Punkt der Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon_1|$ und drehen wir um $\mathfrak{B}$ in der Ebene ε einen Strahl x, so schneidet die Normalebene desselben die Ebene ε_1 in einem Strahle x_1 so, dafs der Winkel

$$(xx_1) = 90^0$$

ist. Da aber die Normalebene ein Ebenenbüschel beschreibt um eine Axe, welche normal auf ε steht und dies Ebenenbüschel projektivisch gleich ist mit dem von x beschriebenen Strahlenbüschel, so sind auch die von x und x_1 beschriebenen Strahlenbüschel projektivisch und ihre Verbindungsebene umhüllt einen Kegel, welcher die Ebenen ε und ε_1 selbst berührt. Die Berührungsstrahlen in diesen Ebenen werden erhalten, indem wir auf der Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon_1|$ im Punkte $\mathfrak{B}$ in beiden Ebenen eine Senkrechte ziehen. Mögen diese beiden Berührungsstrahlen tt_1 heifsen und die in ihrer Ebene zu ihnen rechtwinkligen durch $\mathfrak{B}$ gehenden Strahlen ff_1, so dafs also

*) Vgl. F. Ruth: „Über eine besondere Erzeugungsweise des orthogonalen Hyperboloides und über Büschel orthogonaler Kegel und Hyperboloide“ (Sitzb. d. Akad. d. Wiss. Wien 1879).

die vier Strahlen

$$t\ t_1\ f\ f_1$$

sämtlich in der Normalebene der Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon_1|$ liegen und ff_1 notwendig in demjenigen Winkelraum zwischen den Strahlen tt_1, welcher $> 90^0$ ist, dann sind nach dem auf Seite 66 ausgesprochenen Satze (links) f und f_1 die Brennstrahlen des Kegels und die oben gefundene Beziehung: (1):

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\varphi}{\cos\vartheta},$$

wo $\varphi > 90'$ ist, giebt, da $\varphi + \varepsilon = 90^0$ wird,

$$\cos\vartheta = \operatorname{ctg}\varphi$$

oder anders geschrieben:

$$\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\vartheta = 1.$$

Das gewonnene Resultat läfst sich noch umformen: Bei der beschriebenen Bewegung dreht sich der Strahl x um $\mathfrak{B}$ in der Ebene ε, die Normalebene von x dreht sich um den festen Strahl f und steht also senkrecht auf jeder durch x gelegten Ebene; sie geht daher durch die Normale n der Ebene $[xx_1]$, oder die drei Strahlen nfx_1 liegen in einer Ebene. Wir haben mithin ein rechtwinkliges Dreikant xx_1n und zugleich ein rechtwinkliges Dreiflach $[xx_1]$ $[xn]$ $[x_1n]$. Der von den beiden Ebenen $[x_1n]$ und $[x_1x]$ gebildete diëdrische rechte Winkel bewegt sich so, dafs seine Kante x_1 in der festen Ebene ε_1 sich um $\mathfrak{B}$ dreht und die Fläche $[x_1n]$ um den festen Strahl f sich dreht, während die freie Ebene (x_1x) den obigen Kegel umhüllt. Wir haben hiernach folgenden Satz:

Wenn ein diëdrischer rechter Winkel sich so bewegt, dafs seine Kante in einer festen Ebene (ε_1) um einen festen Punkt $\mathfrak{B}$ sich dreht und die eine Seitenfläche desselben $[x_1n]$ um einen festen durch $\mathfrak{B}$ gehenden Strahl f sich dreht, so umhüllt die andere Seitenfläche einen besonderen Kegel zweiter Klasse, welcher die feste Ebene (ε_1) berührt, den Punkt $\mathfrak{B}$ zu seinem Mittelpunkt und den festen Strahl f zu einem Brennstrahl hat, während der andere Brennstrahl auf der festen Ebene normal steht. —

Der orthogonale Kegel besitzt eine Eigenschaft, welche

seine Analogie mit dem ebenen Kreise deutlich hervortreten läfst.

Nehmen wir durch einen Punkt $\mathfrak{B}$ in einer Ebene vier Strahlen gg_1ss_1 an, von denen das erste Paar durch das zweite harmonisch getrennt wird, legen sodann durch s und s_1 zwei veränderliche Ebenen, die beständig zu einander rechtwinklig bleiben, so wird ihre Schnittlinie x den im Obigen untersuchten orthogonalen Kegel beschreiben. Weil nun auch die vier Ebenen des Büschels:

$$x[gg_1ss_1]$$

vier harmonische Ebenen sind, von denen zwei, $[xs]$ und $[xs_1]$, zu einander rechtwinklig sind, so müssen diese die Neigungswinkel zwischen den beiden Ebenen $[xg]$ und $[xg_1]$ halbieren; wir haben also die Winkel:

$$(xg,\ xs) = (xs,\ xg_1) \quad (xg,\ xs_1) = (xs_1,\ xg_1),$$

und, da die vier Strahlen $g\ s\ g_1\ s_1$ in einer Ebene liegen:

$$(sx,\ sg) + (sx,\ sg_1) = 180^0.$$

Da aber in einem Dreiflach die Sin der Winkel der Seitenflächen wie die Sin der Neigungswinkel an den gegenüberliegenden Kanten sich verhalten, so haben wir:

$$\frac{\sin(xg)}{\sin(sg)} = \frac{\sin(sx,\ sg)}{\sin(xs,\ xg)};\quad \frac{\sin(xg_1)}{\sin(sg_1)} = \frac{\sin(sx,\ sg_1)}{\sin(xs,\ xg_1)},$$

und hieraus folgt die Gleichheit:

$$\frac{\sin(xg)}{\sin(xg_1)} = \frac{\sin(sg)}{\sin(sg_1)} = \text{const.},$$

d. h. ein veränderlicher Strahl x des orthogonalen Kegels bildet mit den beiden festen Strahlen g und g_1, die konjugiert sind in Bezug auf den Kegel, solche Winkel, dafs das Verhältnis ihrer Sin unverändert bleibt. Dies können wir aber umkehren:

Sind zwei in einem Punkte $\mathfrak{B}$ sich schneidende Gerade g und g_1 gegeben, und soll sich ein durch $\mathfrak{B}$ gezogener Strahl x im Raume so bewegen, dafs das Verhältnis $\frac{\sin(xg)}{\sin(xg_1)}$ konstant bleibt, so beschreibt x einen orthogonalen Kegel um $\mathfrak{B}$, für welchen die Strahlen g und g_1 ein Paar konjugierter Strahlen sind.

In der That braucht man nur die beiden Strahlen s und s_1 in der Ebene $[gg_1]$ zu ermitteln, was ein bekanntes ebenes Problem ist und dann durch s und s_1 rechtwinklige Ebenenpaare zu legen, deren veränderliche Kante x den gesuchten Kegel beschreibt. Da das Verhältnis der Sinus:

$$\frac{\sin(xg)}{\sin(xg_1)}$$

gleichwertig ist mit dem Verhältnis der Abstände irgend eines Punktes $\mathfrak{x}$ des Kegelstrahls x von den beiden festen Strahlen g und g_1, so können wir den vorigen Satz auch so aussprechen:

Wenn zwei in einem Punkte $\mathfrak{B}$ sich treffende Gerade g und g_1 gegeben sind, so ist der Ort eines Punktes, dessen Abstände von g und g_1 in einem gegebenen unveränderten Verhältnis stehen, ein orthogonaler Kegel, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ ist, und für welchen g und g_1 ein Paar konjugierter Strahlen in derjenigen hyperbolischen Hauptebene des Kegels sind, welche nicht die beiden Brennstrahlen enthält.

Gehen wir umgekehrt von zwei Strahlen ss_1 aus, die sich in einem Punkte $\mathfrak{B}$ schneiden und einen Winkel $2\vartheta < 90^0$ einschliefsen, ziehen in der Ebene $[ss_1]$ eine zu s rechtwinklige Gerade, welche den Strahlen ss_1 in den Punkten $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ begegnet und beschreiben über $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ als Durchmesser einen Kreis in einer zur Ebene $[ss_1]$ rechtwinkligen Ebene: dann wird der Kegel, welcher von $\mathfrak{B}$ aus nach den Punkten dieses Kreises geht ein orthogonaler sein, und es läfst sich leicht zeigen, dafs irgend ein durch $\mathfrak{B}$ gelegtes Strahlenpaar gg_1, welches durch ss_1 harmonisch getrennt wird die Eigenschaft besitzt, dafs die Abstände irgend eines Kegelpunktes von g und g_1 dasselbe Verhältnis zu einander behalten. Die Halbierungsstrahlen des Winkels (ss_1) sind die a-Axe und c-Axe des orthogonalen Kegels, die zur Ebene $[ss_1]$ in $\mathfrak{B}$ errichtete Senkrechte ist die b-Axe; da die Kegelöffnung

$$2\vartheta < 90^0$$

angenommen ist, so wird die in den kleineren Winkelraum hineinfallende Halbierungslinie die (elliptische) a-Axe sein.

Berechnen wir die Kegelöffnung 2φ in der $[ab]$-Ebene, so finden wir:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \sin\psi$$

also $\varphi > \vartheta$, mithin liegen die Brennstrahlen des orthogonalen Kegels in der $[ab]$-Ebene, also das Paar konjugierter Strahlen gg_1 in derjenigen Hauptebene des orthogonalen Kegels, welche die kleinere Kegelöffnung besitzt, also nicht die Brennstrahlen enthält. —

(Wir werden später (§ 26) die allgemeinere Aufgabe lösen, indem wir von zwei Geraden g und g_1, die beliebig im Raume liegen, ohne sich zu treffen, ausgehen.)

Ist insbesondere der Wert des konstanten Verhältnisses $= 1$, so degenerirt der Kegel in ein rechtwinkliges Ebenenpaar, welches die Winkel zwischen g und g_1 halbiert.

Der dem orthogonalen Kegel dual gegenüberstehende, welcher ebenfalls vorhin betrachtet ist, bietet eine der letzten ganz analoge Eigenschaft dar, welche so lautet:

Sind zwei feste Ebenen ε und ε_1 gegeben und soll durch einen festen Punkt $\mathfrak{B}$ ihrer Schnittlinie eine veränderliche Ebene ξ derart gelegt werden, dafs das Verhältnis $\frac{\sin(\xi\varepsilon)}{\sin(\xi\varepsilon_1)}$ einen unveränderten Wert behält, so umhüllt die Ebene ξ einen besonderen Kegel zweiter Klasse, für welchen ε und ε_1 konjugierte Ebenen sind.

§ 13. Der gleichseitige Kegel.

Wir haben gesehen, dafs es im allgemeinen für eine Ebene nur zwei Stellungen giebt, in denen sie aus einem Kegel zweiten Grades einen Kreis ausschneidet, und dafs insbesondere, wenn die Normalen zu diesen beiden Stellungen zu den Kegelstrahlen gehören, der Kegel den Charakter des orthogonalen Kegels hat. Fragen wir aber, wie eine Ebene gestellt sein mufs, um eine gleichseitige Hyperbel aus einem gegebenen Kegel auszuschneiden, so lautet die Antwort, dafs sie im allgemeinen unendlich-viele derartige Stellungen haben kann; denn nehmen wir irgend einen Kegelstrahl x und legen durch den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ des Kegels eine Normalebene ξ zu x, so wird dieselbe den Kegel im all-

gemeinen in zwei Strahlen y und z schneiden, und es ist ersichtlich, dafs jede Ebene, die zu einer der beiden Ebenen $[xy]$ oder $[xz]$ parallel ist, den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel schneiden mufs; nur in dem Falle, dafs das Strahlenpaar yz nicht reell ist, lassen sich keine Ebenen $[xy]$ und $[xz]$ legen. Bei der Veränderung von x umhüllt nun die Normalebene $\mathfrak{x}$ den reziproken Kegel des gegebenen und es wird also darauf ankommen, nachzusehen, ob die Berührungsebenen des reziproken Kegels den gegebenen in reellen Linienpaaren schneiden oder nicht. Das erstere wird nur dann der Fall sein, wenn der innere Raum des reziproken Kegels ganz oder teilweise in den inneren Raum des gegebenen hineinfällt. Ist dies aber der Fall, so giebt es unendlich viele Stellungen für eine Ebene, die den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel schneiden soll.

Eine besondere Frage ist aber die, wann eine solche in einer gleichseitigen Hyperbel durchschneidende Ebene auf einem Kegelstrahl normal steht. Ist dies nämlich der Fall, so wird die durch den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ parallel gelegte Ebene zwei rechtwinklige Kegelstrahlen enthalten, und, da der auf beiden rechtwinklige Strahl auch ein Kegelstrahl sein soll, der Kegel ein Tripel von drei zu einander rechtwinkligen Geraden als Kegelstrahlen haben; dies trifft beim allgemeinen Kegel nicht ein, sondern kennzeichnet einen partikulären Charakter des Kegels und liefert eine gewisse Bedingung, welche er zu erfüllen hat und die wir sogleich kennen lernen werden. Wir nennen einen solchen Kegel, welcher drei zu einander rechtwinklige Gerade zu Kegelstrahlen hat, einen gleichseitigen Kegel.*)

Nehmen wir einen gleichseitigen Kegel $\mathfrak{B}^{(2)}$ als gegeben an, und sei abc ein Tripel von rechtwinkligen Kegelstrahlen, dann wird eine Ebene, die auf dem Strahle a rechtwinklig steht, den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel schneiden, deren Asymptoten parallel b und c sind. Sei $\mathfrak{a}$ der Punkt, in welchem der Kegelstrahl a von einer auf ihm rechtwinklig

*) Vergl. Heinrich Vogt: Über ein besonderes Hyperboloid, Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 86, S. 297.

stehenden Ebene α, welche die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ ausschneidet, getroffen wird, und werde ein beliebiger Punkt $\mathfrak{x}$ der Hyperbel genommen, der Kegelstrahl $\mathfrak{B}\mathfrak{x} = x$ gezogen und eine Normalebene ξ in dem Punkte $\mathfrak{B}$ auf dem Strahle x errichtet; dann mufs, weil sowohl a und α, als auch x und ξ normal zu einander sind, die Ebene $[ax]$ auf der Schnittlinie $|\alpha\xi|$ normal sein; die Ebene $[a x]$ ist identisch mit $[\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{x}]$, der Schnittstrahl $|\alpha\xi|$ daher rechtwinklig gerichtet zu jedem Strahl in der Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{x}]$, insbesondere auch zu $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$. Die Gerade $|\alpha\xi|$ schneidet nun im allgemeinen die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ in einem Punktepaare $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, dessen Verbindungslinie zu $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ rechtwinklig liegt.

Das Punktepaar $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ ist immer reell, wie aus folgender Bemerkung hervorgeht. Liegen nämlich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ auf demselben Hyperbelzweige, und ist $\mathfrak{p}$ der Schnittpunkt:

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{a}\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}\mathfrak{z}),$$

so mufs, weil $|\mathfrak{B}\mathfrak{p}|$ rechtwinklig auf $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{a}|$ rechtwinklig auf $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$, $\mathfrak{B}\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{p}\mathfrak{x}$ sein, folglich $\mathfrak{p}$ aufserhalb $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ liegen. Da aber in diesem Falle die Richtung von $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ in denjenigen Winkelraum zwischen den rechtwinkligen Asymptoten der Hyperbel hineinfällt, welcher die Hyperbelzweige nicht enthält, so mufs die darauf senkrechte Richtung von $|\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$ in denjenigen Winkelraum zwischen den Asymptoten hineinfallen, welcher die Hyperbelzweige enthält, also mufs $|\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$ notwendig die Hyperbel in zwei reellen Punkten auf verschiedenen Hyperbelzweigen schneiden, weil

$$\mathfrak{p}\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{p}\mathfrak{x} + \mathfrak{p}\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{p}\mathfrak{z} = 0$$

(Th. d. K. S. 232) ist; liegen dagegen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{a}$ auf verschiedenen Hyperbelzweigen, so mufs $\mathfrak{p}$, da es aufserhalb $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ liegt, innerhalb der Hyperbel liegen, also die in $\mathfrak{p}$ auf $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ errichtete Senkrechte $|\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$ der Hyperbel in zwei reellen Punkten auf demselben Hyperbelzweige begegnen.

Da nun die Punkte $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ immer reell sind, so sind es auch die Strahlen:

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{y}| = y \quad \text{und} \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{z}| = z$$

und da x auf der Ebene $[yz]$ rechtwinklig steht, so ist sowohl x auf y, als auch x auf z rechtwinklig; aber es ist leicht zu erkennen, dafs auch y auf z rechtwinklig sein mufs.

In der That, die vier Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z}$ liegen in der Ebene α auf der gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ so, daſs jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist, also ist auch

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{y}| \text{ rechtwinklig auf } |\mathfrak{x}\mathfrak{z}|,$$

ferner wird, weil $|\mathfrak{B}\mathfrak{a}| = a$ die Normale der Ebene $[\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}]$ ist,

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{a}| \text{ rechtwinklig zu } |\mathfrak{x}\mathfrak{z}|$$

liegen, folglich auch die Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{y}]$ normal zu $|\mathfrak{x}\mathfrak{z}|$ sein; hieraus folgt, daſs auch $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}| = y$ rechtwinklig zu $|\mathfrak{x}\mathfrak{z}|$ ist und da y rechtwinklig zu $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}| = x$ ist, so muſs die Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{x}\mathfrak{z}]$ normal auf y stehen, also auch y rechtwinklig auf $|\mathfrak{B}\mathfrak{z}| = z$ sein; wir haben mithin ein zweites von drei zu einander rechtwinkligen Strahlen xyz gebildetes Tripel auf dem gleichseitigen Kegel nachgewiesen, sobald ein solches abc existiert, und da der Kegelstrahl x ganz willkürlich gewählt war, so folgt:

Hat ein Kegel ein Tripel von drei zu einander rechtwinkligen Kegelstrahlen, so hat er deren unendlich viele, indem jeder beliebige Kegelstrahl als eine Kante eines solchen rechtwinkligen Dreikants gewählt werden kann, und die beiden andern durch die auf dem ersteren normal stehende Ebene immer reell aus dem Kegel ausgeschnitten werden.

Hieraus folgt der Satz:

Jede Ebene, welche rechtwinklig zu einem Strahle eines gleichseitigen Kegels gelegt wird, schneidet denselben in einer gleichseitigen Hyperbel. Der Punkt, in welchem jener Kegelstrahl der gleichseitigen Hyperbel begegnet, ist Höhenpunkt für sämtliche Dreiecke, in welchen irgend drei zu einander rechtwinklige Kegelstrahlen der Hyperbel begegnen.

Ein gleichseitiger Kegel ist also dadurch vollkommen bestimmt und zu konstruieren, daſs man von einem Punkte $\mathfrak{B}$ aus zwei Tripel von je drei zu einander rechtwinkligen Strahlen ausgehen läſst; diese sechs Strahlen liegen allemal auf einem einzigen bestimmten Kegel. Wir haben also zugleich den Satz:

Zwei Tripel von je drei zu einander rechtwink-

ligen Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, sind allemal sechs Strahlen eines gleichseitigen Kegels.

(Dieser Satz ist nur ein specieller Fall einer früher (§ 8) bewiesenen Eigenschaft des Polarbündels, wonach die sechs Strahlen zweier Polardreikante immer auf einem Kegel liegen, sobald man nämlich für das Polarbündel das orthogonale nimmt, welches die unendlich entfernte Ebene ε_∞ in dem imaginären Kreise schneidet.)

Damit überhaupt auf einem Kegel zweiter Ordnung ein Tripel von drei zu einander rechtwinkligen Kegelstrahlen möglich sei, ist eine gewisse Bedingung erforderlich, zu der wir auf folgende Art gelangen:

Sei a die elliptische Hauptaxe des Kegels, durch welche die beiden hyperbolischen Hauptebenen gehen und seien in der einen der letzteren die beiden Kegelstrahlen ss', in der andern tt', ferner die Winkel:

$$(a, s) = \varphi \quad (a, t) = \vartheta;$$

dann wird irgend eine in dem Abstande ϱ vom Mittelpunkte $\mathfrak{B}$ des Kegels, zur a-Axe rechtwinklig gelegte Ebene denselben in einer Ellipse schneiden, deren Hauptaxen beziehungsweise in den beiden Hauptebenen des Kegels liegen und für welche die Quadrate der Halbaxen die Werte haben

$$\varrho^2 \,.\, \mathrm{tg}^2\varphi \quad \text{und} \quad \varrho^2 \,.\, \mathrm{tg}^2\vartheta.$$

Der Kegelstrahl s trifft nun diese Ellipse in einem Scheitel $\mathfrak{z}$ derselben, während ihr die in $\mathfrak{B}$ auf dem Strahl s errichtete Normalebene in zwei Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ begegnet, deren Mitte $\mathfrak{m}$ auf der Hauptaxe der Ellipse liegt. Wegen der Eigenschaft des gleichseitigen Kegels müssen die drei Strahlen $|\mathfrak{B}\mathfrak{z}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{p}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{p}'|$ drei zu einander rechtwinklige Strahlen sein, folglich mufs jeder der beiden Winkel $\mathfrak{p}\mathfrak{B}\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{B}\mathfrak{p}' = 45^0$ sein; also ist das Dreieck $\mathfrak{p}\mathfrak{B}\mathfrak{m}$ rechtwinklig und gleichschenklig, mithin

$$\mathfrak{m}\mathfrak{B} = \mathfrak{m}\mathfrak{p}.$$

Bezeichnen wir nun noch den Mittelpunkt der Ellipse durch $\mathfrak{o}$, so ist:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{B} \,.\, \sin\varphi = \varrho = \mathfrak{m}\mathfrak{o} \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi,$$

also nach dem Obigen:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{p} \,.\, \sin\varphi = \mathfrak{m}\mathfrak{o} \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi = \varrho.$$

Weil aber nach bekannter Eigenschaft der Ellipse:

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{o}^2}{\varrho^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} + \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{p}^2}{\varrho^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} = 1$$

ist, so folgt die Bedingung:

$$\operatorname{ctg}^4 \varphi + \frac{\operatorname{ctg}^2 \vartheta}{\sin^2 \varphi} = 1$$

oder

$$\operatorname{ctg}^2 \vartheta = \sin^2 \varphi (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi)(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi),$$

woraus folgt:

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \vartheta = 1.$$

Dies ist die Bedingung zwischen den beiden Kegelöffnungen in den hyperbolischen Hauptebenen, damit der Kegel ein gleichseitiger sei, woraus folgt, daſs beide Kegelöffnungen in den Hauptebenen (2φ und 2ϑ) gröſser als 90^0 sein müssen. Ist diese Bedingung erfüllt, so giebt es ein Tripel rechtwinkliger Kegelstrahlen, folglich unendlich-viele solche Tripel.

Der gleichseitige Kegel besitzt eine Eigenschaft, welche eine auffallende Analogie mit der gleichseitigen Hyperbel in der Ebene erkennen läſst.

Wenn man nämlich drei beliebige Strahlen $x x' x''$ durch einen Punkt $\mathfrak{B}$ zieht und man legt durch den Strahl x eine Ebene normal zur Ebene $[x' x'']$, durch x' eine Ebene normal zu $[x x'']$ und durch x'' eine Ebene normal zu $[x x']$, so schneiden sich bekanntlich diese drei Ebenen in einem Strahl $\boldsymbol{h}$, dem Höhenstrahl des Dreikants $x x' x''$*) und die vier Strahlen

*) Der Höhensatz für das ebene Dreieck ist nur die Umkehrung eines etwas allgemeineren bekannten Satzes: „Die drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks werden von einer geraden Linie in drei Punktepaaren einer Punktinvolution geschnitten" (Th. d. K. § 18).

Ist umgekehrt ein Dreiek $\mathfrak{abc}$ und eine gerade Linie l als Träger einer Punktinvolution gegeben, und sind die Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{bc}, l) = a, \quad (\mathfrak{ca}, l) = b, \quad (\mathfrak{ab}, l) = c,$$

die konjugierten Punkte zu abc in der gegebenen Punktinvolution aber $\alpha\beta\gamma$, so ziehe man

$$\mathfrak{a}\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}\beta,$$

die sich in $\mathfrak{d}$ schneiden mögen, dann sind von dem vollständigen Viereck $\mathfrak{abcd}$ zwei Seitenpaare:

$$\mathfrak{bc} \text{ und } \mathfrak{ad}, \quad \mathfrak{ca} \text{ und } \mathfrak{bd},$$

welche bezüglich die Gerade l in den Punktepaaren:

$$a \text{ und } \alpha, \quad b \text{ und } \beta$$

$xx'x''h$ haben zugleich die Eigenschaft, dafs jeder von ihnen der Höhenstrahl für das aus den drei übrigen gebildete Drei-

---

treffen, durch welche die Punktinvolution vollständig bestimmt ist. Da nun von dem dritten Seitenpaar

$$\mathfrak{ab} \text{ und } \mathfrak{cb}$$

die Seite $\mathfrak{ab}$ durch c geht, so mufs die Seite $\mathfrak{cb}$ durch γ gehen, oder $\mathfrak{c}\gamma$ durch $\mathfrak{b}$ gehen, d. h.

$$\mathfrak{a}\alpha, \quad \mathfrak{b}\beta, \quad \mathfrak{c}\gamma$$

schneiden sich in einem Punkte; nimmt man für l die unendlich-entfernte Gerade g_∞ und für die gegebene Punktinvolution auf g_∞ diejenige, deren Doppelpunkte die beiden imaginären Kreispunkte sind, so erhält man aus dem vorigen Satze den Höhensatz für das ebene Dreieck $\mathfrak{abc}$.

Nimmt man nun von irgend einem Punkte $\mathfrak{B}$ im Raume die Perspektive der ebenen Figur, so erhält man folgenden Satz:

Gehen von einem Punkte $\mathfrak{B}$ des Raumes vier Strahlen $abcd$ aus, so scheiden die Ebenenpaare:

$$[ab] \text{ und } [cd], \quad [ac] \text{ und } [bd], \quad [bc] \text{ und } [ad]$$

eine beliebige durch $\mathfrak{B}$ gelegte Ebene ε in drei Strahlenpaaren einer Strahleninvolution; und die Umkehrung lautet:

Wenn von einem Punkte $\mathfrak{B}$ des Raumes drei Strahlen abc ausgehen, und in einer durch $\mathfrak{B}$ gehenden Ebene ε eine Strahleninvolution gegeben ist, wenn ferner die Ebenen $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ die Ebene ε in den Strahlen

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1$$

schneiden, deren konjugierte in der Strahleninvolution

$$a_2, \quad b_2, \quad c_2$$

sind, dann müssen sich die drei Ebenen $[aa_2]$, $[bb_2]$, $[cc_2]$ in einer Geraden schneiden.

Nehmen wir nun ein Dreikant $\mathfrak{B}|abc|$, und seien die Normalen zu den Ebenen $[bc]$ und $[ca]$ im Punkte $\mathfrak{B}$ die Strahlen a_1 und b_1, ferner $aa_1, bb_1| = h$, dann wird die Ebene $[a_1b_1]$ von dem Ebenenpaar $[bc]$ und $[ah]$ in einem Paare rechtwinkliger Strahlen geschnitten, von dem Ebenenpaar $[ca]$ und $[bh]$ in einem zweiten Paare rechtwinkliger Strahlen, also haben wir in der Ebene $\varepsilon = [a_1b_1]$ eine orthogonale Strahleninvolution, und es mufs auch das dritte Ebenenpaar $[ab]$ und $[ch]$ die Ebene ε in einem Paare rechtwinkliger Strahlen schneiden; c ist aber die Normale der Ebene $[ab]$, wie ersichtlich, folglich ist $[ch]$ auf $[ab]$ rechtwinklig, folglich mufs, wenn c_1 die Normale von $[ab]$ ist im Punkte $\mathfrak{B}$, die Ebene $[ch]$ durch c_1 gehen, also $[cc_1]$ durch h, d. h.

$$[aa_1], \quad [bb_1], \quad [cc_1]$$

müssen sich in einer Geraden schneiden, dem Höhenstrahle h des Dreikants abc. Dies ist der im Texte angeführte Satz vom Höhenstrahl im Dreikant.

kant ist, denn es ist:

$$[xx'] \perp [x''h], \quad [xx''] \perp [x'h], \quad [x'x''] \perp [xh].$$

Legen wir nun eine Ebene ε rechtwinklig zu einem der vier Strahlen z. B. zu h, und wird dieselbe von den vier Strahlen in den Punkten:

$$\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x}', \quad \mathfrak{x}'', \quad \mathfrak{h}$$

durchbohrt, dann ist leicht zu erkennen, dafs von diesen vier Punkten jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks sein mufs.

Denn die Ebene ε, deren Normalstrahl h ist, enthält nur Richtungen, welche zu h rechtwinklig sind, also sind auch die Richtungen von h und $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$ zu einander rechtwinklig. Wenn aber zwei zu einander rechtwinklig gerichtete Strahlen sich im Raume nicht treffen und man durch einen die Ebene rechtwinklig zum andern legt, so enthält dieselbe den kürzesten Abstand zwischen beiden Strahlen, der auf beiden zugleich rechtwinklig ist. Folglich ist das aus $\mathfrak{h}$ auf $|\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''|$ herabgelassene Perpendikel der kürzeste Abstand zwischen den Geraden h und $|\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''|$; also mufs auch die Ebene, welche durch h und diesen kürzesten Abstand geht, die Gerade $|\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''|$ zur Normale haben, mithin auf jeder durch $|\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''|$ gelegten Ebene rechtwinklig stehen, daher auch auf der Ebene $[x'x'']$. Die durch h zur Ebene $[x'x'']$ rechtwinklig gelegte Ebene geht aber durch den Strahl x, mithin auch durch den Punkt $\mathfrak{x}$, daher wird die durch h und den kürzesten Abstand zwischen h und $|\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''|$ gelegte Ebene durch $\mathfrak{x}$ gehen; da der Punkt $\mathfrak{x}$ gleichzeitig in dieser Ebene und in der Ebene ε liegt, so mufs er in der Schnittlinie beider liegen, d. h. der Punkt $\mathfrak{x}$ mufs in dem Perpendikel liegen, welches aus $\mathfrak{h}$ auf $|\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''|$ herabgelassen ist, oder umgekehrt das aus $\mathfrak{x}$ auf $|\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''|$ herabgelassene Perpendikel geht durch $\mathfrak{h}$. Da dasselbe für die beiden übrigen Seiten des Dreiecks $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$ gilt, so ist $\mathfrak{h}$ der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$ w. z. b. w.

Da die vier Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{h}$ so liegen, dafs jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist, so liegen sie auf einer gleichseitigen Hyperbel (Th. d. K. S. 232) oder vielmehr geht ein ganzes Büschel von gleichseitigen Hyperbeln durch diese vier Punkte; weil aber die Ebene ε auf dem Strahle h rechtwinklig steht und eine gleich-

seitige Hyperbel aus einem durch $xx'x''h$ gelegten Kegel ausschneidet, so mufs ein solcher Kegel allemal ein gleichseitiger sein; wir erhalten also die Sätze:

Konstruiert man zu irgend drei Strahlen eines gleichseitigen Kegels den diesem Dreikant zugehörigen Höhenstrahl (d. h. denjenigen Strahl, in welchem sich die drei Ebenen schneiden, welche durch je eine Kante des Dreikants rechtwinklig zur gegenüberstehenden Fläche gestellt werden können), so liegt derselbe allemal auch auf dem gleichseitigen Kegel. Oder auch:

Jeder Kegel zweiter Ordnung, welcher durch ein beliebiges Dreikant und seinen Höhenstrahl gelegt werden kann, ist ein gleichseitiger Kegel; oder auch:

Sämtliche gleichseitige Kegel, welche durch die drei Kanten eines Dreikants gehen, müssen noch einen vierten festen Strahl gemeinschaftlich haben, nämlich den Höhenstrahl des Dreikants. Wir können denselben Satz auch so aussprechen:

Enthält ein Kegel zweiter Ordnung vier Strahlen, von denen jeder der Höhenstrahl des von den drei andern gebildeten Dreikants ist, so enthält er unendlich viele solcher Quadrupel, nämlich zu drei beliebigen Strahlen desselben allemal den zugehörigen Höhenstrahl. Hieraus ergiebt sich eine zwar diskontinuierliche, aber äufserst einfache, netzartig fortschreitende Konstruktion beliebig vieler neuer Kegelstrahlen, sobald vier beliebige Strahlen, welche zur Bestimmung des gleichseitigen Kegels notwendig sind, gegeben werden. Man ordne die vier durch $\mathfrak{B}$ gegebenen Strahlen $abcd$ auf alle vier möglichen Arten zu Dreikanten an und suche für jedes derselben den Höhenstrahl auf; mit den vier Höhenstrahlen kann man in gleicher Weise verfahren und so fortfahren oder die neu erhaltenen Strahlen mit den früheren zu Dreikanten vereinigen und die zugehörigen Höhenstrahlen aufsuchen. Sämtliche auf diese Weise konstruierten Strahlen liegen auf einem und demselben gleichseitigen Kegel.

Die vorige Betrachtung eines Dreikants und seines Höhenstrahls führt zugleich auf ein merkwürdiges Tetraëder von besonderer Art, auf welches schon wiederholt aufmerksam

gemacht worden ist.*) Wir wollen hier kurz auf die Haupteigenschaften dieses Tetraëders und seine Beziehung zu dem gleichseitigen Kegel eingehen, indem wir zugleich die oben gewählte Bezeichnung für den vorliegenden Fall ein wenig abändern:

Gehen von dem Punkte $\mathfrak{d}$ die Kanten $|\mathfrak{da}|$, $|\mathfrak{db}|$, $|\mathfrak{dc}|$ eines beliebigen Dreikants aus, und schneiden die drei durch je eine Kante rechtwinklig zur gegenüberliegenden Fläche des Dreikants gelegten Ebenen sich in dem Höhenstrahle h, wird ferner durch irgend einen Punkt $\mathfrak{h}$ desselben eine zu ihm rechtwinklige Ebene gelegt, welche den drei Kanten des Dreikants in $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ begegnet, so ist oben bewiesen worden, daſs $\mathfrak{h}$ der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{abc}$ ist (Fig. 3). Da also auf der Ebene $[\mathfrak{dah}]$ sowohl die Ebene $[\mathfrak{abc}]$, als auch die Ebene $[\mathfrak{dbc}]$ rechtwinklig ist, so muſs $|\mathfrak{bc}|$ Normale der Ebene $[\mathfrak{dah}]$ sein, also die beiden Gegenkanten $|\mathfrak{da}|$ und $|\mathfrak{bc}|$ des Tetraëders $\mathfrak{abcd}$ müssen rechtwinklig zu einander gerichtet sein; aus gleichen Gründen, die beiden Gegenkanten $|\mathfrak{db}|$ und $|\mathfrak{ca}|$, sowie $|\mathfrak{dc}|$ und $|\mathfrak{ab}|$, und der vorige Satz läſst sich auch so aussprechen:

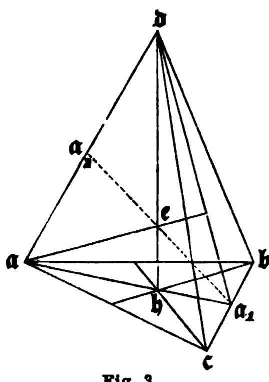


Fig. 3.

Wenn bei einem Tetraëder ein Paar Gegenkanten rechtwinklig zu einander gerichtet ist und noch ein zweites Paar, so ist es auch das dritte Paar.

Ein solches Tetraëder ist von besonderer Art und erfüllt gewisse Bedingungen: Da nämlich $|\mathfrak{bc}|$ die Normale der Ebene $[\mathfrak{dah}]$ ist, so wird, wenn die Höhe $|\mathfrak{ah}|$ in dem Dreieck $\mathfrak{abc}$ der Gegenseite $|\mathfrak{bc}|$ in $\mathfrak{a}_1$ begegnet, $|\mathfrak{bc}|$ auch zu $|\mathfrak{da}_1|$ normal sein müssen, also $|\mathfrak{da}_1|$ eine Höhe des Dreiecks $\mathfrak{dbc}$ sein. Hieraus folgt aber:

$$\mathfrak{ab}^2 - \mathfrak{ac}^2 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{db}^2 - \mathfrak{dc}^2,$$

also $$\mathfrak{ab}^2 + \mathfrak{dc}^2 = \mathfrak{ac}^2 + \mathfrak{db}^2 = \mathfrak{bc}^2 + \mathfrak{da}^2 \quad \text{d. h.:}$$

---

*) Vergl. Baltzer, Elemente der Mathematik B. 5, § 6, 10.

I n d e m b e t r a c h t e t e n T e t r a ë d e r i s t d i e S u m m e d e r Q u a d r a t e e i n e s j e d e n d e r d r e i P a a r e v o n G e g e n - k a n t e n v o n d e m s e l b e n W e r t.

Ferner erkennen wir, weil die Ebene $[\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{h}]$ oder $[\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1]$ zur Normale $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ hat, dafs gegen ein aus $\mathfrak{a}$ auf $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1|$ herabgelassenes Perpendikel, sowohl $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1|$ als auch $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ rechtwinklig gerichtet ist, mithin die Ebene $[\mathfrak{d}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ Normalebene ist für das von $\mathfrak{a}$ auf $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1|$ herabgelassene Perpendikel; dieses ist also eine Höhe des Tetraëders $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und zwar die aus $\mathfrak{a}$ auf $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ herabgelassene Höhe. Da nun in dem Dreieck $\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ die beiden Höhen aus $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}$ zugleich Tetraëderhöhen sind, so müssen sich diese beiden Tetraëderhöhen in einem Punkte $\mathfrak{e}$ treffen. Durch diesen Punkt $\mathfrak{e}$ mufs nun auch die dritte Höhe des Dreiecks $\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ hindurchgehen d. h. das aus $\mathfrak{a}_1$ auf $\mathfrak{d}\mathfrak{a}$ herabgelassene Perpendikel $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$. Demselben können wir noch eine andere Bedeutung beilegen. Es sind nämlich $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ zu einander rechtwinklig gerichtete Gegenkanten, durch $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}|$ ist eine Normalebene $[\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1]$ zur Kante $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ gelegt, und aus $\mathfrak{a}_1$ das Perpendikel auf die Gegenkante $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}|$ herabgelassen; folglich ist $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$ die kürzeste Distanz zwischen den Gegenkanten $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ des Tetraëders. Wir haben also den Satz: die kürzeste Distanz zwischen dem Gegenkantenpaar $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ des Tetraëders geht durch den Punkt, in welchem sich die beiden Höhen aus $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}$ treffen.

Was wir für das Gegenkantenpaar $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ erwiesen haben, gilt aus denselben Gründen auch für das Gegenkantenpaar $|\mathfrak{d}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$ und für das Gegenkantenpaar $|\mathfrak{d}\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$; es müssen sich also auch die Tetraëderhöhen aus $\mathfrak{d}$ und aus $\mathfrak{b}$ und die kürzeste Distanz der Gegenkanten $|\mathfrak{d}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$ in einem Punkte treffen, und drittens müssen sich die Tetraëderhöhen aus $\mathfrak{d}$ und aus $\mathfrak{c}$ und die kürzeste Distanz der Gegenkanten $|\mathfrak{d}\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ in einem Punkte treffen. Die Tetraëderhöhe aus $\mathfrak{d}$ mufs daher sowohl die drei andern Tetraëderhöhen, als auch die drei kürzesten Distanzen $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2|$, $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$ der drei Gegenkantenpaare treffen. Bemerken wir noch, dafs, weil die Kanten $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}|$ rechtwinklig auf einander stehen, und daher die Ebene $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_2]$ zu einer Normale $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}|$ hat, notwendig diese Ebene $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_2]$ die Tetraëderhöhen aus $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und den kürzesten Abstand $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1|$ gleichzeitig enthalten mufs. Da nun

die Tetraëderhöhen aus $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ selbst in einer Ebene liegen d. h. sich treffen, und beide von der Tetraëderhöhe aus $\mathfrak{d}$ getroffen werden, so müſsten entweder alle drei Höhen in einer Ebene liegen, was widersinnig ist, oder sich in einem und demselben Punkte treffen, was allein übrig bleibt. Wir haben hiernach folgende Eigenschaften unseres Tetraëders:

Bei einem Tetraëder $\mathfrak{abcd}$, bei dem zwei Paare von Gegenkanten, also auch das dritte, rechtwinklige Strahlenpaare sind,

1) schneiden sich die vier Tetraëderhöhen in einem und demselben Punkte $\mathfrak{e}$, durch welchen auch die drei Geraden gehen, welche die kürzesten Abstände der drei Paare Gegenkanten enthalten.

2) Die Fuſspunkte der Tetraëderhöhen sind zugleich die Höhenpunkte der Dreiecke, welche die Seitenflächen des Tetraëders bilden.

3) Die fünf Punkte $\mathfrak{abcde}$ liegen so im Raume, daſs je vier von ihnen die Ecken eines Tetraëders sind, dessen Höhen sich in dem fünften Punkte schneiden.

4) Die vier Höhen des Tetraëders liegen so, daſs je drei von ihnen ein Dreikant bilden, dessen Höhenstrahl die vierte Höhe ist; also liegen die vier Höhen allemal auf einem gleichseitigen Kegel.

5) Der Höhenpunkt des Tetraëders teilt jeden der 7 Strahlen, welche durch ihn gehen [1)], in zwei Abschnitte, deren Endpunkte in den Ecken, Flächen und Kanten des Tetraëders liegen, in der Weise, daſs das Rechteck aus diesen Abschnitten einen und denselben Wert hat.

Endlich ergiebt sich noch eine einfache metrische Beziehung zwischen den Kanten eines beliebigen Dreikants und seinem Höhenstrahl; bezeichnen wir nämlich in der obigen Figur die Kanten:

$$\mathfrak{da} = a, \quad \mathfrak{db} = b, \quad \mathfrak{dc} = c$$

und die Höhe $\mathfrak{dh} = h$, so ist offenbar:

$$h = a \cos(ah) = b \cos(bh),$$

und da die beiden Gegenkanten $|\mathfrak{ab}|$ und $|\mathfrak{dc}|$ rechtwinklig zu

einander gerichtet sind, so trifft die durch $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ zu $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|$ rechtwinklig gelegte Ebene die Kante $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|$ in demjenigen Punkte $\mathfrak{c}_2$, welcher der gemeinsame Fufspunkt der aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auf $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|$ herabgelassenen Perpendikel ist, also haben wir:

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c}_2 = a \,.\, \cos(ac) = b \,.\, \cos(bc),$$

und aus diesen beiden Beziehungen folgt:

$$\cos(ah) \,.\, \cos(bc) = \cos(bh) \,.\, \cos(ca) = \cos(ch) \,.\, \cos(ab),$$

wo abc die drei Kanten eines beliebigen Dreikants und h seinen Höhenstrahl bedeutet. —

Das dem gleichseitigen Kegel dual gegenüberstehende Gebilde, nämlich den Kegel, welcher unendlich viele Tripel von je drei zu einander rechtwinkligen Berührungsebenen besitzt und bei dem zwischen den Kegelöffnungen in den Hauptebenen die Bedingung obwaltet:

$$\mathrm{tg}^2\,\varphi + \mathrm{tg}^2\,\vartheta = 1$$

ausführlich zu untersuchen, können wir uns umsomehr ersparen, als dieser Kegel nur der reziproke des gleichseitigen Kegels ist d. h. von den sämtlichen Ebenen umhüllt wird, die normal zu den Strahlen des gleichseitigen Kegels durch den Mittelpunkt desselben gelegt werden können. Eine direkte Untersuchung dieses Kegels würde als zweckmäfsige Übung zu empfehlen sein.

§ 14. Das einfache Hyperboloid.

Wir wenden uns nun zu dem Erzeugnis zweier projektivischen Ebenenbüschel:

$$l[\alpha\beta\gamma\ldots\xi\ldots] \quad \text{und} \quad l_1[\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\xi_1\ldots],$$

deren Axen l und l_1 beliebig im Raume liegen, ohne sich zu treffen. Dieses Erzeugnis ist identisch mit dem Erzeugnis zweier projektivischen geraden Punktreihen, deren Träger beliebig im Raume liegen, ohne sich zu treffen; denn, wenn die veränderliche Ebene ξ_1 des Ebenenbüschels l_1 dem Träger l in dem Punkte $\mathfrak{x}$ begegnet, und wenn die veränderliche Ebene ξ des Ebenenbüschels l dem Träger l_1 in dem Punkte $\mathfrak{x}_1$ begegnet, so ist offenbar die Schnittlinie $|\xi\xi_1|$ identisch mit der Verbindungslinie $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$; denn da

$$\mathfrak{x} = (l\xi_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_1 = (l_1\xi) \text{ ist,}$$

so liegt $\mathfrak{x}$ in der Ebene $\mathfrak{x}_1$ und gleichzeitig in der Ebene $\mathfrak{x}$, weil es auf l liegt, ebenso liegt $\mathfrak{x}_1$ in der Ebene ξ und gleichzeitig in der Ebene ξ_1, weil es auf l_1 liegt, also ist

$$|\xi\xi_1| = |\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|.$$

Das Erzeugnis zweier projektivischen Ebenenbüschel kann also gleichzeitig als Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen aufgefafst werden, deren Träger die Axen der Ebenenbüschel sind, die sich im Raume nicht treffen sollen.

Die sämtlichen Schnittlinien $|\xi\xi_1|$ oder Verbindungslinien $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$ nennen wir eine Regelschar und jede einzelne eine Erzeugende der Regelschar (generatrix). Die Gesamtheit aller Erzeugenden bildet eine Oberfläche zweiter Ordnung, welche wir das einfache Hyperboloid nennen, oder kurzweg Hyperboloid, solange nur von diesem die Rede ist. Wir erkennen unmittelbar, dafs jede Gerade im allgemeinen nur zwei Punkte der Oberfläche enthalten wird (die Doppelpunkte zweier incidenten projektivischen Punktreihen, welche die gegebenen Büschel auf ihr ausschneiden), dafs jede Ebene die Oberfläche im allgemeinen in einem Kegelschnitte schneiden wird (dem Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüschel, welche die gegebenen Büschel auf der Durchschnittsebene ausschneiden).

Die Erzeugenden einer Regelschar bieten als besondere uns bereits bekannte Fälle dar sowohl die sämtlichen Strahlen eines Kegels (wenn die Axen der projektivischen Ebenenbüschel sich treffen), als auch die sämtlichen Tangenten eines Kegelschnitts (wenn die Träger der projektivischen Punktreihen in einer Ebene liegen).

Der Zusammenhang mit dem Kegel tritt noch deutlicher hervor, wenn wir die beiden erzeugenden Büschel mit den Axen l und l_1 ohne ihre Stellung im Raume zu ändern, (d. h. parallel) uns so verschoben denken, bis ihre Axen l l_1 sich in irgend einem Punkte $\mathfrak{B}$ treffen; dann erzeugen sie einen Kegel, und die Kegelstrahlen sind offenbar parallel den Erzeugenden der Regelschar; wir erhalten also den Satz:

Zieht man durch irgend einen Punkt $\mathfrak{B}$ im Raume Parallele zu sämtlichen Erzeugenden einer Regel-

schar, so sind dies die Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung.

Eine Haupteigenschaft der Erzeugenden einer Regelschar besteht darin, daſs keine zwei Erzeugende derselben Regelschar im Raume sich treffen können. Denn wäre dies möglich, d. h. begegnete die Schnittlinie $|\xi\xi_1|$ der Schnittlinie $|\eta\eta_1|$, so müſsten alle vier Ebenen $\xi\ \xi_1\ \eta\ \eta_1$ durch denselben Schnittpunkt hindurchgehen, also müſsten auch die Schnittlinien $|\xi\eta| = l$ und $|\xi_1\eta_1| = l_1$ durch diesen Punkt gehen, d. h. sich treffen, was gegen die Voraussetzung ist. (In diesem Falle artet das einfache Hyperboloid in einen Kegel zweiter Ordnung aus; alle Erzeugenden der ersten Regelschar gehen in die Kegelstrahlen über und diese bilden zugleich die Erzeugenden einer zweiten Regelschar; beide Regelscharen fallen also zusammen, S. 90 und 102).

Dagegen muſs der Konstruktion zufolge die Gerade l und ebenso die Gerade l_1 sämtlichen Erzeugenden $|\xi\xi_1|$ der Regelschar begegnen. Zu diesen beiden Geraden treten nun noch unendlich viele andere von gleicher Beschaffenheit hinzu. Denn nehmen wir irgend drei Paare entsprechender Ebenen der gegebenen projektivischen Ebenenbüschel:

$$\alpha\alpha_1,\quad \beta\beta_1,\quad \gamma\gamma_1$$

und legen durch die Schnittlinie $|\alpha\alpha_1|$ eine beliebige Ebene σ, welche der Schnittlinie $|\beta\beta_1|$ in $\mathfrak{b}$, der Schnittlinie $|\gamma\gamma_1|$ in $\mathfrak{c}$ begegnet, während zugleich $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ mit der Schnittlinie $|\alpha\alpha_1|$ in der Ebene σ den Punkt $\mathfrak{a}$ gemein hat, dann haben wir in einer Geraden drei Punkte:

$$\mathfrak{a},\quad \mathfrak{b},\quad \mathfrak{c}$$

in solcher Lage, daſs

$$[l\mathfrak{a}] = \alpha,\quad [l_1\mathfrak{a}] = \alpha_1$$
$$[l\mathfrak{b}] = \beta,\quad [l_1\mathfrak{b}] = \beta_1$$
$$[l\mathfrak{c}] = \gamma,\quad [l_1\mathfrak{c}] = \gamma_1$$

werden.

Diese drei Ebenenpaare bestimmen die projektivische Beziehung der Büschel vollständig und die Gerade $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ liegt mit beiden perspektivisch, also muſs irgend ein Punkt $\mathfrak{x}$ der Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ mit l und l_1 verbunden zwei entsprechende Ebenen $\xi\xi_1$ in beiden Ebenenbüscheln liefern, oder umgekehrt

mufs jede Schnittlinie $|\xi\xi_1|$ der Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ in einem Punkte $\mathfrak{x}$ begegnen. Wir haben also den Satz:

Eine Gerade, welche irgend drei Erzeugenden einer Regelschar begegnet, mufs sämtliche Erzeugende derselben treffen.

Verändern wir die Ebene σ, welche willkürlich durch $|\alpha\alpha_1|$ gelegt war, so erhalten wir unendlich viele solcher Geraden, die sämtlichen Erzeugenden der Regelschar begegnen. Diese neuen Geraden bilden selbst eine zweite Regelschar; denn bei der Bewegung von σ beschreiben $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ projektivische Punktreihen, weil sie in demselben Ebenenbüschel $|\alpha\alpha_1|[\sigma]$ liegen; die Verbindungslinien $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ sind also das Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen, deren Träger $|\beta\beta_1|$ und $|\gamma\gamma_1|$ sich nicht treffen, also, wie wir oben gesehen haben, identisch mit dem Erzeugnis zweier projektivischen Ebenenbüschel d. h. einer Regelschar. Wir haben also folgendes Ergebnis:

Es giebt unendlich viele Gerade l_x, deren jede den sämtlichen Erzeugenden g_x einer Regelschar begegnet. Diese Geraden l_x bilden selbst eine zweite Regelschar, zu welcher insbesondere auch die Axen ll_1 der beiden erzeugenden Ebenenbüschel gehören. Während keine zwei Erzeugenden derselben Regelschar sich treffen können, mufs jede Erzeugende der ersten Regelschar jede der zweiten treffen. Die beiden Regelscharen erfüllen also in doppelter Weise das einfache Hyperboloid dergestalt, dafs durch jeden Punkt desselben nur eine Erzeugende der ersten und eine Erzeugende der zweiten Regelschar geht.

Da auf den beliebig gewählten Trägern $|\beta\beta_1|$ und $|\gamma\gamma_1|$ die Punkte $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, in welchen die Erzeugende $l_x = |\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ ihnen begegnet, projektivische Punktreihen durchlaufen, (weil beide in demselben von σ beschriebenen Ebenenbüschel liegen), so erhalten wir folgenden doppelten Satz:

Irgend zwei Erzeugende der einen Regelschar werden von sämtlichen Erzeugenden der andern Regelschar allemal in zwei

Irgend zwei Erzeugende der einen Regelschar mit sämtlichen Erzeugenden der anderen Regelschar durch Ebenen verbunden

projektivischen Punktreihen getroffen.

sind allemal die Axen zweier projektivischen Ebenenbüschel.

Hierdurch verlieren die beiden Axen der ursprünglich erzeugenden projektivischen Ebenenbüschel ihre Eigentümlichkeit und treten ohne Bevorzugung in die Gesamtheit aller übrigen Erzeugenden l_x der einen Regelschar ein, so dafs dasselbe einfache Hyperboloid auf unendlich viele Arten (in doppelter Weise) erzeugt werden kann, indem man irgend zwei Erzeugende der einen Schar als Axen zweier projektivischen Ebenenbüschel wählen kann, deren entsprechende Ebenenpaare sich in den sämtlichen Erzeugenden der andern Regelschar schneiden.

Wir können den Zusammenhang der beiden zusammengehörigen Regelscharen auch so aussprechen:

Ist eine Regelschar $l l_1 l_2 \ldots$ gegeben, und legen wir durch l eine beliebige Ebene, so schneidet dieselbe sämtliche übrigen Erzeugenden $l_1 l_2 \ldots$ in Punkten einer geraden Linie g. Durch Veränderung der Ebene erhalten wir sämtliche Erzeugende g_x der zugehörigen Regelschar.

Ist eine Regelschar $l l_1 l_2 \ldots$ gegeben, und verbinden wir einen beliebigen Punkt auf l mit sämtlichen Erzeugenden $l_1 l_2 \ldots$ durch Ebenen, so laufen dieselben durch eine und dieselbe Gerade g. Durch Veränderung des Punktes auf l erhalten wir sämtliche Erzeugende g_x der zugehörigen Regelschar.

Wir müssen diesen Sätzen noch einen dritten, in der Mitte stehenden oder dieselben verbindenden Satz hinzufügen:

Wird eine beliebige Erzeugende l einer Regelschar mit sämtlichen Erzeugenden g_x der anderen Regelschar durch Ebenen verbunden, so erhält man ein Ebenenbüschel, welches projektivisch ist mit derjenigen geraden Punktreihe, welche auf dem Träger l die sämtlichen Erzeugenden g_x ausschneiden; und zwar ist jenes Ebenenbüschel mit dieser Punktreihe als perspektivisch liegend anzusehen.

Durch irgend drei Gerade im Raume ll_1l_2, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, sind die beiden zusammengehörigen Regelscharen also das ganze einfache Hyperboloid vollständig und eindeutig bestimmt; denn man braucht nur zwei von den gegebenen Geraden l und l_1 als die Axen zweier Ebenenbüschel, die dritte l_2 als den Träger einer Punktreihe $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots)$ zu wählen und die beiden Ebenenbüschel projektivisch so auf einander zu beziehen, dafs $[l\mathfrak{x}] = \xi$ und $[l_1\mathfrak{x}] = \xi_1$ entsprechende Ebenen sind, dann durchläuft die Schnittlinie $|\xi\xi_1| = g_x$ die ganze erste Regelschar. Oder man braucht nur eine der drei gegebenen Geraden l_2 als die Axe eines Ebenenbüschels anzusehen, dessen veränderliche Ebene σ den beiden Geraden l und l_1 in entsprechenden Punten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ zweier projektivischen Punktreihen begegnet, dann beschreibt die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1| = g_x$ die ganze erste Regelschar. Wählt man irgend drei Erzeugende gg_1g_2 dieser ersten Regelschar und führt mit ihnen dieselbe Konstruktion aus wie mit den gegebenen drei Geraden, so erhält man die sämtlichen Erzeugenden l_x der zweiten Regelschar, zu welcher auch die gegebenen Geraden ll_1l_2 selbst gehören.

Wir haben also das Ergebnis:

D u r c h d r e i b e l i e b i g i m R a u m e g e w ä h l t e G e r a d e ll_1l_2, v o n d e n e n k e i n e z w e i s i c h b e g e g n e n, i s t e i n e R e g e l s c h a r v o l l s t ä n d i g u n d e i n d e u t i g b e s t i m m t, i n d e m s i e a u s s ä m t l i c h e n G e r a d e n g_x b e s t e h t, w e l c h e d e n g e g e b e n e n ll_1l_2 g l e i c h z e i t i g b e g e g n e n. D i e z u g e h ö r i g e R e g e l s c h a r v o n E r z e u g e n d e n l_x e r h ä l t m a n, i n d e m m a n i r g e n d d r e i E r z e u g e n d e gg_1g_2 d e r e r s t e n R e g e l s c h a r n i m m t u n d s ä m t l i c h e G e r a d e l_x k o n s t r u i e r t, d i e g l e i c h z e i t i g gg_1g_2 b e g e g n e n; z u d i e s e n g e h ö r e n a u c h ll_1l_2.

Das einfache Hyperboloid ist also durch drei Gerade, die auf ihm liegen sollen und von denen keine zwei in einer Ebene liegen, vollständig und eindeutig bestimmt; Konstruktionen durch andere Bestimmungsstücke werden wir später kennen lernen (§ 16).

Aus der oben dargelegten projektivischen Natur der beiden zusammengehörigen Regelscharen ergeben sich durch Umkehrung folgende mitunter nützliche Sätze:

Wenn man im Raume irgend drei einander nicht begegnende Gerade $l_1 l_2 l_3$ und die Regelschar sämtlicher Geraden g_x hat, die gleichzeitig die drei ersten in den Punkten:

$$\mathfrak{p}_{1x}, \quad \mathfrak{p}_{2x}, \quad \mathfrak{p}_{3x}$$

treffen, und man auf der veränderlichen Geraden g_x zu diesen drei Punkten einen solchen vierten Punkt $\mathfrak{p}_{4x}$ konstruiert, dafs das Doppelverhältnis:

$$(\mathfrak{p}_{1x}\,\mathfrak{p}_{2x}\,\mathfrak{p}_{3x}\,\mathfrak{p}_{4x}) = c$$

bei gegebener Zuordnung einen gegebenen konstanten Wert behält, so ist der Ort aller Punkte $\mathfrak{p}_{4x}$ eine bestimmte Gerade l_4, welche der Regelschar $|l_x|$ angehört.

Wenn man im Raume irgend drei einander nicht begegnende Gerade $l_1 l_2 l_3$ hat und die ganze Regelschar der Erzeugenden g_x, die gleichzeitig mit den drei ersten in je einer Ebene:

$$\varepsilon_{1x}, \quad \varepsilon_{2x}, \quad \varepsilon_{3x}$$

liegen und man durch die veränderliche Erzeugende g_x eine vierte Ebene ε_{4x} konstruiert, so dafs das Doppelverhältnis der vier Ebenen:

$$[\varepsilon_{1x}\,\varepsilon_{2x}\,\varepsilon_{3x}\,\varepsilon_{4x}] = c$$

bei gegebener Zuordnung einen gegebenen konstanten Wert behält, so laufen alle Ebenen ε_{4x} durch eine feste Gerade l_4, welche der Regelschar $|l_x|$ angehört.

Ist insbesondere der Wert des konstanten Doppelverhältnisses $= -1$, so erhält man bei bestimmter Zuordnung (die auf drei verschiedene Arten möglich ist) zu den drei gegebenen Erzeugenden $l_1 l_2 l_3$ eine bestimmte vierte harmonische Erzeugende l_4 derselben Regelschar; vier Erzeugende $l_1 l_2 l_3 l_4$ einer Regelschar heifsen nämlich harmonisch gelegen, sobald irgend eine Erzeugende g_x der andern Regelschar von ihnen in vier harmonischen Punkten getroffen wird; durch Veränderung des konstanten Wertes c erhält man sämtliche Erzeugende l_x dieser Regelschar. (Vergl. Th. d. K. S. 125.)

Wir haben gesehen, dafs drei beliebige Gerade $l\, l_1\, l_2$, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, von unendlich vielen Geraden g_x gleichzeitig getroffen werden, welche eine Regelschar $|g_x|$ bilden. Es entsteht jetzt die Frage: Können

vier beliebig im Raume gegebene Gerade $l l_1 l_2 l_3$, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, gleichzeitig von einer Geraden g getroffen werden?

Um diese Frage zu beantworten, lassen wir auf l_2 einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}_2$ sich bewegen und legen die Ebenen:

$$[l \mathfrak{x}_2] \quad \text{und} \quad [l_1 \mathfrak{x}_2],$$

welche bei der Bewegung von $\mathfrak{x}_2$ zwei projektivische Ebenenbüschel $l[\mathfrak{x}_2]$ und $l_1[\mathfrak{x}_2]$ beschreiben werden, weil beide mit der Punktreihe $(\mathfrak{x}_2)$ perspektivisch liegen. Schneiden nun die veränderlichen Ebenen $[l \mathfrak{x}_2]$ und $[l_1 \mathfrak{x}_2]$ die vierte Gerade l_3 in den Punkten:

$$\mathfrak{x}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_3',$$

so beschreiben $\mathfrak{x}_3$ und $\mathfrak{x}_3'$ zwei auf einander liegende projektivische Punktreihen, welche im allgemeinen zwei Doppelpunkte haben, die die Lösung der Aufgabe liefern; denn die beiden Ebenen, welche durch einen dieser Doppelpunkte und die Geraden l und l_1 gelegt werden, schneiden sich in einer Geraden, die offenbar auch l_2 begegnen mufs. Also:

Es giebt im allgemeinen zwei Gerade, welche gleichzeitig vier im Raume gegebenen Geraden $l l_1 l_2 l_3$, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, begegnen.

Diese beiden Geraden können aber auch zusammenfallen oder imaginär sein, je nachdem die beiden von $\mathfrak{x}_3$ und $\mathfrak{x}_3'$ beschriebenen auf l_3 liegenden projektivischen Punktreihen reelle, zusammenfallende oder imaginäre Doppelpunkte haben.

Die Konstruktion der Geraden ist demnach auf ein bekanntes fundamentales Problem zurückgeführt.

Es kann hierbei der besondere Fall eintreten, dafs die beiden von $\mathfrak{x}_3$ und $\mathfrak{x}_3'$ beschriebenen Punktreihen identisch zusammenfallen, also die Aufgabe unendlich viele Auflösungen hat. Dies mufs stattfinden, wenn die beiden projektivischen auf einander liegenden Punktreihen drei Paare entsprechender Punkte zusammenfallend haben, d. h. wenn es drei Gerade g giebt, welche gleichzeitig den vier gegebenen $l l_1 l_2 l_3$ begegnen. Also:

Wenn es drei Gerade giebt, die gleichzeitig vier im Raume gegebenen Geraden $l l_1 l_2 l_3$ begegnen,

so giebt es deren unendlich viele, d. h. jede Gerade, die dreien von ihnen begegnet, mufs auch die vierte treffen.

Diese Bedingung für die vier Geraden $l\, l_1\, l_2\, l_3$ kommt mit der überein, dafs sie einer Regelschar angehören, welche schon durch drei von ihnen bestimmt wird. Wir sagen von vier Geraden, die derselben Regelschar angehören, sie haben *hyperboloidische Lage.*

Diese Bedingung ist gleichwertig mit der, dafs drei Punkte auf einer Geraden liegen oder drei Gerade sich in einem Punkte treffen oder drei Ebenen durch eine Gerade laufen oder vier Ebenen durch einen Punkt gehen oder vier Punkte in einer Ebene liegen.

Ein Beispiel für eine solche Lage von vier Geraden bietet folgender Satz:

Die vier Höhen eines allgemeinen Tetraëders haben hyperboloidische Lage, d. h. gehören einer Regelschar an.

In der That, seien $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ die vier Ecken eines allgemeinen Tetraëders und bezeichnen wir die vier Seitenflächen desselben durch:

$$\alpha = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}], \quad \beta = [\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}], \quad \gamma = [\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}], \quad \delta = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}].$$

Die auf diesen vier Seitenflächen errichteten Normalen mögen die unendlich-entfernten Punkte:

$$\mathfrak{a}_1^\infty, \quad \mathfrak{b}_1^\infty, \quad \mathfrak{c}_1^\infty, \quad \mathfrak{d}_1^\infty$$

haben, dann schneiden sich nach einem früher bewiesenen Satze (S. 80) in dem Dreikant, welches zur Ecke $\mathfrak{a}$ und zu Kanten $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|$ hat, die drei durch die Kanten zu den gegenüberliegenden Flächen gelegten Normalebenen in einem Strahle (Höhenstrahl des Dreikants), d. h. die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1^\infty], \quad [\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1^\infty], \quad [\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1^\infty]$$

schneiden sich in einer Geraden, welche, da sie durch $\mathfrak{a}$ geht, die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^\infty$ trifft (in $\mathfrak{a}$). Nun sind aber die vier Geraden:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^\infty|, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1^\infty|, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1^\infty|, \quad |\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1^\infty|$$

nichts anderes als die Höhen des Tetraëders d. h. die aus den vier Ecken auf die gegenüberliegenden Seitenflächen des

Tetraëders herabgelassenen Perpendikel; folglich werden alle vier Höhen von dem vorigen Strahle getroffen, in gleicher Weise aber auch von dem Höhenstrahle des Dreikants $\mathfrak{b} | \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d} |$, ebenso des Dreikants $\mathfrak{c} | \mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{a} |$ und endlich auch des Dreikants $\mathfrak{d} | \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} |$. Wir haben also nicht blofs drei, sondern vier Strahlen kennen gelernt von der Eigenschaft, dafs jeder allen vier Höhen des Tetraëders gleichzeitig begegnet; folglich haben dieselben hyperboloidische Lage, w. z. b. w.

Wir bemerken noch, dafs, sobald sich zwei Höhen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^\infty$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1^\infty$ treffen oder in einer Ebene liegen, auf dieser Ebene sowohl die Tetraëderfläche α als auch die Tetraëderfläche β rechtwinklig stehen mufs, folglich auch ihre Schnittlinie $|\alpha\beta| = |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ und da die Tetraëderkante $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ auf der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1^\infty\mathfrak{b}_1^\infty]$, rechtwinklig steht, so müssen die Gegenkanten $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ des Tetraëders rechtwinklig zu einander gerichtet sein; umgekehrt müssen, weil die Gegenkanten $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ rechtwinklig zu einander gerichtet sind, auch die beiden andern Höhen $|\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1^\infty|$ und $|\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1^\infty|$ in einer Ebene liegen d. h. sich treffen. Wir haben also den Satz:

Wenn zwei Höhen eines Tetraëders sich treffen, so müssen auch die beiden andern Höhen desselben sich treffen, und die Bedingung hiefür ist, dafs ein Paar Gegenkanten des Tetraëders rechtwinklig zu einander gerichtet sei.

Ist endlich noch ein zweites Paar Gegenkanten rechtwinklig zu einander gerichtet, so müssen alle vier Höhen sich in einem Punkte treffen, also auch das dritte Paar Gegenkanten rechtwinklig sein, und wir haben das besondere Tetraëder, welches auf Seite 84 bis 86 betrachtet ist.

§ 15. Mittelpunkt und Asymptotenkegel des Hyperboloids.

Wir können die Erzeugenden der beiden Regelscharen auf dem Hyperboloid einander paarweise zuordnen, indem wir zu jeder Erzeugenden l_x der einen Regelschar die einzige bestimmte Erzeugende g_x, welche mit ihr parallel ist, zuordnen. Sind l und l_1 die Axen der beiden projektivischen Ebenenbüschel, welche das Hyperboloid erzeugen und l_x eine beliebige Erzeugende derjenigen Regelschar, welcher l und l_1

angehören; legen wir sodann durch l eine Ebene parallel zu l_x (d. h. durch den unendlich-entfernten Punkt von l_x) und ebenfalls durch l_1 eine Ebene parallel zu l_x, so schneiden sich dieselben in einer Geraden g_x, welche offenbar parallel mit l_x ist und der zweiten Regelschar angehört.

Nehmen wir irgend drei solcher Paare paralleler Erzeugenden aus den beiden Regelscharen heraus:

$$l \text{ und } g, \quad l_1 \text{ und } g_1, \quad l_2 \text{ und } g_2,$$

so haben dieselben außer den drei unendlich-entfernten Schnittpunkten, da jede l_x jede g_x treffen muß, noch sechs andere Schnittpunkte gemein, nämlich:

$$(lg_1), \quad (lg_2), \quad (l_1g_2),$$
$$(l_1g), \quad (l_2g), \quad (l_2g_1).$$

Diese sechs Punkte haben eine eigentümliche Lage zu einander. Die drei Ebenen:

$$[l_1g_2], \quad [l_2g_1], \quad [lg]$$

schneiden sich nämlich in einem unendlich entfernten Punkte, weil die beiden Ebenen $[l_1g_2]$ und $[l_2g_1]$ einander parallel laufen (denn l_1 und g_1 sind parallel, ebenso l_2 und g_2), und die Schnittlinie $|[l_1g_2], [l_2g_1]|$ dieser beiden Ebenen ist identisch mit der Verbindungslinie der beiden unendlich-entfernten Punkte (l_1g_1) und (l_2g_2), weil sowohl der eine als auch der andere dieser beiden Punkte gleichzeitig in den Ebenen $[l_1g_2]$ und $[l_2g_1]$ liegt.

Da also die Ebenen $[l_1g_2]$ und $[l_2g_1]$ parallel laufen, d. h. ihre Schnittlinie im Unendlichen liegt, so trifft die Ebene $[lg]$ sie in einem unendlich entfernten Punkte, in welchem sich alle drei Ebenen, also auch die Schnittlinien je zweier treffen; also

die Schnittlinie der Ebenen $[lg]$ und $[l_1g_2]$
„ „ „ „ $[lg]$ „ $[l_2g_1]$
„ „ „ „ $[l_1g_2]$ „ $[l_2g_1]$

laufen einander parallel, d. h. alle drei nach demselben unendlich-entfernten Punkte.

Nun ist unmittelbar ersichtlich, daß die Schnittlinie der Ebenen $[lg]$ und $[l_1g_2]$ identisch ist mit der Verbindungslinie der Punkte (lg_2) und (l_1g), ebenso die Schnittlinie

der Ebenen $[lg]$ und $[l_2 g_1]$ identisch ist mit der Verbindungslinie der Punkte (lg_1) und $(l_2 g)$, endlich die Schnittlinie der Ebenen $[l_1 g_2]$ und $[l_2 g_1]$ identisch ist mit der Verbindungslinie der Punkte $(l_1 g_1)$ und $(l_2 g_2)$. Da aber diese letzten beiden Punkte unendlich-entfernt sind, also ihre Verbindungslinie ganz im Unendlichen liegt, so müssen die beiden Verbindungslinien:

$$|(lg_2)(l_1 g)| \quad \text{und} \quad |(lg_1)(l_2 g)|$$

parallel sein; diese vier Punkte:

$$(lg_2), \quad (l_1 g), \quad (lg_1), \quad (l_2 g)$$

liegen aber auf den beiden parallelen Geraden l und g und aufserdem auf den vorigen beiden parallelen Geraden; sie sind also die Ecken eines Parallelogramms, dessen Diagonalen

$$|(lg_1)(l_1 g)| \quad \text{und} \quad |(lg_2)(l_2 g)|$$

sich halbieren in ihrem Treffpunkte. Dieser Punkt $\mathfrak{M}$, durch welchen, wie offenbar ist, auch die Verbindungslinie:

$$|(l_1 g_2)(l_2 g_1)|$$

halbiert wird, soll der **Mittelpunkt** des Hyperboloids genannt werden.

Durch den Mittelpunkt des Hyperboloids gehen, wie wir hieraus erkennen, sämtliche Ebenen

$$[g_i l_i],$$

welche je zwei parallele Erzeugende aus beiden Regelscharen verbinden, und durch diesen Mittelpunkt werden sämtliche Verbindungslinien:

$$|(g_i l_k)(g_k l_i)|$$

halbiert, wo $g_i l_i$ und $g_k l_k$ irgend zwei Paare paralleler Erzeugender bedeuten. Da nun durch jeden Punkt des Hyperboloids, wie wir wissen, eine bestimmte Erzeugende g_i und eine bestimmte Erzeugende l_k (aus den beiden Regelscharen) gehen mufs, so können wir auch sagen, dafs alle Strahlen, welche durch den Punkt $\mathfrak{M}$ gelegt werden und das Hyperboloid in reellen Punktepaaren treffen, die Mitte zwischen denselben in $\mathfrak{M}$ haben, wodurch der Name „Mittelpunkt des Hyperboloids“ gerechtfertigt wird.

Wenn wir durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Hyperboloids Parallele ziehen zu sämtlichen Paaren (g_i, l_i) paralleler Er-

zeugenden d. h. zu den Erzeugenden der einen oder der andern Regelschar, so erhalten wir (S. 88) die sämtlichen Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung, welcher dieselben unendlich-entfernten Punkte hat, wie das Hyperboloid. Dieser Kegel heifst der **Asymptotenkegel** des Hyperboloids; er wird gebildet von den Strahlen, welche aus dem Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ nach den sämtlichen reellen unendlich-entfernten Punkten des Hyperboloids hingehen; diese liegen in der unendlich-entfernten Ebene ε_∞ auf einem gewissen Kegelschnitt, vermittelst dessen wir imstande sind, die Natur der Durchschnittskurve einer jeden Ebene mit dem Hyperboloid zu beurteilen.

Denn irgend eine Transversalebene ε schneidet das Hyperboloid in einem Kegelschnitt $h^{(2)}$ und den Asymptotenkegel in einem Kegelschnitt $k^{(2)}$, die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ aber in einer Geraden l_∞, und da Hyperboloid und Asymptotenkegel dieselben unendlich-entfernten Punkte haben in ε_∞, so müssen $h^{(2)}$ und $k^{(2)}$ dieselben zwei unendlich-entfernten Punkte auf l_∞ haben, welche entweder reell, zusammenfallend oder imaginär sein können, oder, um den reellen und imaginären Fall zu vereinigen, können wir sagen: Die Punktinvolution, welche der Kegelschnitt $k^{(2)}$ auf l_∞ induciert (Th. d. K. S. 140), ist identisch mit derjenigen, welche der Geraden l_∞ in Bezug auf den Kegelschnitt $h^{(2)}$ zugehört. Diese Punktinvolution auf l_∞, je nachdem sie hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist, entscheidet aber darüber, ob der Kegelschnitt $k^{(2)}$ Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist, und zwei Kegelschnitte in einer Ebene, welche dieselbe Punktinvolution auf l_∞ haben, heifsen bekanntlich ähnlich; wir können also sagen:

Eine beliebige Transversalebene schneidet ein einfaches Hyperboloid und seinen Asymptotenkegel allemal in ähnlichen Kegelschnitten.

Wir haben früher beim Kegel die Stellungen derjenigen Ebenen charakterisiert, welche Hyperbeln, Parabeln oder Ellipsen aus ihm ausschneiden, indem wir zuerst alle Ebenen durch den Mittelpunkt des Kegels legten und sie als hyperbolische, parabolische oder elliptische bezeichneten, je nachdem sie den Kegel in einem reellen Linienpaare, in einem zusammenfallenden Linienpaare (Berührungsebenen) oder in einem imaginären Linienpaare (welches als einzigen reellen Punkt den

Kegelmittelpunkt hat) schnitten, sodann aber alle übrigen Ebenen im Raume als mit einer dieser Ebenen parallel auffafsten. Hiernach können wir sagen:

Eine beliebige Transversalebene schneidet das Hyperboloid in einer Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem sie einer hyperbolischen, einer parabolischen (Berührungsebene) oder einer elliptischen Ebene, durch den Mittelpunkt des Asymptotenkegels gelegt, parallel ist.

Um die Grenze zu ermitteln zwischen den beiden Gebieten für die Stellung einer elliptischen und einer hyperbolischen Ebene, bemerken wir, dafs eine Ebene

$$[l_i g_i],$$

welche durch zwei parallele Erzeugende aus je einer der beiden Regelscharen gelegt werden kann, und welche den einen Strahl des Asymptotenkegels, der durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ zu beiden parallel läuft, enthält, keinen andern Strahl des Asymptotenkegels weiter enthalten kann; denn enthielte dieselbe Ebene noch einen zweiten Strahl des Asymptotenkegels, so müfste derselbe den Erzeugenden $l_i g_i$ begegnen, also die beiden Schnittpunkte müfsten dem Hyperboloid angehören und aufserdem auch sein unendlich-entfernter Punkt, d. h. drei Punkte; dieser Strahl des Asymptotenkegels müfste also gleichzeitig eine Erzeugende sein, d. h. g_i und l_i müfsten zusammenfallen, was gegen die Annahme ist.

Da es in der Ebene $[g_i l_i]$ also nur einen einzigen Kegelstrahl des Asymptotenkegels giebt (welcher zwischen beiden Parallelen gleich weit von ihnen absteht), so mufs die Ebene $[g_i l_i]$ eine Berührungsebene des Asymptotenkegels sein; jede mit ihr parallele Ebene schneidet den Asymptotenkegel, folglich auch das Hyperboloid in einer Parabel. Wir haben daher folgendes Resultat:

Diejenigen Ebenen, welche parallel laufen mit einer beliebigen Ebene $[l_i g_i]$, welche zwei parallele Erzeugende aus je einer der beiden Regelscharen verbindet, schneiden das Hyperboloid in Parabeln, alle übrigen in Hyperbeln oder Ellipsen.

Betrachten wir insbesondere die drei Hauptebenen des

Asymptotenkegels, von denen zwei den Kegel in reellen Linienpaaren schneiden, die dritte in einem imaginären Linienpaar, d. h. weiter keinen Punkt, als den Mittelpunkt des Kegels mit diesem gemein hat, so folgt, dafs von diesen drei zu einander rechtwinkligen Ebenen zwei das Hyperboloid in Hyperbeln, die dritte in einer Ellipse schneiden mufs. Dafs letztere reell vorhanden ist, geht daraus hervor, dafs überhaupt jede Ebene das Hyperboloid in einem reellen Kegelschnitt schneiden mufs, weil sie jeder Erzeugenden einer Regelschar in einem reellen Punkte begegnet. Wir nennen die drei Hauptebenen des Asymptotenkegels zugleich Hauptebenen des Hyperboloids. Da der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Hyperboloids zugleich Mittelpunkt jedes Kegelschnitts sein mufs, den irgend eine durch ihn gelegte Ebene aus dem Hyperboloid ausschneidet, so ist er auch gemeinsamer Mittelpunkt für die drei Kegelschnitte in den Hauptebenen des Hyperboloids. Jede Ebene ε, die durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Asymptotenkegels gelegt wird, enthält in dem Polarbündel, dessen Kernkegel der Asymptotenkegel ist, eine Strahleninvolution durch $\mathfrak{M}$; diese liegt mit der Punktinvolution auf der unendlich-entfernten Geraden dieser Ebene ε perspektivisch, die ihr zugehört in Bezug auf den in ε_∞ liegenden Kegelschnitt, welcher dem Asymptotenkegel und dem Hyperboloid gemeinschaftlich ist. Da nun $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt des Kegelschnitts ist, den die Ebene ε aus dem Hyperboloid ausschneidet, so ist jene Strahleninvolution das System der konjugierten Durchmesser für den Durchschnittskegelschnitt. Es sind daher die in jeder Hauptebene des Asymptotenkegels liegenden beiden Hauptaxen desselben zugleich die Hauptaxen desjenigen Kegelschnitts, welchen diese Hauptebene aus dem Hyperboloid ausschneidet. Wir nennen daher die drei Hauptaxen des Asymptotenkegels zugleich die drei Hauptaxen des Hyperboloids und erkennen, dafs zwei derselben (diejenigen der Hauptellipse) dem Hyperboloid in reellen Punktepaaren begegnen, die dritte nicht. Diese wollen wir zur Fixierung der Begriffe die a-Axe, von den beiden andern die kleinere die b-Axe, die gröfsere die c-Axe nennen, so dafs also $2b$ und $2c$ die Hauptaxen der reellen Ellipse in der einen Hauptebene $[bc]$ und zugleich die reellen Zwerg-

axen der beiden Hyperbeln in den beiden andern Hauptebenen ($[b\,a]$ und $[c\,a]$) des Hyperboloids sind.

Denken wir uns den Asymptotenkegel und die elliptische Hauptaxe (a-Axe) desselben, welche in das Innere des Kegels hineinfällt, die auf ihr rechtwinklige Hauptebene ($[b\,c]$-Ebene) und in derselben die Hauptellipse des Hyperboloids ermittelt, so ergiebt sich folgende Konstruktion des ganzen Hyperboloids, die zugleich eine anschauliche Vorstellung von dieser Oberfläche vermittelt: Wir ziehen durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Asymptotenkegels und zugleich der Hauptellipse Durchmesser der letzteren, die in dem Punktepaar $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ ihr begegnen; durch den Strahl $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'|$ gehen zwei reelle Berührungsebenen an den Asymptotenkegel, welche längs zweier Strahlen t und t_1 den Kegel berühren; ziehen wir nun durch $\mathfrak{p}$ zwei Parallele zu t und t_1, die

$$l \quad \text{und} \quad g_1$$

heifsen mögen und auch durch $\mathfrak{p}'$ zwei Parallele zu t und t_1, die

$$g \quad \text{und} \quad l_1$$

heifsen mögen, so gehören l und l_1 der einen, g und g_1 der andern Regelschar an und durchlaufen beide Regelscharen mit der Veränderung des Durchmessers $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ der Hauptellipse. Wir können auch so konstruieren, dafs wir um die a-Axe eine veränderliche Ebene drehen, welche den Asymptotenkegel in dem Strahlenpaare $t\,t_1$ schneidet und die Hauptellipse in einem Durchmesser, dessen konjugierter Durchmesser die Endpunkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ habe, dann sind die durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ zu t und t_1 gezogenen Parallelen die vorigen Strahlen $l\,g_1$, $g\,l_1$.

Wir sehen hieraus, wie sich jeder einzelne Kegelstrahl gewissermafsen in zwei Strahlen spaltet, die auf dem Hyperboloid verlaufen: der Kegelstrahl t in l und g, der Kegelstrahl t_1 in g_1 und l_1, und wir erkennen einen gewissen Übergang von der einfachen Schar der Kegelstrahlen zu der doppelten Regelschar der Erzeugenden.

Wenn wir um die elliptische a-Axe des Asymptotenkegels eine Ebene ε drehen, so schneidet dieselbe, wie wir wissen, den Kegel allemal in einem Linienpaar, dessen Winkel halbiert werden durch die a-Axe und die Schnittlinie der Ebene ε mit der $[b\,c]$-Ebene. Diese beiden rechtwinkligen Gera-

den sind die Hauptaxen, das Linienpaar die Asymptoten derjenigen Hyperbel, welche die Ebene ε aus dem Hyperboloid ausschneidet. Ziehen wir durch irgend einen Punkt $\mathfrak{p}$ der a-Axe eine zu ihr rechtwinklige Gerade in der Ebene ε, so schneidet dieselbe bekanntlich die Asymptoten der Hyperbel in einem Punktepaar und die Hyperbel in einem zweiten Punktepaar, welche so liegen, daſs sie denselben Mittelpunkt $\mathfrak{p}$ haben. Hieraus folgt durch Drehung der Ebene ε um die a-Axe, daſs die durch $\mathfrak{p}$ parallel zur $[bc]$-Ebene gelegte Ebene aus dem Hyperboloid eine Ellipse ausschneidet, deren Mittelpunkt $\mathfrak{p}$ ist und zusammenfällt mit dem Mittelpunkt derjenigen Ellipse, welche dieselbe aus dem Asymptotenkegel ausschneidet; beide Ellipsen haben daher, da sie ähnlich sind, dasselbe System konjugierter Durchmesser, also auch dieselben Axen der Richtung (nicht der Gröſse) nach.

Die beiden Hyperbeln in der $[ab]$- und $[ac]$-Hauptebene des Hyperboloids enthalten somit die Scheitel einer veränderlichen Ellipse, deren Ebene parallel bleibt der $[bc]$-Ebene. Diese beiden Hyperbeln sind durch ihre Asymptoten, d. h. die Strahlenpaare, welche ihre Ebenen aus dem Asymptotenkegel ausschneiden, und durch die Zwergaxen $2b$ und $2c$ vollständig bestimmt; sie haben dieselbe imaginäre Axe, deren Länge bekanntlich vertreten wird durch das zwischen den Asymptoten abgeschnittene Stück der Scheiteltangente einer Hyperbel; nennen wir dieses $2a$, so sind die beiden Kegelöffnungen des Asymptotenkegels in den Hauptebenen:

in der $[ab]$-Ebene: $\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{a}{b}$,

in der $[ac]$-Ebene: $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a}{c}$,

und wir können folgende Konstruktion des Hyperboloids angeben, die ein deutliches Bild dieser Fläche liefert:

Es werden drei zu einander rechtwinklige von dem Punkte $\mathfrak{M}$ ausgehende Strahlen als die Hauptaxen des Hyperboloids (a-, b-, c-Axe) angenommen, die sie paarweise verbindenden Ebenen als Hauptebenen ($[ab]$-, $[ac]$-, $[bc]$-Ebene). Auf die c-Axe wird von $\mathfrak{M}$ aus nach entgegengesetzten Seiten hin eine gegebene Länge $+c$ und $-c$ abgetragen, wodurch man die Punkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ erhält; auf die b-Axe in gleicher Weise eine

gegebene Länge $+b$ und $-b$ von $\mathfrak{M}$ aus abgetragen, liefert die Endpunkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$. Dann errichtet man in diesen vier Endpunkten $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ Perpendikel auf der $[bc]$-Ebene und trägt auf ihnen nach entgegengesetzten Seiten hin ein drittes Stück $+a$ und $-a$ von diesen vier Punkten aus ab; die Endpunkte der abgetragenen Stücke paarweise verbunden liefern in jeder der beiden Ebenen, der $[ab]$- und $[ac]$-Ebene, zwei Strahlenpaare ss' und tt', die sich in $\mathfrak{M}$ durchkreuzen. Jetzt konstruiere man in der $[ab]$-Ebene die Hyperbel, welche ss' zu Asymptoten und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ zu Scheiteln hat, wodurch sie vollständig bestimmt wird, sie heifse:

$$\mathfrak{H}_{ab}^{(2)};$$

in der $[ac]$-Ebene konstruiere man die Hyperbel, welche tt' zu Asymptoten und $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ zu Scheiteln hat, sie heifse:

$$\mathfrak{H}_{ac}^{(2)};$$

bewegt man eine Ebene parallel zur $[bc]$-Ebene, so wird dieselbe von den beiden Hyperbeln in vier Punkten durchbohrt, welche man zu den Scheiteln einer veränderlichen Ellipse machen kann, die dadurch allemal bestimmt wird. Diese Ellipse liefert nach und nach das ganze Hyperboloid. Offenbar ist die kleinste von allen Ellipsen diejenige, welche zu Scheiteln die Punkte $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ hat, und die in der $[bc]$-Ebene selbst liegt:

$$\mathfrak{E}_{bc}^{(2)}.$$

Die Ellipse erweitert sich bis zum unendlich enfernten Kegelschnitt, sobald die bewegte Ebene ganz in die Unendlichkeit geht.

Ähnliche Konstruktionen liefsen sich mit Hilfe der andern beiden Hauptebenen ableiten, doch würden dieselben nicht ganz so einfach werden. Es genüge, dafs uns die angegebene ein deutliches Bild der Fläche liefert und zugleich die dreifache Symmetrie in Bezug auf jede der drei Hauptebenen erkennen läfst, während die viel einfachere lineare Konstruktion vermittelst der beiden Regelscharen nicht so leicht zu einem anschaulichen Bilde von der Gestalt der Fläche führt.

Wir bemerken noch, dafs die beiden Kreisebenen des Asymptotenkegels und die mit ihnen parallelen Ebenen

notwendig auch aus dem Hyperboloid Kreise ausschneiden; wir erhalten daher auf dem Hyperboloid zwei Scharen von parallelen Kreisen, auf die wir später noch zurückkommen werden.

§ 16. Einige lineare Konstruktionen des Hyperboloids.

1) Wir haben gesehen, dafs durch drei beliebig im Raume gegebene Gerade $l\, l_1\, l_2$, von denen keine zwei sich treffen, das Hyperboloid vollständig bestimmt ist. Indem wir um eine derselben (l) eine Ebene drehen und ihre Schnittpunkte $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2$ mit den beiden andern Geraden $l_1\, l_2$ verfolgen, erhalten wir:

$$|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2| = g_x$$

die ganze Regelschar $|g_x|$, und aus irgend drei Erzeugenden dieser Regelschar erhalten wir in gleicher Weise die andere Regelschar $|l_x|$, zu der die drei ursprünglich gegebenen Geraden gehören.

2) Wenn aber nur zwei sich nicht schneidende Gerade l und l_1 und zwei andere sich nicht schneidende Gerade g und g_1 gegeben sind, von denen jede den beiden ersten begegnet, die also ein windschiefes Vierseit im Raume bilden, so kann man noch einen Punkt $\mathfrak{p}$ willkürlich im Raume annehmen und verlangen, dafs ein Hyperboloid durch diese Elemente gelegt werde. Dasselbe ist hierdurch vollständig und eindeutig bestimmt und kann so konstruiert werden:

Man wähle l und l_1 zu Axen zweier Ebenenbüschel und lege durch jede derselben die drei Ebenen, welche g, g_1 und $\mathfrak{p}$ enthalten; fafst man die drei Ebenenpaare als entsprechende auf, so ist die projektivische Beziehung der beiden Ebenenbüschel dadurch gerade bestimmt und ihr Erzeugnis das gesuchte Hyperboloid.

3) Giebt man zwei Erzeugende l und l_1 der einen Regelschar, eine Erzeugende g der andern, welche l und l_1 trifft, und noch zwei beliebige Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ im Raume, so ist das durch sie gehende Hyperboloid vollständig bestimmt und wird so konstruiert:

Man lege durch l und l_1 als Axen zweier Ebenenbüschel drei Ebenenpaare, welche durch $g, \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ gehen und betrachte diese als entsprechend für die projektivische Be-

ziehung der beiden Büschel; diese wird dadurch gerade bestimmt und die beiden projektivischen Ebenenbüschel l und l_1 erzeugen das gesuchte Hyperboloid.

4) Man giebt zwei Erzeugende l und l_1 derselben Regelschar und aufserdem drei beliebige Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2$ im Raume, dann ist das durch dieselben zu legende Hyperboloid vollständig bestimmt und wird so konstruiert:

Man betrachte in den beiden Ebenenbüscheln:

$$l\,[\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2] \quad \text{und} \quad l_1\,[\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2]$$

die durch die Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2$ gelegten Ebenenpaare als entsprechende für die projektivische Beziehung der beiden Büschel; diese wird dadurch gerade bestimmt, und die beiden projektivischen Büschel l und l_1 erzeugen das gesuchte Hyperboloid.

5) Man giebt eine Gerade l der einen und eine Gerade g der anderen Regelschar, so dafs sich also l und g treffen, und aufserdem vier beliebige Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3$ im Raume, dann ist das durch diese Elemente zu legende Hyperboloid vollständig bestimmt und wird so konstruiert:

Denken wir uns wieder das gesuchte Hyperboloid als Erzeugnis zweier projektivischen Ebenenbüschel und wählen l als Axe des einen, als Axe des andern eine noch näher zu ermittelnde Gerade l_1, die durch einen der vier Punkte, z. B. $\mathfrak{p}_3$ gehe, so müfsten die beiden Ebenenbüschel:

$$l\,[g\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2] \quad \text{und} \quad l_1\,[g\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2]$$

projektivisch sein, also müfste notwendig l_1 in der Ebene $[\mathfrak{p}_3\,g]$ liegen und durch den Punkt $\mathfrak{p}_3$ gehen. Betrachten wir nun die Durchschnittsfigur in der Ebene, die wir durch die drei Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2$ legen können, so wird dieselbe ein Kegelschnitt sein, der durch die drei Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2$ und durch die beiden Punkte $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{g}$ geht, in welchen diese Ebene von den Strahlen l und g durchbohrt wird; durch diese fünf Punkte ist der Kegelschnitt gerade bestimmt; nun mufs aber auf ihm auch der Punkt $\mathfrak{l}_1$ liegen, in welchem die gesuchte Gerade l_1 jene Ebene durchbohrt, und dieser Punkt $\mathfrak{l}_1$ mufs gleichzeitig auf derjenigen Geraden liegen, in welcher die Ebene $[\mathfrak{p}_3\,g]$ der Ebene $[\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2]$ begegnet; diese Gerade geht durch den Punkt $\mathfrak{g}$ des Kegelschnitts; ihr zweiter

Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt ist also der gesuchte Punkt $\mathfrak{l}_1$ und dadurch ist der Strahl l_1 welcher ihn mit $\mathfrak{p}_3$ verbindet, gefunden, also die Axe des zweiten Ebenenbüschels und das ganze Hyperboloid als Erzeugnis der beiden bekannten projektivischen Ebenenbüschel.

Wir können demnach die Gerade l_1 leicht mittelst des Pascalschen Satzes konstruieren, wie folgt:

Der Schnittpunkt der Ebene $[gl]$ und der Verbindungslinie $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1|$ heiſse $\mathfrak{a}$, der Schnittpunkt der Ebene $[g\mathfrak{p}_3]$ und der Verbindungslinie $|\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2|$ heiſse $\mathfrak{b}$, die Verbindungslinie $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ treffe die Ebene $[l\,\mathfrak{p}_2]$ in $\mathfrak{c}$, dann wird die Schnittlinie der durch die drei Punkte $\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_3$ gelegten Ebene mit der durch g und $\mathfrak{p}_3$ gelegten Ebene die gesuchte Gerade l_1 sein, denn wir haben in der Durchschnittsebene $[\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2]$ das Pascalsche Sechseck:

$$\mathfrak{l}\;\mathfrak{g}\;\mathfrak{l}_1\;\mathfrak{p}\;\mathfrak{p}_1\;\mathfrak{p}_2,$$

bei welchem die drei Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden $|\mathfrak{a}\;\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}|$ liegen.

Ist nun l_1 gefunden, so erzeugen die beiden Ebenenbüschel:

$$l\,[\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2] \quad \text{und} \quad l_1\,[\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2]$$

das gesuchte Hyperboloid.

6) Man giebt eine Gerade l und sechs Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{p}_4\,\mathfrak{p}_5$ zur Bestimmung eines Hyperboloids, welches die Gerade und die Punkte enthalten soll.

Wir denken uns das gesuchte Hyperboloid durch zwei projektivische Ebenenbüschel erzeugt, deren eines die Gerade l zur Axe und die fünf Ebenen $l\,[\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{p}_4\,\mathfrak{p}_5]$ zu Elementen hat, während das zweite eine noch näher zu bestimmende durch $\mathfrak{p}$ gehende Axe l_1 hat und zu entsprechenden Elementen die fünf Ebenen $l_1\,[\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{p}_4\,\mathfrak{p}_5]$. Die Gerade l_1, von welcher der Punkt $\mathfrak{p}$ gegeben ist, wird durch die Forderung der Projektivität beider Gebilde vollständig und eindeutig bestimmt, und ihre Konstruktion ist auf das bekannte Chaslessche „Problem der Projektivität“ *) zurückzuführen.

---

*) R. Sturm: „Das Problem der Projektivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades“, Math. Ann. Bd. I, S. 533 ff.

Nehmen wir irgend eine Transversalebene, so wird dieselbe von dem ersten Ebenenbüschel in einem bekannten Strahlenbüschel durchschnitten, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{o}$ der Durchbohrungspunkt der Geraden l mit der Transversalebene und dessen fünf Strahlen die fünf Schnittlinien der Ebenen $l\,[\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{p}_4\,\mathfrak{p}_5]$ mit der Transversalebene sind. Ferner durchbohren die fünf Strahlen $\mathfrak{p}\,|\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{p}_4\,\mathfrak{p}_5|$ die Transversalebene in fünf Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_5$, und es wird ein solcher Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene gesucht, dafs das Strahlenbüschel:

$$\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_5\,|$$

mit dem vorigen bekannten Strahlenbüschel projektivisch werde. Der Punkt $\mathfrak{x}$ ist durch diese Forderung eindeutig bestimmt und kann folgendermafsen gefunden werden:

Durch die vier Punkte $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$ werde zuerst ein solcher Kegelschnitt gelegt, dafs jeder Punkt desselben mit den vier gegebenen verbunden ein Strahlenbüschel liefert, dessen Doppelverhältnis gleich dem des gegebenen Ebenenbüschels $l\,[\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{p}_4]$ sei. Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ kann dadurch gefunden werden, dafs man durch $\mathfrak{a}_1$ zu den drei Strahlen $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_3|$, $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_4|$ einen solchen vierten Strahl konstruiert, den wir mit $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1|$ bezeichnen wollen, dafs die vier Strahlen $\mathfrak{a}_1\,|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4|$ das gegebene Doppelverhältnis haben. Dieser Strahl ist Tangente des gesuchten durch die vier Punkte $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$ gehenden Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher dadurch gerade bestimmt wird. Zweitens lege man in gleicher Weise durch die vier Punkte $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_5$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welcher das gegebene Doppelverhältnis des Ebenenbüschels $l\,[\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{p}_5]$ fafst. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ haben aufser den Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ noch einen einzigen vierten Punkt $\mathfrak{x}$ gemein, welcher der gesuchte ist, weil er die Eigenschaften beider Kegelschnitte in sich vereinigt, also die fünf Strahlen $\mathfrak{x}\,|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_5|$ mit den fünf Ebenen $l\,[\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{p}_4\,\mathfrak{p}_5]$ projektivisch sein müssen.

Ist der Punkt $\mathfrak{x}$ gefunden, so giebt die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{x}|$ den Strahl l_1 und die beiden Ebenenbüschel:

$$l\,[\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3] \quad \text{und} \quad l_1\,[\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3]$$

projektivisch gesetzt erzeugen das gesuchte Hyperboloid.

7) Wenn wir bei der letzten Aufgabe anstatt der Geraden l, welche auf dem Hyperboloid liegen soll, nur zwei Punkte

von ihr nehmen, die sie gerade bestimmen, also mit den übrigen sechs Punkten zusammen acht Punkte annehmen, durch welche ein Hyperboloid gelegt werden soll, so ist diese Aufgabe unbestimmt, denn wir können jede von den 28 Verbindungslinien der acht Punkte als eine gegebene Erzeugende eines Hyperboloids auffassen und erhalten also mittelst der vorigen Konstruktion 28 Hyperboloide, welche sämtlich durch dieselben acht Punkte gehen. Dieses sind indessen nicht alle möglichen, sondern es giebt, wie wir später sehen werden, ein ganzes Bündel von Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch dieselben acht Punkte hindurchgehen.

§ 17. Die Berührungsebenen des Hyperboloids.

Jede Ebene im Raume schneidet, wie wir wissen, das Hyperboloid in einem allemal reellen Kegelschnitt. Unter diesen sämtlichen Kegelschnitten sind diejenigen von besonderem Interesse für uns, welche in Linienpaare zerfallen. Nehmen wir zur Erzeugung des Hyperboloids zwei projektivische Ebenenbüschel:

$$l\,[\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\xi\ldots] \quad \text{und} \quad l_1\,[\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\ldots\xi_1\ldots]$$

an, so wird irgend eine Ebene ε von den Ebenenbüscheln in zwei Strahlenbüscheln durchschnitten, und das Erzeugnis dieser beiden projektivischen Strahlenbüschel ist ein Kegelschnitt $\varepsilon^{(2)}$; soll derselbe zerfallen, so müssen die beiden ihn erzeugenden Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$ getrennt liegen in perspektivischer Lage sich befinden, d. h. $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1|$ mufs zwei entsprechende Strahlen der projektivischen Strahlenbüschel vereinigen, also $[l\mathfrak{o}_1]$ und $[l_1\mathfrak{o}]$ müssen zwei entsprechende Ebenen der erzeugenden projektivischen Ebenenbüschel sein, folglich $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1|$ eine Erzeugende g der Regelschar $|g_x|$. Die Transversalebene ε mufs also durch eine Erzeugende g der einen Regelschar gehen, und der perspektivische Durchschnitt der beiden vorigen projektivischen Strahlenbüschel wird die Erzeugende l_x sein, welche auf dem Hyperboloid liegen mufs und der Regelschar $|g_x|$ nicht angehören kann, weil sie g schneidet, folglich der Regelschar $|l_x|$ angehören mufs. Die gesuchte Ebene ε ist also nichts anderes

als eine Ebene, welche irgend zwei Erzeugende aus je einer der beiden Regelscharen verbindet. Dafs eine solche Ebene ε in der That in einem zerfallenden Kegelschnitt (Linienpaar lg) schneidet, ist selbstverständlich, aber wir haben auch das Umgekehrte bewiesen.

In der Ebene $[lg] = \tau$
ist der Punkt $(lg) = \mathfrak{p}$,
in welchem die beiden Geraden l und g sich treffen von hervorragendem Interesse. Durch diesen Punkt gehen nämlich aufser den beiden Geraden l und g in der Ebene $[lg]$ noch unendlich viele andere Gerade, und jede solche Gerade kann aufser diesem Punkte selbst, der als doppelt aufzufassen ist (Doppelpunkt des Linienpaars l, g), keinen andern Punkt weiter mit dem Hyperboloide gemein haben, weil alle Punkte in der Ebene $[lg]$, die auf dem Hyperboloid liegen, eben nur in den beiden Geraden l und g liegen. Eine Gerade, welche mit dem Hyperboloid zwei zusammenfallende Punkte gemein hat, heifst eine Tangente desselben, folglich sind alle Geraden in der Ebene $[lg]$, die durch den Punkt (lg) gehen, Tangenten des Hyperboloids, sowie Tangenten an allen den Kegelschnitten, welche sämtliche durch den Punkt (lg) gelegten Ebenen aus dem Hyperboloid ausschneiden; denn sie haben eben weder mit dem Hyperboloid noch mit einem dieser Kegelschnitte mehr als diesen Punkt (lg) gemein; wir schliefsen hieraus, da jeder Punkt $\mathfrak{p}$ des Hyperboloids als der Durchschnittspunkt zweier Erzeugenden l und g aus den beiden Regelscharen aufzufassen ist, dafs **alle Tangenten, welche durch einen Punkt des Hyperboloids gehen, in einer Ebene liegen,** und nennen diese die **Berührungsebene** des Hyperboloids in dem gegebenen Punkte (lg). Diese Berührungsebene enthält die beiden Erzeugenden l und g aus den beiden Regelscharen, die durch den Punkt des Hyperboloids gehen. Umgekehrt sehen wir auch ein, dafs jede andere Gerade durch den Punkt (lg), welche nicht in der Ebene $[lg]$ liegt, keine Tangente des Hyperboloids sein kann, sondern dasselbe in zwei verschiedenen Punkten treffen mufs; denn sei s ein beliebiger anderer durch den Punkt $\mathfrak{p} = (lg)$ gezogener Strahl, so würde die durch s und l gelegte Ebene noch eine bestimmte

Erzeugende g' der andern Regelschar enthalten müssen, auf welcher nämlich die Schnittpunkte sämtlicher l_x mit dieser Ebene liegen. Die Erzeugende g' trifft aber den Strahl s in einem zweiten von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Punkte, also ist s keine Tangente des Hyperboloids.

Der Schnittpunkt:

$$\mathfrak{p} = (lg)$$

heifst der Berührungspunkt der Ebene:

$$\tau = [lg]$$

und unter den sämtlichen Tangenten des Hyperboloids, welche durch den Punkt $\mathfrak{p}$ gehen und in der Berührungsebene liegen, giebt es zwei ausgezeichnete, l und g, die ganz dem Hyperboloid angehören:

Wir haben also folgendes Ergebnis:

Ebenso wie sämtliche Punkte $\mathfrak{p}$ auf einer Erzeugenden l_x (aus einer der beiden Regelscharen) als Punkte des Hyperboloids gelten, sind auch sämtliche Ebenen durch l_x als Berührungsebenen desselben aufzufassen; durch jeden Punkt $\mathfrak{p}$ geht aber nur eine einzige bestimmte Berührungsebene, diejenige nämlich, welche l_x mit der einzigen durch $\mathfrak{p}$ gehenden Erzeugenden g_x der andern Regelschar verbindet, und jede durch l_x gehende Berührungsebene hat nur einen einzigen bestimmten Berührungspunkt, nämlich denjenigen, in welchem l_x von der einzigen in dieser Ebene liegenden Erzeugenden g_x der andern Regelschar getroffen wird.

Die Berührungsebenen des Hyperboloids sind zugleich diejenigen, welche dasselbe in zerfallenden Kegelschnitten durchschneiden, und die Berührungspunkte sind die Doppelpunkte dieser Linienpaare; diese selbst sind die Erzeugenden der beiden Regelscharen auf dem Hyperboloid.

Hiernach ist es leicht die Frage zu beantworten:

Welches ist der Ort sämtlicher durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{o}$ im Raume gehenden Berührungsebenen eines gegebenen Hyperboloids?

Da nämlich irgend zwei Erzeugende l und l_1 der einen Regelschar von sämtlichen Erzeugenden g_x der anderen Regelschar in zwei projektivischen Punktreihen l ($\mathfrak{x}$) und l_1 ($\mathfrak{x}_1$) geschnitten werden, und die Ebene [$\mathfrak{o}\, g_x$] eine Berührungsebene ist, welche als Ebene [$\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$] aufgefaſst werden kann, so umhüllt dieselbe (S. 26) einen Kegel zweiter Klasse. Jede dieser Ebenen enthält gleichzeitig eine bestimmte Erzeugende l_x der andern Regelschar und ist eine Berührungsebene des Hyperboloids. Wir haben also folgenden Satz:

Wenn man irgend einen festen Punkt $\mathfrak{o}$ im Raume mit sämtlichen Erzeugenden einer Regelschar durch Ebenen verbindet, so umhüllen diese Ebenen einen Kegel zweiter Klasse; denselben erhält man auch, wenn man $\mathfrak{o}$ mit den Erzeugenden der andern Regelschar verbindet; jede Berührungsebene desselben enthält je eine Erzeugende aus jeder der beiden Regelscharen und ist zugleich Berührungsebene des Hyperboloids, auf welchem die beiden Regelscharen liegen. Wir nennen diesen Kegel den Berührungskegel aus $\mathfrak{o}$ an das Hyperboloid. Er ist, wie wir aus seiner Konstruktion sehen, immer reell, wo auch $\mathfrak{o}$ im Raume liegen mag.

Jede Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{o}^{(2)}$ enthält einen Kegelstrahl, welcher leicht zu finden ist; sei nämlich $\mathfrak{r}$ die Berührungsebene, so muſs sie zwei Erzeugende l und g aus je einer der beiden Regelscharen enthalten; der Schnittpunkt $\mathfrak{p} = (lg)$ mit $\mathfrak{o}$ verbunden liefert offenbar den Kegelstrahl der Berührungsebene $\mathfrak{r}$, denn er ist der einzige, durch den diese Berührungsebene allein und keine andere weiter geht, während durch jeden anderen durch $\mathfrak{o}$ gehenden Strahl s der Ebene $\mathfrak{r}$ zwei Berührungsebenen hindurchgehen; in der That schneidet s die Geraden l und g in zwei Punkten (da er nicht durch $\mathfrak{p}$ geht), und durch diese beiden Punkte gehen zwei bestimmte Erzeugende g_1 und l_1, die mit $\mathfrak{o}$ verbunden zwei verschiedene Berührungsebenen durch s an den Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ liefern; also ist s kein Kegelstrahl; der einzige Strahl $|\mathfrak{o}\mathfrak{p}|$ in der Ebene $\mathfrak{r}$ besitzt die Eigenschaft, daſs durch ihn nur die eine Berührungsebene $\mathfrak{r}$ hindurchgeht; er ist also Berührungs- oder Kegelstrahl. Die Gerade $|\mathfrak{o}\mathfrak{p}|$ ist nach dem Obigen Tangente

des Hyperboloids. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Die sämtlichen Tangenten aus einem Punkte $\mathfrak{o}$ an ein Hyperboloid sind die Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung $\mathfrak{o}^{(2)}$, der mit dem vorigen Berührungskegel identisch ist.

Endlich folgt aus dem Vorigen, daſs durch einen beliebigen Strahl s im Raume im allgemeinen zwei Berührungsebenen des Hyperboloids hindurchgehen; denn nehmen wir irgend einen Punkt $\mathfrak{o}$ im Strahle s als Mittelpunkt eines Berührungskegels an das Hyperboloid, so gehen im allgemeinen durch s zwei Berührungsebenen an den Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$, die zugleich die beiden Berührungsebenen durch s an das Hyperboloid sind; diese können reell oder imaginär sein, je nachdem der Strahl s auſserhalb oder innerhalb des Kegels $\mathfrak{o}^{(2)}$ sich findet. Ist er selbst ein Kegelstrahl, so geht nur eine Berührungsebene durch ihn. Die Wahl des Punktes $\mathfrak{o}$ auf dem willkürlich angenommenen Strahle s ist dabei irrelevant, denn würden wir für eine andere Annahme von $\mathfrak{o}$ ein zweites Paar von Berührungsebenen durch s erhalten, so müſste dies auch ein Paar Berührungsebenen des ersten Kegels sein, was widersinnig ist.

Wenn wir uns durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ im Raume die sämtlichen Berührungsebenen an das Hyperboloid gelegt denken, welche den Berührungskegel umhüllen, so liegt in jeder Berührungsebene ein bestimmter Berührungspunkt $\mathfrak{p} = (lg)$, und wir können nach dem Orte sämtlicher Berührungspunkte fragen. Dieser fällt zusammen mit dem Orte sämtlicher Berührungspunkte der durch $\mathfrak{o}$ an das Hyperboloid gelegten Tangenten $\mathfrak{op}$ oder der Kegelstrahlen.

Der Ort der gesuchten Punkte $\mathfrak{p}$ ist also gemeinschaftlich dem Berührungskegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ und dem Hyperboloid und hierdurch leicht zu ermitteln.

Legen wir nämlich von $\mathfrak{o}$ aus irgend drei Ebenen durch die Erzeugenden $l\, l_1\, l_2$, so schneiden die Ebenen $[\mathfrak{o}l]$, $[\mathfrak{o}l_1]$, $[\mathfrak{o}l_2]$ die übrigen Erzeugenden l_x derselben Regelschar in Punkten, welche auf den drei Erzeugenden $g\, g_1\, g_2$ der andern Regelschar liegen, die in diesen Ebenen enthalten sind. Die drei Punkte:

$$\mathfrak{p} = (lg) \quad \mathfrak{p}_1 = (l_1 g_1) \quad \mathfrak{p}_2 = (l_2 g_2)$$

bestimmen eine Ebene ϖ, welche den Berührungskegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ in einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ und das Hyperboloid in einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ schneiden wird. Beide Kegelschnitte haben nicht nur die Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ gemeinschaftlich, sondern auch dieselben Tangenten in diesen Punkten, nämlich die Schnittlinien der Ebene $[\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2]$ mit den drei Ebenen $[lg]$ $[l_1 g_1]$ $[l_2 g_2]$, weil diese Ebenen gleichzeitig Berührungsebenen des Kegels längs den Kegelstrahlen $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}|$, $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}_1|$, $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}_2|$ und Berührungsebenen des Hyperboloids in den Punkten $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}_1$ $\mathfrak{p}_2$ sind; folglich müssen die beiden Kegelschnitte identisch sein; sie enthalten aber sämtliche Punkte, welche dem Berührungskegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ und dem Hyperboloid gemeinschaftlich sind. Wir haben daher folgenden Satz:

Die Berührungspunkte sämtlicher durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ im Raum an ein Hyperboloid gelegten Berührungsebenen (oder auch Berührungsstrahlen) liegen auf einem ebenen Kegelschnitt $\varpi^{(2)}$.

Umgekehrt schliefsen wir:

Eine beliebige Ebene ϖ schneidet das Hyperboloid in einem Kegelschnitt $\varpi^{(2)}$; legt man durch sämtliche Punkte desselben die Berührungsebenen, so laufen dieselben durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{o}$ und umhüllen einen Kegel zweiten Grades $\mathfrak{o}^{(2)}$, dessen Strahlen die Verbindungslinien des Punktes $\mathfrak{o}$ mit den Punkten des Kegelschnitts $\varpi^{(2)}$ sind.

Den Nachweis für die Richtigkeit dieser Umkehrung können wir dem Leser überlassen.

Die Ebene ϖ enthält nicht nur die Berührungspunkte der durch $\mathfrak{o}$ an das Hyperboloid gelegten Tangenten oder Berührungsebenen, sondern noch unendlich viele andere Punkte und Gerade. Irgend eine durch $\mathfrak{o}$ gelegte Ebene schneidet den Berührungskegel in einem Linienpaar, welches zwei Berührungspunkte enthält, und dieselbe durch $\mathfrak{o}$ gelegte Ebene schneidet das Hyperboloid in einem Kegelschnitt, für welchen das vorige Linienpaar das Tangentenpaar aus $\mathfrak{o}$ sein mufs; die Verbindungslinie der Berührungspunkte, welche ganz in

der Ebene ϖ liegen mufs, wird daher die Polare des Punktes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den Durchschnittskegelschnitt sein, und wir schliefsen hieraus (zunächst für den reellen Fall): *Legt man durch den willkürlichen Punkt $\mathfrak{o}$ im Raume irgend eine Ebene, welche das Hyperboloid in einem Kegelschnitt schneidet, so mufs die Polare des Punktes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf diesen Kegelschnitt in der vorigen Ebene ϖ liegen.*

Hieraus folgt, dafs die Ebene ϖ auch aufgefafst werden kann als der Ort der vierten harmonischen Punkte auf allen Strahlen, welche durch einen Punkt $\mathfrak{o}$ im Raume gelegt werden und das Hyperboloid in Punktepaaren schneiden, so dafs zu jedem Punktepaar und $\mathfrak{o}$ der dem $\mathfrak{o}$ zugeordnete vierte harmonische Punkt bestimmt wird. Wir werden hierdurch geführt zu einer neuen Abhängigkeit der Raumelemente von einander vermittelst des Hyperboloids, analog derjenigen, wie wir sie bereits kennen gelernt haben beim ebenen Polarsystem zwischen Punkten und Geraden in der Ebene, beim Polarbündel zwischen Strahlen und Ebenen durch den Mittelpunkt des Bündels. Hier wird jedem Punkte $\mathfrak{o}$ im Raume eine bestimmte Ebene ϖ zugeordnet, und wir nennen $\mathfrak{o}$ und ϖ *Pol* und *Polarebene* in Bezug auf das Hyperboloid, die Gesamtheit dieser zugeordneten Elemente in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit ein *räumliches Polarsystem*.

Seien $\mathfrak{o}$ und ϖ Pol und Polarebene in Bezug auf das Hyperboloid, und nehmen wir irgend einen Punkt $\mathfrak{o}'$ in der Ebene ϖ, so wird eine beliebige durch $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gelegte Ebene das Hyperboloid in einem reellen Kegelschnitt schneiden, für welchen die Polare von $\mathfrak{o}$, weil sie in ϖ liegen mufs, durch $\mathfrak{o}'$ geht; folglich mufs auch die Polare von $\mathfrak{o}'$ durch $\mathfrak{o}$ gehen, und da diese Polare wieder in der Polarebene des Punktes $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf das Hyperboloid liegen mufs, so folgt die charakteristische Eigenschaft des räumlichen Polarsystems:

Wenn ϖ die Polarebene des Punktes $\mathfrak{o}$ ist, so mufs die irgend einem in ϖ gelegenen Punkte $\mathfrak{o}'$ zugehörige Polarebene ϖ' durch $\mathfrak{o}$ gehen. Und andererseits:

Wenn $\mathfrak{o}$ der Pol einer beliebigen Ebene ϖ ist,

so mufs von irgend einer durch $\mathfrak{o}$ gelegten Ebene ϖ' der Pol $\mathfrak{o}'$ in der Ebene ϖ liegen.

Hieraus folgt weiter, wenn wir zwei beliebige Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ nehmen, deren Polarebenen ϖ und ϖ' sich in dem Strahle s schneiden, dafs von jedem Punkte $\mathfrak{p}$ dieses Strahls s, weil er sowohl in ϖ als auch in ϖ' liegt, die Polarebene sowohl durch $\mathfrak{o}$ als auch durch $\mathfrak{o}'$, d. h. durch die Verbindungslinie $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}'|$ gehen mufs; gleichzeitig mufs aber auch jeder Punkt der Verbindungslinie $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}'|$ eine Polarebene haben, die durch $|\varpi\varpi|$ läuft; denn er liegt gleichzeitig in zwei Ebenen, deren Pole sich auf dem Strahle $|\varpi\varpi'|$ befinden. Wir haben also folgenden Doppelsatz:

Die Polarebenen von sämtlichen Punkten einer Geraden s laufen durch eine zweite Gerade s_1, und die Polarebenen der Punkte auf s_1 laufen wiederum durch s.

Die Pole von sämtlichen Ebenen, die durch eine Gerade s gelegt werden, liegen auf einer zweiten Geraden s_1, und die Pole der durch s_1 gelegten Ebenen liegen wieder auf s.

Solche Geradenpaare ss_1 heifsen daher *konjugierte Gerade* des räumlichen Polarsystems.

Wir müssen hier noch auf einen *Ausnahmefall* aufmerksam machen, der dann eintreten würde, wenn insbesondere die beiden Geraden l und g, in welchen eine Berührungsebene das Hyperboloid schneidet, zusammenfallen; dann würde nämlich diese Berührungsebene nicht blofs einen Berührungspunkt, den Schnittpunkt (l, g), mit dem Hyperboloid haben, sondern unendlich viele, die auf einer Geraden liegen. Dieser Fall kann beim allgemeinen Hyperboloid nicht eintreten; denn setzen wir voraus, dafs l und g zusammenfallen, so müfste eine beliebige durch g gelegte Ebene noch in einer zweiten Erzeugenden l_1 das Hyperboloid schneiden; es müfsten also l und l_1, zwei Erzeugende derselben Regelschar, sich begegnen, folglich müfste (S. 89) das Hyperboloid in einen *Kegel zweiter Ordnung* ausarten, und bei diesem berührt, wie wir wissen, in der That eine Ebene längs einem Kegelstrahle, d. h. hat unendlich viele Berührungspunkte. Zwei Berührungsebenen des Kegels schneiden sich in einem Strahle s, der nun auch nicht blofs einen konjugierten Strahl s_1 hat,

sondern unendlich viele, die in einer Ebene liegen, welche die Berührungsstrahlen der beiden Ebenen verbindet. Der Berührungskegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{o}$ artet in ein Ebenenpaar aus, der Berührungskegelschnitt desselben in ein Linienpaar. Die Polarebene irgend eines Punktes $\mathfrak{o}$ im Raume geht also immer durch den Mittelpunkt des Kegels; alle beliebigen Ebenen des Raumes haben also auch einen und denselben Punkt zu ihrem Pol, nämlich den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Kegels, mit Ausnahme derjenigen Ebenen, welche durch $\mathfrak{M}$ selbst gehen; eine solche Ebene hat aber nicht bloſs einen Pol, sondern unendlich-viele, welche auf einer Geraden liegen, dem Polarstrahle der Ebene in dem Polarbündel $\mathfrak{M}^{(2)}$, dessen Kernfläche der Kegel ist (S. 34). Wir schlieſsen also auch umgekehrt: Wenn zwei verschiedene Ebenen denselben Punkt zum Pol haben in Bezug auf ein Hyperboloid, so muſs dasselbe in einen Kegel ausgeartet sein, dessen Mittelpunkt jener Punkt ist.

Wir brechen hier die Untersuchung des räumlichen Polarsystems ab, welches wir später eingehend zu betrachten haben werden, wobei sich sowohl die projektivische Beziehung der im Polarsystem auftretenden Elemente und die involutorische Lage der daraus entspringenden Gebilde, als auch die ausgezeichneten Elemente des Polarsystems zeigen werden, nämlich die Punkte, die Berührungsebenen und die Erzeugenden der beiden Regelscharen des Hyperboloids.

§ 18. Das Sechsseit auf dem Hyperboloid.*)

Nehmen wir irgend drei Erzeugende:

$$l \quad l_1 \quad l_2$$

der einen Regelschar und drei Erzeugende:

$$g \quad g_1 \quad g_2$$

der andern Regelschar eines einfachen Hyperboloids, so können wir, da jede Erzeugende der einen jede der andern Schar

*) Vergl. Dandelin: Recherches nouvelles sur les sections du cône et sur les hexagones inscrits et circonscrits à ces sections, Annales de mathématiques per J. D. Gergonne t. XV p. 387., Hesse: Über das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid, Crelle's Journal für Mathematik Bd. XXIV, S. 40.

schneidet, aber keine zwei derselben Schar sich treffen, aus diesen Geraden windschiefe Sechsseite zusammenstellen, welche ganz auf dem Hyperboloid verlaufen; wir haben nämlich die neun Schnittpunkte:

$$\begin{matrix} (lg) & (lg_1) & (lg_2) \\ (l_1g) & (l_1g_1) & (l_1g_2) \\ (l_2g) & (l_2g_1) & (l_2g_2) \end{matrix}$$

und gleichzeitig die neun Berührungsebenen gleichen Namens; aus jenen können wir sechs Sechsecke, aus diesen sechs Sechsflache zusammensetzen, deren Seiten auf dem Hyperboloid liegen. Da ferner Punkt $(l_i g_i)$ und Ebene $[l_i g_i]$ Berürungspunkt und Berührungsebene für das Hyperboloid sind, so haben wir in dieser eigentümlichen Figur zugleich eine vollständige Dualität, welche ihre Eigenschaften paarweise auftreten läfst. Die Sechsecke oder Sechsflache lassen sich nach der Reihenfolge ihrer Seiten, deren je zwei auf einander folgende sich treffen, also in einer Ebene liegen, so anordnen:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & l\ g\ l_1\ g_1\ l_2\ g_2 \\ \text{II)} & l\ g_1\ l_1\ g_2\ l_2\ g \\ \text{III)} & l\ g_2\ l_1\ g\ l_2\ g_1 \end{array}\Bigg\}$$

$$\begin{array}{ll} \text{IV)} & l\ g\ l_1\ g_2\ l_2\ g_1 \\ \text{V)} & l\ g_1\ l_1\ g\ l_2\ g_2 \\ \text{VI)} & l\ g_2\ l_1\ g_1\ l_2\ g. \end{array}\Bigg\}$$

Betrachten wir das erste Sechseck:

$$l\,g\,l_1\,g_1\,l_2\,g_2,$$

dessen sechs Ecken die Punkte sind:

$$(lg)\quad (gl_1)\quad (l_1g_1)\quad (g_1l_2)\quad (l_2g_2)\quad (g_2l),$$

so erscheinen die drei Ebenen:

$$[gl_2]\quad [l_1g_2]\quad [g_1l]$$

als diejenigen, in welchen je zwei gegenüberliegende Seiten des Sechsseits (I) sich vorfinden. Diese drei Ebenen schneiden sich aber in einem Punkte, durch welchen auch die drei Durchschnittslinien je zweier von ihnen hindurchgehen.

Nun sehen wir aber, dafs in der Ebene $[gl_2]$ sowohl der Punkt (gl_1) als auch der Punkt (l_2g_2) liegt, und in der

Ebene $[l_1 g_2]$ gleichfalls sowohl der Punkt $(g l_1)$ als auch der Punkt $(l_2 g_2)$, folglich ist die Schnittlinie der beiden Ebenen:

$$[g l_2] \quad \text{und} \quad [l_1 g_2]$$

identisch mit der Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$(g l_1) \quad \text{und} \quad (l_2 g_2);$$

ebenso ist die Schnittlinie der beiden Ebenen:

$$[l_1 g_2] \quad \text{und} \quad [g_1 l]$$

identisch mit der Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$(l_1 g_1) \quad \text{und} \quad (g_2 l),$$

endlich die Schnittlinie der beiden Ebenen:

$$[g_1 l] \quad \text{und} \quad [g l_2]$$

identisch mit der Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$(g_1 l_2) \quad \text{und} \quad (l g);$$

da aber jene drei Durchschnittslinien je zweier der drei Ebenen:

$$[g l_2] \quad [l_1 g_2] \quad [g_1 l]$$

durch einen Punkt laufen, so müssen auch in dem Sechseck:

$$(l g) \quad (g l_1) \quad (l_1 g_1) \quad (g_1 l_2) \quad (l_2 g_2) \quad (g_2 l)$$

die drei Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken sich in einem Punkte treffen. Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

a) Bei einem auf dem einfachen Hyperboloid liegenden geradlinigen Sechseck, dessen geradstellige Seiten Erzeugende der einen und dessen ungeradstellige Seiten Erzeugende der andern Regelschar sind, schneiden sich allemal die drei Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken (Hauptdiagonalen) in einem Punkte.

Zweitens betrachten wir dasselbe Sechsseit I) als *Sechsflach*, dessen auf einander folgende Seitenflächen sind:

$$[l g] \quad [g l_1] \quad [l_1 g_1] \quad [g_1 l_2] \quad [l_2 g_2] \quad [g_2 l],$$

indem immer zwei auf einander folgende sich in einer Seite des Sechsflachs schneiden.

Nehmen wir nun die drei Punkte:

$$(g l_2) \quad (l_1 g_2) \quad (g_1 l),$$

so liegen dieselben in einer Ebene, in welcher auch die drei

Verbindungslinien je zweier von ihnen liegen. Diese drei Punkte erscheinen aber als die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten des Sechsflachs, und ihre drei Verbindungslinien können leicht anders ausgedrückt werden:

Der Punkt $(g l_2)$ liegt nämlich sowohl in der Ebene $[g l_1]$ als auch in der Ebene $[l_2 g_2]$ und der Punkt $(l_1 g_2)$ liegt gleichfalls sowohl in der Ebene $[g l_1]$, als auch in der Ebene $[l_2 g_2]$, folglich ist die Verbindungslinie der Punkte:

$$(g l_2) \quad \text{und} \quad (l_1 g_2)$$

identisch mit der Schnittlinie der beiden Ebenen:

$$[g l_1] \quad \text{und} \quad [l_2 g_2];$$

ebenso ist die Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$(l_1 g_2) \quad \text{und} \quad (g_1 l)$$

identisch mit der Schnittlinie der beiden Ebenen:

$$[l_1 g_1] \quad \text{und} \quad [g_2 l],-$$

und endlich ist die Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$(g_1 l) \quad \text{und} \quad (g l_2)$$

identisch mit der Schnittlinie der beiden Ebenen:

$$[g_1 l_2] \quad \text{und} \quad [l g].$$

Da nun jene drei Verbindungslinien der drei Punkte:

$$(g l_2) \quad (g_1 l) \quad (g_2 l_1)$$

in einer Ebene liegen, so müssen in dem Sechsflach:

$$[l g] \quad [g l_1] \quad [l_1 g_1] \quad [g_1 l_2] \quad [l_2 g_2] \quad [g_2 l]$$

die drei Schnittlinien der gegenüberliegenden Seitenflächen in einer Ebene liegen. Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

b) Werden bei einem auf dem Hyperboloid liegenden Sechsseit, dessen geradstellige Seiten Erzeugende der einen, ungeradstellige Seiten Erzeugende der andern Regelschar sind, je zwei auf einander folgende Seiten durch eine Ebene (Berührungsebene des Hyperboloids) verbunden, so erhält man ein einfaches Sechsflach, dessen gegenüberliegende Seitenflächen sich in drei Geraden schneiden, welche in einer Ebene liegen.

Dieser Satz ist durchaus analog dem Pascalschen Satze

in der Ebene und enthält zugleich denselben als besonderen Fall in sich; denn durchschneiden wir die räumliche Figur durch irgend eine Transversalebene ε, so schneidet dieselbe das Hyperboloid in einem Kegelschnitt, die sechs Erzeugenden in sechs Punkten eines eingeschriebenen Sechsecks, die drei Paar Gegenflächen des Sechsflachs in den drei Paar Gegenseiten des einbeschriebenen Sechsecks, endlich die drei Geraden, welche in einer Ebene liegen, in drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen, und diese drei Punkte sind die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten des einbeschriebenen Sechsecks; also haben wir den Pascalschen Satz.

Ebenso ist der Satz a) des Analogon des Brianchonschen Satzes, wenn wir denselben für irgend sechs Berührungsebenen eines Kegels zweiter Klasse aussprechen; wir haben nur nötig, einen beliebigen Punkt $\mathfrak{B}$ des Raumes mit den sechs Erzeugenden durch Ebenen zu verbinden.

Dasselbe, was wir für das erste Sechsseit I)

$$l\ g\ l_1\ g_1\ l_2\ g_2$$

nachgewiesen haben, gilt in gleicher Weise für jedes der fünf übrigen II, III, IV, V, VI. Die aus diesen sechs Sechsseiten resultierenden Punkte und Ebenen stehen in nahem Zusammenhange mit einander.

Nehmen wir die drei ersten Sechsecke:

I) $\quad l\ g\ l_1\ g_1\ l_2\ g_2$

II) $\quad l\ g_1\ l_1\ g_2\ l_2\ g$

III) $\quad l\ g_2\ l_1\ g\ l_2\ g_1$,

so liefert der Satz a) für jedes derselben einen bestimmten Punkt, nämlich als Durchschnittspunkt der drei Ebenen:

für I): $[lg_1]$ $[l_2g]$ $[l_1g_2]$ den Punkt $\mathfrak{p}$,

für II): $[lg_2]$ $[l_2g_1]$ $[l_1g]$ „ „ $\mathfrak{p}'$,

für III): $[lg]$ $[l_2g_2]$ $[l_1g_1]$ „ „ $\mathfrak{p}''$.

Legen wir aber andererseits durch die drei Punkte:

(lg) (l_1g_2) (l_2g_1) eine Ebene ε

und durch

(l_1g_1) (lg_2) (l_2g) eine Ebene ε_1,

so schneiden sich die Ebenen ε und ε_1 in einer Geraden,

auf welcher, wie wir unmittelbar einsehen, die drei Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}''$ liegen müssen.

Denn in der Ebene ε liegt der Punkt $\mathfrak{p}$, weil er einmal in der Schnittlinie der Ebenen $[lg_1]$ und $[l_2g]$ liegt, welche identisch ist mit der Verbindungslinie der Punkte (lg) und (l_2g_1), und weil zweitens er in der Ebene $[l_1g_2]$ liegt, welche den Punkt (l_1g_2) enthält. Andererseits liegt $\mathfrak{p}$ auch in der Ebene ε_1, weil dieser Punkt einmal in der Schnittlinie der Ebenen $[lg_1]$ und $[l_1g_2]$ liegt, welche identisch ist mit der Verbindungslinie der Punkte (l_1g_1) und (lg_2), und weil er zweitens in der Ebene $[l_2g]$ liegt, welche den Punkt (l_2g) enthält. Da nun $\mathfrak{p}$ in beiden Ebenen ε und ε_1 liegt, so liegt dieser Punkt auch in der Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon_1|$ und in ganz derselben Weise können wir aus den obigen Buchstaben ablesen, dafs auch die beiden andern Punkte $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ in der Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon_1|$ liegen müssen; folglich liegen alle drei Punkte auf einer Geraden, und wir haben den Satz:

Bei jedem der drei auf dem einfachen Hyperboloid liegenden Sechsecke:

$$\begin{array}{cccccc} l & g & l_1 & g_1 & l_2 & g_2 \\ l & g_1 & l_1 & g_2 & l_2 & g \\ l & g_2 & l_1 & g & l_2 & g_1, \end{array}$$

deren ungeradstellige Seiten Erzeugende der einen, und dessen geradstellige Seiten Erzeugende der andern Regelschar sind, schneiden sich die drei Hauptdiagonalen in einem Punkte; die dadurch erhaltenen drei Punkte liegen auf einer Geraden.

Wir hätten zum Beweise des vorigen Satzes anstatt einer der beiden Ebenen ε oder ε_1 auch eine dritte Ebene ε_2 benutzen können, nämlich diejenige, welche durch die drei Punkte:

$$(l_2g_2) \quad (lg_1) \quad (l_1g)$$

gelegt werden kann.

Diese Ebene mufs ebenfalls, wie unmittelbar abzulesen ist, die drei Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}''$ enthalten, folglich müssen sich die drei Ebenen $\varepsilon\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ in derselben Geraden schneiden.

Die drei Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}''$, welche auf einer Geraden liegen, können wir auch anders auffassen als allein abhängig von

dem ersten Sechseck:

I) $l\ g\ l_1\ g_1\ l_2\ g_2;$

es ist nämlich $\mathfrak{p}$ der Durchschnittspunkt der drei Hauptdiagonalen, der Punkt $\mathfrak{p}'$ aber derjenige Punkt, in welchem sich die drei Ebenen

$$[gl_1]\quad [g_1l_2]\quad [g_2l]$$

schneiden, d. h. die Ebenen des zweiten, vierten und sechsten Winkels des Sechsecks I), und endlich der Punkt $\mathfrak{p}''$ der Durchschnittspunkt der drei Ebenen:

$$[lg]\quad [l_1g_1]\quad [l_2g_2],$$

d. h. der Ebenen des ersten, dritten und fünften Winkels desselben Sechsecks I); wir können also den vorigen Satz auch so aussprechen:

Bei einem auf dem einfachen Hyperboloid liegenden Sechseck schneiden sich die drei Hauptdiagonalen in einem Punkte ($\mathfrak{p}$), die drei Ebenen der geradstelligen Winkel des Sechsecks in einem zweiten Punkte ($\mathfrak{p}'$) und die drei Ebenen der ungeradstelligen Winkel des Sechsecks in einem dritten Punkte ($\mathfrak{p}''$); diese drei Punkte $\mathfrak{p}\ \mathfrak{p}'\ \mathfrak{p}''$ liegen auf einer geraden Linie.

Betrachten wir nun die drei übrigen Sechsecke:

IV) $l\ g\ l_1\ g_2\ l_2\ g_1$

V) $l\ g_1\ l_1\ g\ l_2\ g_2$

VI) $l\ g_2\ l_1\ g_1\ l_2\ g,$

und zwar zunächst das erste derselben:

IV) $lgl_1g_2l_2g_1,$

so geht die Ebene ε durch die Punkte $(lg)\ (l_1g_2)\ (l_2g_1)$, d. h. durch die erste, dritte und fünfte Ecke dieses Sechsecks, ferner die Ebene ε_2 durch die Punkte $(l_1g)\ (lg_1)\ (l_2g_2)$, d. h. durch die zweite, vierte und sechste Ecke dieses Sechsecks, und die dritte Ebene ε_1 durch die Punkte $(lg_2)\ (l_2g)\ (l_1g_1)$, d. h. durch diejenigen drei Punkte, in welchen sich die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks treffen; da nun die die drei Ebenen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2$ durch dieselbe Gerade gehen, so haben wir den Satz:

Bei einem auf dem einfachen Hyperboloid lie-

genden Sechseck bestimmen die drei ungeradstelligen Ecken eine Ebene (ε), die drei geradstelligen Ecken eine zweite Ebene (ε_2) und die drei gegenüberstehenden Seiten treffen sich in drei Punkten einer dritten Ebene (ε_1). Diese drei Ebenen schneiden sich in einer und derselben Geraden $|\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2|$.

Dieselbe Gerade liefern auch die Sechsecke V und VI, und wir können auch folgenden Satz aussprechen:

Bei jedem der drei auf dem einfachen Hyperboloid liegenden Sechsecke:

$$\begin{array}{cccccc} l & g & l_1 & g_2 & l_2 & g_1 \\ l & g_1 & l_1 & g & l_2 & g_2 \\ l & g_2 & l_1 & g_1 & l_2 & g \end{array}$$

schneiden sich die Ebenen je zweier gegenüberliegender Winkel des Sechsecks in drei Geraden, welche in einer Ebene liegen. Die drei dadurch erhaltenen Ebenen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2$ laufen durch dieselbe Gerade.

Wir haben bis jetzt nur eine Gerade kennen gelernt, in welcher sowohl die Punkte $\mathfrak{p}\ \mathfrak{p}'\ \mathfrak{p}''$ liegen, als auch die Ebenen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2$ sich schneiden; die Figur führt aber wegen ihrer dualen Natur zugleich auf eine zweite (konjugierte) Gerade. Es liegen nämlich die je drei Punkte:

$$\begin{array}{llll} (lg_1) & (l_2g) & (l_1g_2) & \text{in einer Ebene } \zeta \\ (lg_2) & (l_2g_1) & (l_1g) & \text{,, ,, ,, } \zeta_1 \\ (lg) & (l_2g_2) & (l_1g_1) & \text{,, ,, ,, } \zeta_2, \end{array}$$

und es schneiden sich die je drei Ebenen:

$$\begin{array}{llll} [lg] & [l_1g_2] & [l_2g_1] & \text{in einem Punkte } \mathfrak{q} \\ [lg_2] & [l_1g_1] & [l_2g] & \text{,, ,, ,, } \mathfrak{q}' \\ [lg_1] & [l_1g] & [l_2g_2] & \text{,, ,, ,, } \mathfrak{q}'', \end{array}$$

und es liegen aus gleichen Gründen, wie vorhin, die drei Punkte $\mathfrak{q}\ \mathfrak{q}'\ \mathfrak{q}''$ auf einer Geraden, in welcher sich gleichzeitig die drei Ebenen $\zeta\ \zeta_1\ \zeta_2$ schneiden.

Wir haben also den dem vorigen analogen Satz:

Bei jedem der drei auf dem einfachen Hyperboloid liegenden Sechsecke:

$$\begin{array}{llllll} l & g & l_1 & g_2 & l_2 & g_1 \\ l & g_1 & l_1 & g & l_2 & g_2 \\ l & g_2 & l_1 & g_1 & l_2 & g, \end{array}$$

deren ungeradstellige Seiten Erzeugende der einen und deren geradstellige Seiten Erzeugende der andern Regelschar sind, schneiden sich die drei Hauptdiagonalen in einem Punkte; die dadurch erhaltenen drei Punkte $\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}''$ liegen auf einer Geraden.

Bei jedem der drei auf dem einfachen Hyperboloid liegenden Sechsecke:

$$\begin{array}{llllll} l & g & l_1 & g_1 & l_2 & g_2 \\ l & g_1 & l_1 & g_2 & l_2 & g \\ l & g_2 & l_1 & g & l_2 & g_1 \end{array}$$

schneiden sich die Flächen je zweier gegenüberliegender Winkel des Sechsecks in drei Geraden, welche in einer Ebene liegen; die drei dadurch erhaltenen Ebenen $(\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2)$ schneiden sich in einer Geraden, welche mit der vorigen $|\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}''|$ identisch ist.

Da jede Ebene $[l_i g_k]$ eine Berührungsebene des Hyperboloids in dem Punkte $(l_i g_k)$ ist, so ist der Schnittpunkt dreier solcher Ebenen der Pol (S. 115) derjenigen Ebene, welche die gleichnamigen Punkte verbindet und jede Ebene, welche drei solche Punkte verbindet, die Polarebene desjenigen Punktes, in welchem die gleichnamigen Ebenen sich schneiden; wir haben also in unserer Figur folgende Polaritätsbeziehungen rücksichtlich des Hyperboloids:

Pol	$\mathfrak{p}$	und	Polarebene	$\mathfrak{z}$
„	$\mathfrak{p}'$	„	„	$\mathfrak{z}_1$
„	$\mathfrak{p}''$	„	„	$\mathfrak{z}_2$
„	$\mathfrak{q}$	„	„	ε
„	$\mathfrak{q}'$	„	„	ε_1
„	$\mathfrak{q}''$	„	„	ε_2.

Da aber die drei Ebenen $\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2$ sich in der Geraden $|\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}''|$ und die drei Ebenen $\varepsilon\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ sich in der Geraden $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}''|$ schneiden, so sind die beiden Geraden:

$$|\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}''| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}''|$$

konjugierte Gerade in Bezug auf das Hyperboloid, und wir sehen die schon früher erkannte doppelte Eigenschaft konjugierter Geraden bestätigt, daſs sowohl die Ebenen durch eine derselben ihre Pole auf der anderen Geraden haben, als auch die Polarebenen von den Punkten der ersten Geraden durch die zweitte Gerade gehen. Da hiernach zu jedem Punkte die Polarebene, zu jeder Ebene der Pol, zu jeder Geraden die konjugierte Gerade konstruiert wird, so tritt uns auch hier, wie in § 17, das räumliche Polarsystem entgegen, dessen Zusammenhang und Eigenschaften eine weitere Verfolgung dieser Untersuchung ergeben würde. Wir ziehen aber die direkte Herleitung im nächsten Paragraphen vor und bemerken nur noch, daſs eine Transversalebene, welche unsere räumliche Figur durchschneidet, nicht allein, wie oben bemerkt, den Pascalschen Satz liefert, sondern auch die Steinersche Erweiterung desselben (Th. d. K. § 28) indem sie zeigt, daſs die den drei Sechsecken I II III zugehörigen Pascalschen Linien durch einen Steinerschen Punkt laufen (den Durchschnittspunkt der Transversalebene mit der Geraden $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''|$), sowie, daſs die beiden Steinerschen Punkte, welche den Sechsecken I II III und IV V VI zugehören, konjugierte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sein müssen, weil $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''|$ und $|\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''|$ konjugierte Gerade in Bezug auf das Hyperboloid sind.

§ 19. Das räumliche Polarsystem. Konstruktion desselben aus den Elementen der projektivischen Gebilde.

Wir wollen das räumliche Polarsystem, auf welches wir im Vorigen von verschiedenen Gesichtspunkten aus gekommen sind, unmittelbar aus den Elementen der projektivischen Gebilde konstruieren, welche das Hyperboloid erzeugen, und können dazu entweder die Erzeugung durch zwei projektivische Ebenenbüschel oder durch zwei projektivische Punktreihen wählen. Sind auf den im Raume sich nicht treffenden geraden Trägern l und l_1 zwei projektivische Punktreihen:

$$l(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots) \quad \text{und} \quad l_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{x}_1\ldots)$$

gegeben, so bilden die Verbindungslinien $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ entsprechender Punkte eine Regelschar des Hyperboloids, welches gleich-

zeitig, wenn wir die Ebenen:

$$[l\mathfrak{x}_1] = \xi \quad [l_1\mathfrak{x}] = \xi_1$$

bezeichnen, als das Erzeugnis der beiden projektivischen Ebenenbüschel $l[\mathfrak{x}_1]$ und $l_1[\mathfrak{x}]$ erscheint, weil identisch

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1| = |\xi\xi_1|$$

ist (S. 88).

Wir ordnen nunmehr einer beliebigen Ebene ε im Raume einen bestimmten Punkt $\mathfrak{p}$ in folgender Weise zu:

Die Ebene ε trifft die beiden Träger l und l_1 in zwei Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$, deren entsprechende $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ seien; die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|$ trifft die Ebene ε in einem Punkte $\mathfrak{p}_1$, zu welchem man den zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{p}$ ermittelt, so daſs das Doppelverhältnis:

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}) = -1$$

ist; dann heiſst der zu ε in dieser Weise zugeordnete Punkt $\mathfrak{p}$ der **Pol der Ebene** ε.

Andererseits können wir einem beliebigen Punkte $\mathfrak{p}$ im Raume eine bestimmte Ebene ε zuordnen, die so konstruiert wird:

Die beiden Ebenen, welche $\mathfrak{p}$ mit den Trägern l und l_1 verbinden, heiſsen ξ und η_1; ihre entsprechenden in den beiden erzeugenden Ebenenbüscheln seien ξ_1 und η; die Schnittlinie $|\xi_1\eta|$ mit $\mathfrak{p}$ verbunden liefert eine dritte Ebene ε_1, und die derselben zugeordnete vierte harmonische Ebene ε, für welche das Doppelverhältnis:

$$[\xi_1\eta\varepsilon_1\varepsilon] = -1$$

ist, heiſst die **Polarebene des Punktes** $\mathfrak{p}$.

Das ganze System der in dieser Weise einander zugeordneten Punkte und Ebenen (räumliches Polarsystem) nach der ersten Konstruktion fällt mit dem nach der zweiten Konstruktion identisch zusammen; denn es ist leicht nachzuweisen, daſs die zu einem gegebenen Punkte $\mathfrak{p}$ nach der zweiten Konstruktion gefundene Ebene ε gerade diejenige ist, deren Pol nach der ersten Konstruktion der gegebene Punkt $\mathfrak{p}$ ist. In der That, es giebt durch $\mathfrak{p}$ nur einen bestimmten Strahl, welcher beiden Trägern l und l_1 gleichzeitig begegnet in den Punkten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_1$; die Ebenen $[l\mathfrak{x}_1] = \xi$ und $[l_1\mathfrak{y}] = \eta_1$ haben

in den das Hyperboloid erzeugenden Büscheln zu ihren entsprechenden ξ_1 und η, welche dadurch gefunden werden, daſs wir zu den Punkten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_1$ auf den Trägern l_1 und l die entsprechenden Punkte $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{x}$ der beiden projektivischen Punktreihen aufsuchen und die Ebenen:

$$[l\mathfrak{y}_1] = \eta \quad \text{und} \quad [l_1\mathfrak{x}] = \xi_1$$

legen, wobei identisch wird:

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1| = |\xi_1\eta|.$$

Durch die Schnittlinie $|\xi_1\eta|$, welche also identisch ist mit der Verbindungslinie $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1|$, wird nun eine dritte Ebene ε_1 gelegt, die durch $\mathfrak{p}$ geht, also die Ebene $[\mathfrak{p}\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1]$, und endlich die zugeordnete vierte harmonische ε; diese vier harmonischen Ebenen $\xi_1\ \eta\ \varepsilon_1\ \varepsilon$ treffen aber die Gerade, auf welcher die Punkte $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{p}$ liegen, in vier harmonischen Punkten, und zwar sind dies die Punkte: $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{p}$ und der dem letzteren zugeordnete vierte harmonische Punkt $\mathfrak{p}_1$, durch welchen die gesuchte Ebene ε gehen muſs; um nun umgekehrt im Sinne der ersten Konstruktion zu der Ebene ε den Pol zu erhalten, haben wir die Schnittpunkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$ derselben mit den Trägern l und l_1 aufzusuchen, die entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ zu nehmen, die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|$ zu ziehen und ihren Schnittpunkt mit ε, d. h. den Punkt $\mathfrak{p}_1$ zu ermitteln: dann ist der ihm zugeordnete vierte harmonische Punkt, der gesuchte Pol, offenbar nichts anderes als der ursprüngliche Punkt $\mathfrak{p}$; wir haben also das Resultat:

Wenn man zu einer beliebigen Ebene ε im Sinne der ersten Konstruktion den Pol $\mathfrak{p}$ ermittelt, so ist die Ebene ε zugleich die Polarebene des Punktes $\mathfrak{p}$ im Sinne der zweiten Konstruktion.

Wir untersuchen jetzt die Abhängigkeit, in welcher Pol und Polarebene zu einander stehen und drehen hierzu die Ebene ε zunächst um eine feste Axe s; wie verändert sich dabei der Pol $\mathfrak{p}$?

Die Ebene ε schneidet die Träger l und l_1 in den Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$, deren entsprechende $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ sind; der Schnittpunkt von ε mit der Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|$ ist $\mathfrak{p}_1$ und der zugeordnete vierte harmonische Punkt der gesuchte Pol $\mathfrak{p}$. Bei der Bewegung von ε suchen wir zunächst den Ort des

Punktes $\mathfrak{p}_1$ auf. Nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ der Geraden s und legen alle Ebenen $[\mathfrak{o}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1]$, so umhüllen dieselben, wie wir wissen, einen Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}$, das Erzeugnis zweier projektivischer ebener Strahlenbüschel in den Ebenen $[\mathfrak{o}l]$ und $[\mathfrak{o}l_1]$ (S. 26); die um den Strahl s sich drehende Ebene ε schneidet die Ebenen $[\mathfrak{o}l]$ und $[\mathfrak{o}l_1]$ in den beiden Strahlen $|\mathfrak{o}\mathfrak{x}| = x$ und $|\mathfrak{o}\mathfrak{y}_1| = y_1$, deren entsprechende x_1 und y sind; die Schnittlinie:

$$|xy_1, x_1y|$$

liegt, wie wir wissen (S. 31), in einer festen Ebene, welche notwendig alle Schnittpunkte $(\varepsilon, |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|) = \mathfrak{p}_1$ enthalten mufs. Nehmen wir einen zweiten Punkt $\mathfrak{o}'$ des Strahls s und machen dieselbe Konstruktion, wie für $\mathfrak{o}$, so erhalten wir eine zweite Ebene, welche aus demselben Grunde die Punkte $(\varepsilon, |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|) = \mathfrak{p}_1$ enthalten mufs. Da diese Punkte aber gleichzeitig in zwei Ebenen liegen, so müssen sie auf einer Geraden g_1, der Schnittlinie jener beiden Ebenen, liegen, und lassen wir den Punkt $\mathfrak{o}$ auf dem Strahle s wandern, so müssen alle jene Ebenen um dieselbe Gerade g_1 sich drehen.

Nachdem wir als Ort des Punktes $\mathfrak{p}_1$ eine bestimmte Gerade g_1 gefunden haben, erkennen wir auch leicht, wie sich $\mathfrak{p}_1$ auf dieser Geraden g_1 verändert. Die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$ beschreiben nämlich bei der Drehung der Ebene ε um s zwei perspektivisch liegende, also projektivische, gerade Punktreihen auf den Trägern l und l_1, und da die Punktreihe, welche $\mathfrak{x}_1$ beschreibt, mit der von $\mathfrak{x}$ beschriebenen, die Punktreihe, welche $\mathfrak{y}$ beschreibt, mit der von $\mathfrak{y}_1$ beschriebenen projektivisch ist, so sind auch die von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ beschriebenen Punktreihen projektivisch, also beschreibt die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|$ eine Regelschar eines einfachen Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$. [Dieses Hyperboloid ist verschieden von dem Erzeugnis der beiden ursprünglich gegebenen projektivischen Punktreihen; es hat mit demselben die beiden Erzeugenden l und l_1 gemein und aufserdem noch zwei (reelle oder imaginäre) Gerade, nämlich diejenigen beiden Erzeugenden der Regelschar $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$, welche der Geraden g_1 begegnen. Die beiden Hyperboloide haben also im allgemeinen ein windschiefes Vierseit gemein.] Das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ geht aufser durch die beiden Träger l und l_1 auch durch die Gerade g_1, welche der andern Regel-

schar dieses Hyperboloids angehört, weil die Gerade g_1 sämtlichen Erzeugenden $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}|$ begegnet. Der Punkt $\mathfrak{p}_1$ durchläuft also auf der Erzeugenden g_1 eine gerade Punktreihe, welche mit der von $\mathfrak{x}_1$, von $\mathfrak{y}$, also auch von $\mathfrak{x}$, von $\mathfrak{y}_1$ beschriebenen und daher mit dem von der Ebene ε beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch ist.

Während die Ebene ε sich um den Strahl s dreht, beschreibt also der Punkt $\mathfrak{p}_1$ auf einer bestimmten Geraden g_1 eine Punktreihe, welche mit dem von ε beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch ist.

Die Gerade $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}|$ durchläuft nun eine Regelschar auf dem Hyperboloid und enthält die drei veränderlichen Punkte $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y} \mathfrak{p}_1$, welche auf drei Erzeugenden $l_1 \, l \, g_1$ der andern Regelschar projektivische Punktreihen durchlaufen; konstruieren wir zu diesen drei Punkten den vierten harmonischen, dem $\mathfrak{p}_1$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{p}$, so dafs das Doppelverhältnis:

$$(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y} \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}) = -1$$

ist, dann mufs nach einem früher bewiesenen Satze (S. 93) der Punkt $\mathfrak{p}$ auf einer vierten (harmonischen) Erzeugenden g desselben Hyperboloids sich bewegen, so dafs $l_1 \, l \, g_1 \, g$ einer und derselben Regelschar angehören, und der Punkt $\mathfrak{p}$ wird auf dieser Geraden g eine Punktreihe durchlaufen, die ebenfalls mit dem von der Ebene ε beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch ist. Wir haben also den Satz:

Dreht sich eine Ebene ε um einen festen Strahl s, so bewegt sich ihr Pol $\mathfrak{p}$ auf einer Geraden g und beschreibt eine Punktreihe, welche mit dem von der Ebene ε beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch ist.

Hierzu tritt nun noch eine zweite für das Polarsystem charakteristische Eigenschaft hinzu, nämlich: Das von ε beschriebene Ebenenbüschel und die von $\mathfrak{p}$ beschriebene gerade Punktreihe liegen involutorisch.

Um dies nachzuweisen, haben wir zu zeigen, dafs wenn in der angegebenen Weise für eine durch s gelegte Ebene ε der Pol $\mathfrak{p}$ konstruiert ist, auch eine durch s und $\mathfrak{p}$ gelegte neue

Ebene ihren Pol in der Ebene ε hat, also in dem Durchschnittspunkte derselben mit g.

Wir haben unserer Bezeichnung gemäfs:

$$(\varepsilon,\ l) = \mathfrak{x} \qquad (\varepsilon,\ l_1) = \mathfrak{y}_1$$

und die entsprechenden Punkte:

$$\mathfrak{x}_1 \text{ und } \mathfrak{y},$$

ferner den Schnittpunkt:

$$(\varepsilon,\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}) = \mathfrak{p}_1$$

und den zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{p}$, so dafs das Doppelverhältnis:

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}) = -1$$

ist; legen wir durch den Strahl s in der Ebene ε und durch den Punkt $\mathfrak{p}$ eine neue Ebene, welche den Trägern l und l_1 in den Punkten:

$$\mathfrak{z} \text{ und } \mathfrak{t}_1$$

begegnet, deren entsprechende sind:

$$\mathfrak{z}_1 \text{ und } \mathfrak{t},$$

dann findet wegen der Projektivität der erzeugenden Gebilde die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) = (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{t}_1),$$

also auch

$$= (\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1)$$

oder, wenn wir diese Punkte mit der Axe s durch Ebenen verbinden, die Gleichheit der Doppelverhältnisse in den beiden koaxialen Ebenenbüscheln:

$$s[\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}] = s[\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1];$$

nun liegen die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$ in derselben Ebene mit s und ebenso auch $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{t}_1$ in einer Ebene mit s, folglich ist auch:

$$s[\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}] = s[\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1]$$

oder

$$= s[\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1].$$

Da aber in diesen beiden projektivischen Ebenenbüscheln mit gemeinschaftlicher Axe s der Ebene $[s\mathfrak{y}_1] = [s\mathfrak{x}]$ die Ebene $[s\mathfrak{z}] = [s\mathfrak{t}_1]$ und gleichzeitig derselben Ebene $[s\mathfrak{x}]$ im andern Büschel die Ebene $[s\mathfrak{t}_1]$ im ersten Büschel entspricht, so

liegen die beiden projektivischen Ebenenbüschel involutorisch, d. h. die sechs Ebenenpaare:

$$[s\mathfrak{x}] \text{ und } [s\mathfrak{z}], \quad [s\mathfrak{y}] \text{ und } [s\mathfrak{z}_1], \quad [s\mathfrak{t}] \text{ und } [s\mathfrak{x}_1]$$

gehören einer Ebeneninvolution an, und daraus folgt die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$s[\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{z}] = s[\mathfrak{t}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}\mathfrak{x}].$$

Nun ist aber $s[\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{z}] = s[\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}]$ folglich, da $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}) = -1$ ist:

$$s[\mathfrak{t}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}\mathfrak{x}] = -1,$$

und hieraus folgt, dafs die Ebene $[s\mathfrak{x}]$ durch den vierten harmonischen Punkt auf $|\mathfrak{z}_1\mathfrak{t}|$ gehen mufs, welcher zugeordnet ist dem Schnittpunkte der Ebene $[s\mathfrak{z}]$ mit dem Strahle $|\mathfrak{z}_1\mathfrak{t}|$, d. h. der Pol der Ebene $[s\mathfrak{p}]$ liegt in der Ebene $[s\mathfrak{x}]$ oder ε. Hierdurch ist die involutorische Lage beider projektivischen Gebilde erwiesen, und wir können diese involutorische Eigenschaft, welche für das Polarsystem charakteristisch ist, in der Form aussprechen:

Wenn $\mathfrak{p}$ der Pol einer Ebene ε ist und $\mathfrak{p}'$ ein beliebiger Punkt der Ebene ε, so mufs die Polarebene ε' des Punktes $\mathfrak{p}'$ durch den Pol $\mathfrak{p}$ der Ebene ε gehen.

Wenn ε die Polarebene eines Punktes $\mathfrak{p}$ ist und ε' eine beliebige durch $\mathfrak{p}$ gelegte Ebene, so mufs der Pol $\mathfrak{p}'$ der Ebene ε' in der Polarebene ε des Punktes $\mathfrak{p}$ liegen.

Die Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon'|$ und die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'|$ heifsen konjugierte Gerade im Polarsystem und sollen demgemäfs durch s und s_1 bezeichnet werden; sie besitzen nicht allein die Eigenschaft, dafs die durch s gelegten Ebenen ihre Pole auf s_1 haben, sondern auch die umgekehrte, dafs die durch s_1 gelegten Ebenen ihre Pole auf s haben. Denn seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ die Pole von zwei Ebenen ε und ε', die sich in $s = |\varepsilon, \varepsilon'|$ schneiden, so wird irgend eine durch die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'| = s_1$ gelegte Ebene, weil sie durch $\mathfrak{p}$ geht, ihren Pol in der Ebene ε, und weil sie durch $\mathfrak{p}'$ geht, ihren Pol in der Ebene ε' haben müssen, also in der Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon'| = s$. Hierdurch rechtfertigt sich also die Benennung „konjugierte Gerade“.

Wenn zwei beliebige Gerade s und t im Raume sich treffen, so müssen auch ihre konjugierten Geraden s_1 und t_1 sich treffen, denn durch s und t kann eine Ebene gelegt werden, deren Pol sowohl auf s_1 als auch auf t_1 liegen mufs; da sie aber nur einen Pol hat, so müssen sich s_1 und t_1 in demselben begegnen; gleichzeitig wird auch der Schnittpunkt (st) der Pol der Ebene $[s_1 t_1]$ sein. Ziehen wir eine beliebige dritte Gerade durch den Punkt $\mathfrak{p} = (st)$, so mufs ihre konjugierte Gerade sowohl s_1, als auch t_1 treffen, und da beide in derselben Ebene liegen, so mufs auch die konjugierte Gerade in dieser Ebene liegen. Wir erhalten also mit dem dual gegenüberstehenden Ergebnis zusammen folgenden Doppelsatz:

Zu sämtlichen Strahlen s, die durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ im Raume gehen, liegen die konjugierten Strahlen s_1 in einer und derselben Ebene ε, der Polarebene des Punktes $\mathfrak{p}$.	Die zu sämtlichen Strahlen s_1, welche in einer Ebene ε liegen, konjugierten Strahlen s laufen durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{p}$, den Pol der Ebene ε.

Wir erkennen ferner unmittelbar folgende Eigenschaft konjugierter Strahlen im Polarsystem:

Wenn eine beliebige Gerade t gleichzeitig zwei konjugierte Strahlen ss_1 im Polarsysteme trifft, so mufs auch die zu t konjugierte Gerade t_1 dem Paare ss_1 begegnen.

In der That, der Schnittpunkt (ts) hat zur Polarebene eine durch s_1 gehende Ebene und der Schnittpunkt (ts_1) eine durch s gehende Ebene; diese beiden Polarebenen schneiden sich aber in t_1, der konjugierten Geraden zu t; folglich mufs diese Schnittlinie, weil sie mit s und s_1 in je einer Ebene liegt, die beiden Geraden s und s_1 treffen. Die beiden Strahlenpaare ss_1 und tt_1 bilden demnach ein windschiefes Vierseit, von welchem jede Ecke, in der sich zwei Seiten treffen, der Pol derjenigen Ebene ist, in welcher die beiden übrigen Seiten liegen, nämlich:

der Punkt (st) der Pol der Ebene $[s_1 t_1]$
„ „ (st_1) „ „ „ „ $[s_1 t]$

der Punkt $(s_1 t)$ der Pol der Ebene $[s t_1]$
„ „ $(s_1 t_1)$ „ „ „ „ $[st]$.

Die vier Ebenen $[st]$ $[st_1]$ $[s_1 t]$ $[s_1 t_1]$ schneiden sich aber zu je dreien in den vier Punkten $(s_1 t_1)$ $(s_1 t)$ $(s t_1)$ (st), zu je zweien aufser in den vier Geraden $s\ t\ s_1\ t_1$ noch in zwei andern Geraden, nämlich den Schnittlinien der Ebenen:

$$[st_1] \text{ und } [s_1 t]$$
$$[st] \text{ und } [s_1 t_1],$$

dem dritten Paar Gegenkanten des Tetraëders, von welchem s und s_1, t und t_1 zwei Paar Gegenkanten sind. Die Schnittlinie der Ebenen:

$$[st_1] \text{ und } [s_1 t]$$

ist aber offenbar identisch mit der Verbindungslinie der Punkte:

$$(st) \text{ und } (s_1 t_1),$$

folglich ist auch das dritte Paar Gegenkanten des Tetraëders ein Paar konjugierter Strahlen, und wir erhalten den Satz:

Wenn von einem Tetraëder zwei Paare Gegenkanten konjugierte Strahlen eines Polarsystems sind, so ist auch das dritte Paar Gegenkanten ein Paar konjugierter Strahlen, sowie jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seitenfläche und jede Seitenfläche die Polarebene der gegenüberliegenden Ecke.

Ein solches Tetraëder nennt man ein Polartetraëder im Polarsystem. Polartetraëder können in grofser (sechsfach-unendlicher) Mannigfaltigkeit hergestellt werden, indem eine Ecke $\mathfrak{a}$ willkürlich angenommen, in der Polarebene α der Ecke $\mathfrak{a}$ die zweite Ecke $\mathfrak{b}$ willkürlich gewählt und in der zu $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ konjugierten Geraden die dritte Ecke $\mathfrak{c}$ willkürlich fixiert wird; die vierte Ecke $\mathfrak{d}$ ist dann vollständig bestimmt als Pol der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}.]$

Nehmen wir zwei Polartetraëder eines räumlichen Polarsystems an:

$$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{d}_1,$$

so läfst sich zwischen denselben ein gewisser Zusammenhang erkennen, der aus folgender Betrachtung hervorgeht:

Die Punkte einer geraden Punktreihe und ihre Polarebenen, die ein Ebenenbüschel bilden, sind, wie wir wissen, allemal projektivische Gebilde (die involutorisch liegen) und umgekehrt; nehmen wir die vier Ebenen:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] \quad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}] \quad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1] \quad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}_1],$$

welche ein Büschel bilden $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|[\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1]$, so werden die Pole dieser vier Ebenen sein die vier Punkte:

$$\mathfrak{d} \quad \mathfrak{c} \quad (|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|, [\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1]) \quad (|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|, [\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1])$$

der Geraden $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$; wenn wir diese vier Punkte mit der Geraden $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|$, durch vier Ebenen verbinden, so mufs dies neue Ebenenbüschel mit dem vorigen projektivisch sein, d. h.

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|[\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1] \barwedge |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|[\mathfrak{d}\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1]$$

und hieraus folgt:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|[\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1] \barwedge |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|[\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1], \text{ d. h.:}$$

Wenn man irgend eine Kante des einen und eine Kante des andern Polartetraëders mit den übrigen vier Tetraëderecken durch vier Ebenenpaare verbindet, so erhält man allemal zwei projektivische Ebenenbüschel, und da diese ein Hyperboloid erzeugen, so geht hieraus hervor, dafs sich auf diese Art durch die acht Ecken zweier Polartetraëder 36 Hyperboloide legen lassen.

§. 20. Die incidenten Elemente des räumlichen Polarsystems.

Die vorige Konstruktion des räumlichen Polarsystems liefert im allgemeinen eine paarweise Zuordnung der Punkte, Ebenen und Strahlen im Raume vermittelst des Hyperboloids. Es ist von Wichtigkeit, solche zugeordneten Elemente des Polarsystems aufzusuchen, die in einander fallen (incident sind) oder sich treffen.

Nehmen wir anstatt einer beliebigen Ebene im Raume eine besondere Ebene ε, welche durch einen der beiden Träger (etwa durch l) der erzeugenden projektivischen Punktreihen hindurchgeht, und suchen nach der vorigen Konstruktion ihren Pol $\mathfrak{p}$ auf. Da die Ebene ε durch l geht, so

wird $\mathfrak{x}$ völlig unbestimmt, dagegen ist $\mathfrak{y}_1$ ein bestimmter Punkt, der Schnittpunkt (ε, l_1); ihm entspricht ein bestimmter Punkt $\mathfrak{y}$; der Punkt $\mathfrak{x}_1$ ist natürlich auch durchaus unbestimmt, also auch die Gerade $|\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1|$, liegt aber in einer bestimmten Ebene $[\mathfrak{y} l_1]$ und diese Gerade $|\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1|$ trifft die Ebene ε trotz ihrer Unbestimmtheit immer in demselben Punkte $\mathfrak{y}$; es fällt also $\mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{y}$ zusammen, und da von den vier harmonischen Punkten $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{y}\, \mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}$ die beiden, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{p}_1$, zusammenfallen, $\mathfrak{x}_1$ aber getrennt liegt, so mufs $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{y}$ hineinfallen, d. h. $\mathfrak{p}$ koincidiert mit $\mathfrak{y}$.

Der Pol einer durch den Träger l gelegten Ebene ε liegt in dieser Ebene selbst und ist auf der Geraden l derjenige Punkt, in welchem die in dieser Ebene enthaltene einzige Gerade g der andern Regelschar die Gerade l trifft.

Da die Ebene ε, wie wir wissen, Berührungsebene des Hyperboloids und der Punkt (g, l) der Berührungspunkt derselben ist, so können wir auch sagen:

Die Berührungsebene ε des Hyperboloids und ihr Berührungspunkt bilden ein besonderes Paar von Polarebene und Pol des räumlichen Polarsystems.

Drehen wir die Ebene ε um die Axe l, so bleibt ihr Pol auf ihr, mithin ist die Gerade l ein sich selbst konjugierter Strahl im Polarsystem; ebenso auch l_1.

Zweitens verbinden wir zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ der projektivischen Punktreihen auf den Trägern l und l_1 durch die Gerade:

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1| = g_x,$$

dann wird die Polarebene von $\mathfrak{x}$ nach dem Vorigen die Ebene $[l\mathfrak{x}_1]$ und die Polarebene von $\mathfrak{x}_1$ die Ebene $[l_1\mathfrak{x}]$ sein, also der konjugierte Strahl zu $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$ wird die Schnittlinie:

$$|[l\mathfrak{x}_1]\,[l_1\mathfrak{x}]| = |\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$$

sein, d. h. jede Erzeugende g_x der zweiten Regelschar des Hyperboloids ist ein sich selbst konjugierter Strahl des räumlichen Polarsystems.

Hieraus folgt weiter, dafs alle durch eine Erzeugende g_x gelegten Ebenen ihre Pole auf sich selbst haben müssen, weil

er auf g_x liegt. Dies sind aber die sämtlichen Berührungsebenen des Hyperboloids, wie wir oben gesehen haben; wir finden also jetzt allgemein bestätigt, daſs jede Berührungsebene des Hyperboloids ihren Pol auf sich selbst hat. Um nun aber die Lage desselben in der Berührungsebene und zwar auf der in ihr liegenden Erzeugenden g_x vollständig zu ermitteln, müssen wir, da uns die obige Konstruktion hier im Stich läſst, anders verfahren.

Nehmen wir in einer durch die Erzeugende g beliebig gelegten Ebene τ irgend eine Gerade s und ermitteln ihre konjugierte Gerade s_1, so wird dieselbe im allgemeinen nicht in τ hineinfallen, sondern diese Ebene τ in dem gesuchten Pol $\mathfrak{t}$ treffen, welcher auf g liegen muſs, weil g eine sich selbst konjugierte Gerade ist; dadurch ist also der Pol $\mathfrak{t}$ der Ebene τ ermittelt. Wenn wir auf s einen Punkt $\mathfrak{x}$ sich bewegen lassen, so beschreibt die Polarebene ξ um die Axe s_1 ein Ebenenbüschel, welches projektivisch ist mit der von $\mathfrak{x}$ beschriebenen Punktreihe und mit derselben involutorisch liegt; d. h. wenn die Ebene ξ dem Strahle s in $\mathfrak{x}_1$ begegnet, so sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ konjugierte Punkte einer Punktinvolution; diese ist in unserem Falle hyperbolisch und hat zu einem Asymptotenpunkt den Durchschnittspunkt der Erzeugenden g mit dem Träger s, weil eben g ein sich selbst konjugierter Strahl ist. Die Punktinvolution hat daher notwendig noch einen zweiten reellen Asymptotenpunkt; verbinden wir diesen mit dem Punkte $\mathfrak{t}$, so erhalten wir offenbar einen zweiten Strahl l in der Ebene τ, welcher auch ein sich selbst konjugierter Strahl des räumlichen Polarsystems sein muſs, weil von zweien seiner Punkte die Polarebenen durch ihn selbst gehen. Wir erhalten also in der durch die Erzeugende g gelegten Berührungsebene τ auſser g noch einen zweiten sich selbst konjugierten Strahl l des räumlichen Polarsystems und der Schnittpunkt (gl) ist der Pol der Ebene τ. Aus der Ermittelung von l geht auch hervor, daſs es in dieser Ebene τ nur diese beiden sich selbst konjugierten Strahlen geben kann und weiter keinen. Es ist aber leicht zu erkennen, daſs l nichts anderes ist, als die Erzeugende der andern Regelschar des Hyperboloids in der Berührungsebene τ.

Denn zunächst ist ersichtlich, *dafs eine sich selbst konjugierte Gerade g, die von einem beliebigen Strahle s getroffen wird, auch von dem konjugierten Strahle s_1 getroffen werden mufs*; mögen sich g und s in $\mathfrak{p}$ treffen, so hat $\mathfrak{p}$ eine bestimmte Polarebene ε, die durch g gehen mufs, weil g ein sich selbst konjugierter Strahl ist und die auch durch s_1 gehen mufs, weil $\mathfrak{p}$ auf s liegt; folglich müssen g und s_1 in einer Ebene liegen, d. h. sich treffen.

Nehmen wir aber zwei beliebige sich selbst entsprechende Strahlen g und g_1 und legen durch jeden derselben eine beliebige Ebene τ und τ_1, so werden sich dieselben in einer Geraden s schneiden, deren konjugierte Gerade s_1 notwendig auch g und g_1 begegnen mufs; bezeichnen wir, der besseren Übersicht wegen, die Treffpunkte:

$$(gs) = \mathfrak{a}, \quad (g_1 s) = \mathfrak{b}, \quad (g s_1) = \mathfrak{c}, \quad (g_1 s_1) = \mathfrak{d},$$

so haben wir folgende entsprechenden Elemente des räumlichen Polarsystems:

Pol	Polarebene	Konjugierte Strahlen
$\mathfrak{a}$	$[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$	$\lvert\mathfrak{a}\mathfrak{b}\rvert$ und $\lvert\mathfrak{c}\mathfrak{d}\rvert$
$\mathfrak{b}$	$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$	
$\mathfrak{c}$	$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$	
$\mathfrak{d}$	$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]$	

und hieraus erkennen wir, dafs nicht nur

$$g = \lvert\mathfrak{a}\mathfrak{c}\rvert \quad \text{und} \quad g_1 = \lvert\mathfrak{b}\mathfrak{d}\rvert$$

sich selbst konjugierte Strahlen sind, sondern auch

$$\lvert\mathfrak{b}\mathfrak{c}\rvert \quad \text{und} \quad \lvert\mathfrak{a}\mathfrak{d}\rvert$$

ebenfalls sich selbst konjugierte Strahlen sein müssen, denn die Polarebenen der Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ schneiden sich in $\lvert\mathfrak{b}\mathfrak{c}\rvert$ und ebenso haben die Polarebenen der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ zur Schnittlinie $\lvert\mathfrak{a}\mathfrak{d}\rvert$.

Wir haben also in jeder der beiden Ebenen τ und τ_1 aufser den sich selbst konjugierten Geraden g und g_1 noch je eine andere:

$$\lvert\mathfrak{b}\mathfrak{c}\rvert = l_1, \qquad \lvert\mathfrak{a}\mathfrak{d}\rvert = l$$

gefunden, wie wir es auch aus dem Früheren wissen, und zwar sind die Punkte:

$$(gl_1) = \mathfrak{t} \quad \text{und} \quad (g_1 l) = \mathfrak{t}_1$$

die Pole der Ebenen:

$$[gl_1] = \tau \quad \text{und} \quad [g_1 l] = \tau_1 .$$

Hier lassen sich aber die neuen sich selbst konjugierten Geraden l und l_1 unmittelbar als Erzeugende der andern Regelschar erkennen; denn halten wir die Ebene τ mit den beiden Geraden l_1 und g in ihr fest, und erinnern uns, dafs es nur diese beiden sich selbst entsprechenden Strahlen in ihr geben kann, verändern wir aber beliebig g_1 und die Ebene τ_1, so erkennen wir, weil l_1 allemal durch $\mathfrak{b}$ gehen, d. h. g_1 schneiden mufs, dafs die Gerade l_1 sämtlichen Erzeugenden g_x der einen Regelschar begegnen mufs, folglich selbst eine Erzeugende der andern Regelschar ist.

Wir können nunmehr das vollständige Resultat aussprechen:

Es giebt in dem räumlichen Polarsystem unendlich viele Ebenen, deren Pole auf ihnen selbst liegen, und unendlich viele Punkte, deren Polarebenen durch sie selbst gehen; dieses sind die sämtlichen Berührungsebenen und Punkte des Hyperboloids, und zwar hat jede Berührungsebene zu ihrem Pol den Berührungspunkt, d. h. denjenigen Punkt, in welchem sich die in der Berührungsebene liegenden beiden Erzeugenden aus den beiden Regelscharen schneiden, und jeder Punkt des Hyperboloids hat zu seiner Polarebene die Berührungsebene, d. h. diejenige, in welcher die beiden durch den Punkt gehenden Erzeugenden aus den beiden Regelscharen liegen.

Zwei konjugierte Strahlen s und s_1 des räumlichen Polarsystems werden sich im allgemeinen nicht treffen; soll dies aber vorkommen, so müssen sie in einer Ebene liegen und, da der Pol derselben sowohl auf s_1 als auch auf s liegen mufs, so mufs er der Schnittpunkt $\mathfrak{r} = (ss_1)$ sein. Hieraus folgt, dafs die Ebene $\tau = [ss_1]$ eine Berührungsebene und der Punkt $\mathfrak{t} = (ss_1)$ ihr Berührungspunkt sein mufs, weil er Pol der Ebene

ist und in ihr selbst liegt. Dabei kann es noch unendlich viele Strahlenpaare ss_1 in der Ebene τ geben, die durch t gehen; und in der That jede durch t in der Ebene τ gezogene Gerade s mufs ihre konjugierte Gerade s_1 in der Ebene τ haben und durch den Punkt t gehen; aus der projektivischen Beziehung und involutorischen Lage, welche bei der Veränderung zugeordneter Elemente des Polarsystems gilt, erkennen wir, wie oben ausgeführt ist, dafs $s\,s_1$ konjugierte Strahlen einer Strahleninvolution sein müssen in der Ebene τ und zwar einer hyperbolischen, deren Asymptoten die Strahlen g und l, die Erzeugenden aus je einer der beiden Regelscharen, sind. Wir haben also folgendes weitere Ergebnis:

Es giebt in dem räumlichen Polarsystem unendlich viele Paare solcher konjugierten Strahlen ss_1, die im Raume sich begegnen; zwei derartige Strahlen liegen allemal in einer Berührungsebene des Hyberboloids, treffen sich in dem Berührungspunkte derselben und werden harmonisch getrennt durch die beiden Erzeugenden l und g in der Berührungsebene.

Jede Erzeugende l_x und g_x sowohl der einen, als auch der andern Regelschar des Hyperboloids ist eine sich selbst konjugierte Gerade im Polarsystem, d. h. fällt mit ihrer konjugierten Geraden ganz zusammen.

Aus der oben auseinandergesetzten Natur des räumlichen Polarsystems ergiebt sich ferner Folgendes:

Wenn wir durch einen beliebigen aber festgehaltenen Punkt $\mathfrak{p}$ des Raumes Strahlen s ziehen, so liegen die konjugierten Strahlen s_1 sämtlich in einer Ebene ε, der Polarebene des Punktes $\mathfrak{p}$. Bezeichnen wir den Durchbohrungspunkt des Strahles s mit der Ebene ε durch $\mathfrak{z}$ und die Verbindungsebene des Punktes $\mathfrak{p}$ mit dem Strahle s_1 durch σ_1, so erhalten wir einmal in der Ebene ε den Punkt $\mathfrak{z}$ und die Gerade s_1 als Pol und Polare eines ebenen Polarsystems und andererseits durch den Punkt $\mathfrak{p}$ den Strahl s und die Ebene σ_1 als Polarstrahl und Polarebene eines Polarbündels; denn bei der Bewegung dieser zugeordneten Elemente tritt immer Projektivität und involutorische Lage der ent-

stehenden einförmigen Gebilde auf, wodurch das Wesen der Polarität bedingt ist. Wir haben demnach folgendes Resultat:

Im räumlichen Polarsystem wird jeder Punkt $\mathfrak{p}$ der Mittelpunkt eines Polarbündels und jede Ebene ε der Träger eines ebenen Polarsystems. Zugeordnete Elemente dieser Polargebilde erhalten wir, indem wir durch $\mathfrak{p}$ beliebige Strahlen s ziehen und $\mathfrak{p}$ mit den konjugierten Strahlen s_1 durch Ebenen σ_1 verbinden, andererseits indem wir in der Ebene ε beliebige Strahlen s_1 nehmen und ihnen die Durchbohrungspunkte $\mathfrak{s}$ der konjugierten Strahlen s mit der Ebene ε ihnen zuordnen. Polarbündel ($\mathfrak{p}$) und ebenes Polarsystem (ε) sind allemal hyperbolisch; der Kernkegel des Polarbündels ist der Berührungskegel aus $\mathfrak{p}$ an das Hyperboloid, der Kernkegelschnitt des ebenen Polarsystems derjenige, in welchem die Ebene ε das Hyperboloid schneidet. Sind $\mathfrak{p}$ und ε Pol und Polarebene des räumlichen Polarsystems, so liegen beide Polargebilde perspektivisch, und der Kernkegel des einen geht durch den Kernkegelschnitt des andern.

Endlich ergiebt sich, wenn wir eine beliebige Gerade s im Raume nehmen und dieselbe entweder als Träger einer Punktreihe $\mathfrak{x}$ oder als Axe eines Ebenenbüschels $\mathfrak{\xi}$ auffassen, dafs die Polarebenen ξ_1 der Punkte $\mathfrak{x}$ ein Ebenenbüschel s_1 beschreiben, dessen Axe die konjugierte Gerade s_1 ist, und andererseits, wenn wir die Pole $\mathfrak{x}_1$ der Ebenen ξ ermitteln, dafs dieselben eine Punktreihe auf der konjugierten Geraden s_1 beschreiben. Nun geht aber aus der Natur des räumlichen Polarsystems hervor, dafs das Ebenenbüschel $s_1[\xi_1]$ mit der Punktreihe $s(\mathfrak{x})$, und dafs die Punktreihe $s_1(\mathfrak{x}_1)$ mit dem Ebenenbüschel $s[\xi]$ projektivisch sind und involutorisch liegen. Wir haben demnach folgendes Resultat:

Im räumlichen Polarsystem ist jede Gerade s sowohl der Träger einer Punktinvolution, als auch die Axe einer Ebeneninvolution; die erstere wird erhalten, indem wir jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Geraden s den Durchschnittspunkt seiner Polarebene ξ mit

s als konjugierten Punkt der Punktinvolution zuordnen, die letztere, indem wir jeder durch s gelegten Ebene $\mathfrak{x}$ die Verbindungsebene des Poles von $\mathfrak{x}$ mit der Axe s als konjugierte Ebene der Ebeneninvolution zuordnen. Sind s und s_1 zwei konjugierte Gerade im räumlichen Polarsystem, so liegt die Ebeneninvolution von s mit der Punktinvolution auf s_1 und gleichzeitig die Punktinvolution auf s mit der Ebeneninvolution von s_1 perspektivisch.

Hieraus folgt eine wichtige Eigenschaft unsres räumlichen Polarsystems; sobald nämlich eine dieser Involutionen, z. B. die Punktinvolution auf s eine hyperbolische ist mit den Doppelpunkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, müssen die Polarebenen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ die Ebenen $[s_1 \mathfrak{p}]$ und $[s_1 \mathfrak{q}]$ sein, d. h. Berührungsebenen des Hyperboloids mit den Berührungspunkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$; es gehen daher durch $\mathfrak{p}$ zwei Erzeugende g und l, die in der Ebene $[s_1 \mathfrak{p}]$ liegen und der Geraden s_1 in den Punkten $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ begegnen und, da g und l sich selbst konjugierte Strahlen im räumlichen Polarsystem sind, so folgt auch, daſs $|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{q}| = l_1$ und $|\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}| = g_1$ sich selbst konjugierte Strahlen sind, wie schon oben nachgewiesen ist; folglich sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ die Doppelpunkte der Punktinvolution auf s_1 und, da diese hyperbolisch ist, so muſs auch die Ebeneninvolution durch s hyperbolisch sein, also sind alle vier hyperbolisch, und umgekehrt, sobald eine elliptisch ist, sind alle vier elliptisch, denn wäre die zweite hyperbolisch, so müſste es auch die erste sein. Ist aber eine dieser Involutionen parabolisch, welcher Fall nur eintritt, wenn die Gerade s in einer Berührungsebene τ des Hyperboloids durch den Berührungspunkt geht, so sind auch die übrigen parabolisch. Wir können also folgendes Ergebnis aussprechen:

In unserem räumlichen Polarsystem sind die Punktinvolution und die Ebeneninvolution, welche einer Geraden s im Raume zugehören, allemal gleichartig, entweder beide hyperbolisch oder beide elliptisch, oder beide parabolisch.

Dasselbe Ergebnis läſst sich auch so aussprechen: Die Punktinvolutionen (oder Ebeneninvolutionen),

welche zweien konjugierten Strahlen s und s_1 im räumlichen Polarsystem zugehören, sind allemal gleichartig.

Wenn wir nur die hyperbolischen Involutionen ins Auge fassen, so heifst dies nichts anderes als: Wenn eine Gerade dem Hyperboloid in zwei reellen Punkten begegnet, so gehen durch dieselbe auch zwei reelle Berührungsebenen des Hyperboloids und umgekehrt.

Aus der harmonischen Eigenschaft der hyperbolischen Involution, dafs nämlich jedes Paar konjugierter Elemente durch die Doppelelemente der Involution harmonisch getrennt wird, folgen nun als besondere Fälle die harmonischen Eigenschaften des räumlichen Polarsystems. Zieht man durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ im Raume Strahlen, welche dem Hyperboloid in reellen Punktepaaren begegnen, und konstruiert den dem ersteren zugeordneten vierten harmonischen Punkt, so liegen dieselben sämtlich in einer Ebene, der Polarebene ε des Punktes $\mathfrak{p}$. Zieht man in einer Ebene ε beliebige Strahlen, legt durch jeden das Paar Berührungsebenen des Hyperboloids und die zugeordnete vierte harmonische Ebene, so läuft dieselbe durch einen festen Punkt $\mathfrak{p}$, den Pol der Ebene ε u. s. w.

Hieraus folgt nun auch die Unabhängigkeit des räumlichen Polarsystems von den zu der ursprünglichen Konstruktion desselben verwendeten Elementen der zur Erzeugung des Hyperboloids benutzten projektivischen Gebilde, d. h. welches Paar Erzeugender derselben Regelschar des Hyperboloids man auch wählen mag als Axen zweier projektivischer Ebenenbüschel, die das Hyperboloid erzeugen und mittelst deren man das räumliche Polarsystem desselben konstruiert, es resultiert immer dasselbe räumliche Polarsystem.

Wir bemerken schliefslich, dafs unsere Betrachtung (S. 138) auf ein Polartetraëder besonderer Art geführt hat, welches verschieden ist von demjenigen Polartetraëder, auf das wir am Ende des vorigen Paragraphen kamen. Bei diesem neuen Polartetraëder sind zwar ebenfalls die Ecken Pole der Seitenflächen und die Seitenflächen Polarebenen der Ecken, aber nicht der gegenüberliegenden, sondern, wenn wir bezeichnen die Ecken:

$$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c} \quad \mathfrak{d}$$

die Seitenflächen:

$$\alpha = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}],\quad \beta = [\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}],\quad \gamma = [\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\quad \delta = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}],$$

so sind:

Pole	und	Polarebenen
$\mathfrak{a}$	„	β
$\mathfrak{b}$	„	α
$\mathfrak{c}$	„	δ
$\mathfrak{d}$	„	γ,

so dafs von den sechs Kanten vier:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{c}| = |\beta\delta|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{d}| = |\alpha\gamma|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{c}| = |\alpha\delta|,\quad |\mathfrak{a}\mathfrak{d}| = |\beta\gamma|$$

sich selbst konjugierte Strahlen sind, dagegen das dritte Paar Gegenkanten:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| = |\gamma\delta| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{d}| = |\alpha\beta|$$

ein Paar konjugierter Strahlen ist. Auch auf Polartetraëder solcher Art wird man bisweilen bei geometrischen Untersuchungen geführt.

§ 21. Einige Bestimmungsarten des räumlichen Polarsystems durch gegebene Elemente desselben.*)

Das räumliche Polarsystem, welches bisher aus dem Hyperboloid konstruiert wurde, kann unabhängig von demselben hergestellt werden durch eine gewisse Anzahl seiner eigenen Elemente, welche dasselbe bestimmen. Dabei kann der im Vorigen vorausgesetzte Fall, dafs es incidente Elemente desselben giebt, d. h. Punkte, deren Polarebenen durch sie selbst gehen, Ebenen, deren Pole in ihnen liegen, konjugierte Strahlen, die sich treffen, und endlich sich selbst konjugierte Strahlen, aufhören, während die allgemeinen Grundeigenschaften bestehen bleiben.

Giebt es im Polarsystem solche Punkte, deren Polarebenen durch sie selbst gehen, so heifst der Ort derselben die Kernfläche des Polarsystems und ist zugleich der von sämtlichen Ebenen, deren Pole in ihnen selbst liegen, umhüllte Ort.

*) Vergl. v. Staudt, Geometrie der Lage § 24. G. Beyer, Untersuchungen über das räumliche Polarsystem, Breslau 1868. Th. Reye. Geometrie der Lage II. Abt. S. 66. Hannover 1880.

Giebt es im Polarsystem sich selbst konjugierte Strahlen, so ist deren Ort unser Hyperboloid. Aber es braucht solche, wie wir später sehen werden, nicht zu geben; dann ist die Kernfläche eine Oberfläche zweiter Ordnung, welche keine geraden Linien enthält. Giebt es im Polarsystem keinen Punkt, dessen Polarebene durch ihn selbst geht, so hat dasselbe keinen reellen Kern und kann als der Vertreter einer imaginären Oberfläche zweiter Ordnung aufgefafst werden.

Man gelangt zu einem Polarsystem der einen oder der andern Art je nach der Wahl der Bestimmungsstücke, welche man zur Konstruktion desselben verwendet, und als Bestimmungsstücke können verschiedenartige Elemente des Polarsystems aufgefafst werden, welche einfach oder mehrfach zu zählen sind.

1) Als einfaches Bestimmungsstück ist aufzufassen ein Paar konjugierter Punkte oder ein Paar konjugierter Ebenen des räumlichen Polarsystems, d. h. zwei konjugierte Punkte einer Punktinvolution auf irgend einer Geraden oder zwei konjugierte Ebenen der Ebeneninvolution, welche irgend einer Geraden im Polarsysteme zugehört, oder auch zwei Punkte von denen der eine in der Polarebene des andern liegt, oder zwei Ebenen, von denen die eine durch den Pol der andern geht. Ein besonderer Fall hiervon ist, wofern eine reelle Kernfläche existiert, ein Punkt der Kernfläche oder eine Berührungsebene der Kernfläche.

2) Als zweimal zu zählendes Bestimmungsstück ist aufzufassen eine Gerade mit der ihr zugehörigen Punktinvolution oder eine Gerade mit der ihr zugehörigen Ebeneninvolution. Ferner ein Punkt und eine Gerade als Pol und Polare in dem ebenen Polarsystem, dessen Ebene den Punkt und die Gerade verbindet, oder eine Ebene und eine Gerade als Polarebene und Polarstrahl in dem Polarbündel, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden ist.

3) Als dreimal zu zählendes Bestimmungsstück ist aufzufassen ein Paar Pol und Polarebene des räumlichen Polarsystems. Insbesondere, wenn dasselbe eine reelle Kernfläche hat, auch ein Punkt der Kernfläche und seine Berührungsebene oder eine Berührungsebene der Kernfläche und ihr Berührungspunkt. Endlich, wenn die Kernfläche reelle gerade

Linien enthält, ist auch eine Erzeugende (sich selbst konjugierte Gerade) als dreifach zu zählendes Bestimmungsstück aufzufassen.

4) Als viermal zu zählendes Bestimmungsstück ist aufzufassen ein Paar konjugierter Strahlen des räumlichen Polarsystems; denn legen wir durch einen derselben zwei Ebenen, welche dem konjugierten Strahle in zwei Punkten begegnen, so haben wir in jeder der Ebenen Pol und Polare als zweimal zu zählendes Bestimmungsstück.

5) Als fünfmal zu zählendes Bestimmungsstück ist aufzufassen ein ebenes Polarsystem in einer Ebene ε oder ein Polarbündel durch einen Punkt $\mathfrak{p}$. Bekanntlich ist dasselbe durch fünf einfache Bestimmungsstücke gegeben. Im Falle einer reellen Kernfläche haben wir also einen Kegelschnitt oder einen Berührungskegel derselben.

6) Als sechsmal zu zählendes Bestimmungsstück ist aufzufassen ein Polartetraëder im räumlichen Polarsysteme, d. h. ein Tetraëder, dessen Seitenflächen die Polarebenen der gegenüberliegenden Ecken sind; eine Ecke und die gegenüberliegende Seitenfläche des Polartetraëders zählt nämlich dreimal, in dieser eine Ecke und die gegenüberliegende Seite des Dreiecks zweimal und in letzterer das Paar konjugierter Punkte einmal.

7) Als achtmal zu zählendes Bestimmungsstück ist aufzufassen ein Paar Pol und Polarebene mit dem dem Punkte zugehörigen Polarbündel und dem damit perspektivischen ebenen Polarsystem in der Ebene; denn hier tritt zu der dreifachen Bedingung von Pol und Polarebene noch die fünffache Bedingung eines der beiden Polarsysteme. Ferner auch zwei konjugierte Strahlen im räumlichen Polarsystem mit den ihnen zugehörigen Punktinvolutionen, also auch mit den perspektivisch mit jenen liegenden Ebeneninvolutionen; denn die konjugierten Strahlen an sich gelten als vierfaches Bestimmungsstück und jede der beiden Punktinvolutionen als zweifaches. Für den Fall einer reellen Kernfläche, wenn dieselbe eine geradlinige (einfaches Hyperboloid) ist, kommt die letzte Bestimmung überein mit einem windschiefen Vierseit auf dem Hyperboloid, die erste mit einem Berührungskegel und seinem Berührungskegelschnitt.

Wenn wir von diesen ungleichwertigen Bestimmungsstücken so viele nehmen, als zur vollständigen Bestimmung des räumlichen Polarsystems notwendig und hinreichend sind, so stellt sich heraus, dafs **neun einfache Bestimmungsstücke** dazu erforderlich sind, und die Mannigfaltigkeit derselben liefert eine grofse Anzahl von Aufgaben, von denen wir nur einige der einfachsten hier andeuten wollen.

Zwei konjugierte Ebenen mit den ihnen zugehörigen ebenen Polarsystemen bestimmen vollständig das räumliche Polarsystem; zwar repräsentiert jede von ihnen fünf Bestimmungsstücke, was zusammen zehn macht; davon gehen aber zunächst zwei ab, weil die Gerade, in welcher beide Ebenen sich schneiden nur eine und dieselbe Punktinvolution im Polarsystem hat, also auch in beiden ebenen Polarsystemen haben mufs; sodann tritt zu den acht übrig bleibenden Bestimmungsstücken als neuntes die Bedingung hinzu, dafs die beiden gegebenen Ebenen selbst konjugiert sein sollen; also, wie es sein mufs, neun unabhängige Bestimmungsstücke. In der That läfst sich nun zu jeder beliebigen Ebene ε der Pol, wie folgt, konstruieren:

Seien σ und σ_1 die samt den ihnen zugehörigen ebenen Polarsystemen gegebenen konjugierten Ebenen, s deren Schnittlinie und der Pol der Schnittlinie s in dem ersten ebenen Polarsystem $\mathfrak{s}_1$, in dem zweiten $\mathfrak{s}$, so ist $\mathfrak{s}_1$ der Pol der Ebene σ_1 und $\mathfrak{s}$ der Pol der Ebene σ im räumlichen Polarsystem. Schneidet die willkürliche Ebene ε die Ebenen σ und σ_1 in den Strahlen a und a_1, und sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ die Pole dieser Geraden in den gegebenen ebenen Polarsystemen, so ist die Verbindungslinie $|\mathfrak{s}\mathfrak{a}|$ der konjugierte Strahl zu a und die Verbindungslinie $|\mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1|$ der konjugierte Strahl zu a_1. Da aber a und a_1 in einer Ebene liegen, so müssen sich auch $|\mathfrak{s}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1|$ in einem Punkte $\mathfrak{p}$ treffen, welcher der gesuchte Pol $\mathfrak{p}$ der gegebenen Ebene ε ist. Die Ebene $[s\mathfrak{p}]$ hat zu ihrem Pol den Schnittpunkt der Verbindungslinie $|\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1|$ mit der Ebene ε; dadurch wird die Ebeneninvolution bestimmt, welche dem Strahle s im räumlichen Polarsystem zugehört.

Zweitens können wir zur Bestimmmung eines räumlichen Polarsystems annehmen einen Punkt $\mathfrak{p}$ mit dem ihm zugehörigen Polarbündel, seine Polarebene ε, auf welcher

also auch das zugehörige ebene Polarsystem bekannt ist, welches von dem Polarbündel ausgeschnitten wird, und außerdem, da diese Bestimmungsstücke für acht einfache zählen (s. o.), noch ein Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$ als neuntes Bestimmungsstück; dann ist das räumliche Polarsystem vollständig bestimmt, denn legen wir die Ebene $[\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1] = \varepsilon_1$, so kennen wir in ihr das zugehörige ebene Polarsystem, weil wir von demselben ein Punktepaar $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$, ferner ein Paar Pol und Polare mit den zugehörigen Involutionen kennen, nämlich $\mathfrak{p}$ als Pol und die Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon_1|$ als Polare und die derselben zugehörige Punktinvolution, als in der Ebene ε gegeben; wir kennen also zwei konjugierte Ebenen ε und ε_1 des räumlichen Polarsystems mit den in ihnen liegenden ebenen Polarsystemen, folglich nach dem ersten Fall das ganze räumliche Polarsystem.

Drittens können wir zur Bestimmung des räumlichen Polarsystems geben: zwei konjugierte Strahlen s und s_1 mit den auf ihnen liegenden Punktinvolutionen, was einer achtfachen Bedingung gleichkommt, und ein beliebiges Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$ als neuntes Bestimmungsstück. Dann ist wiederum das räumliche Polarsystem vollständig bestimmt und kann so konstruiert werden:

Man lege durch $\mathfrak{a}$ die einzige Gerade, welche gleichzeitig den beiden Strahlen s und s_1 in den Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ begegnet, und nehme zu $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ die konjugierten Punkte $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{b}_1'$ der gegebenen Punktinvolutionen auf den Trägern s und s_1, dann ist offenbar $\mathfrak{b}'$ der Pol der Ebene $[\mathfrak{b}s_1]$ und $\mathfrak{b}_1'$ der Pol der Ebene $[\mathfrak{b}_1 s]$; da sich nun die beiden Ebenen $[\mathfrak{b}s_1]$ und $[\mathfrak{b}_1 s]$ in dem Strahl $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1|$ schneiden, so muß die Verbindungslinie $|\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'|$ der konjugierte Strahl zu $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1|$ sein, auf welchem $\mathfrak{a}$ liegt. Hieraus ergiebt sich als Polarebene des Punktes $\mathfrak{a}$ die durch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'$ gelegte Ebene; schneidet dieselbe den Strahl $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1|$ in $\mathfrak{a}'$, so haben wir durch die beiden Punktepaare $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'$ die Punktinvolution auf der Geraden $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1| = t$, deren konjugierte Gerade $|\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'| = t_1$ ist. Nunmehr können wir zu jeder beliebigen Ebene ε den Pol $\mathfrak{p}$ konstruieren, indem wir zu den drei Schnittpunkten $\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2$ der Ebene ε mit den Geraden $s\,s_1\,t$ die konjugierten Punkte $\mathfrak{s}'\,\mathfrak{s}_1'\,\mathfrak{s}_2'$ in den bekannten Punktinvolutionen aufsuchen und die drei Ebenen

$[s_1 \mathfrak{z}']$ $[s \mathfrak{z}'_1]$ $[t_1 \mathfrak{z}'_2]$ legen, welche sich in dem gesuchten Pole $\mathfrak{p}$ schneiden; umgekehrt können wir auch zu jedem Punkte $\mathfrak{p}$ die Polarebene ε konstruieren.

Viertens können wir zur Bestimmung des räumlichen Polarsystems geben: ein Polartetraëder, dessen Seitenflächen die Polarebenen der gegenüberliegenden Ecken sein sollen, und aufserdem ein Paar Pol und Polarebene; denn die erste Forderung enthält sechs, die letztere drei Bestimmungsstücke, also zusammen neun. Nennen wir $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ die Ecken des Polartetraëders, $\mathfrak{p}$ und ε das gegebene Paar Pol und Polarebene, so sind $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| = s$ und $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}| = s_1$ ein Paar konjugierter Strahlen und in jedem derselben ein Punktepaar der zugehörigen Punktinvolution bekannt; legen wir die Ebene $[s\mathfrak{p}]$, so ist deren Pol der Schnittpunkt $(s_1 \varepsilon)$; es trifft also die Ebene $[s\mathfrak{p}]$ den Strahl s_1 in einem Punkte, welcher dem Punkte $(s_1 \varepsilon)$ konjugiert ist; somit haben wir auf s_1 ein zweites Paar konjugierter Punkte, also die ganze Punktinvolution. Ebenso wird die Ebene $[s_1 \mathfrak{p}]$ zu ihrem Pol den Punkt $(s \varepsilon)$ haben, also den Strahl s im konjugierten Punkte treffen; wir kennen daher auch die Punktinvolution auf dem Strahl s durch zwei ihrer Punktepaare. In derselben Weise können wir auf jedem der beiden übrigen Paare von Gegenkanten des Polartetraëders die zugehörigen Punktinvolutionen ermitteln; dadurch erhalten wir aber in jeder der Seitenflächen das ganze zugehörige ebene Polarsystem, welches schon durch ein Paar konjugierter Strahlen mit ihren Punktinvolutionen bestimmt wird. Wir haben daher auch in zwei konjugierten Ebenen (Seitenflächen des Polartetraëders) die zugehörigen ebenen Polarsysteme, und dadurch ist nach der ersten Konstruktion das räumliche Polarsystem vollständig bestimmt.

Wir können dies Ergebnis auch anders aussprechen; sind nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ die Ecken des Polartetraëders, und bezeichnen wir durch $\mathfrak{e}$ und ε Pol und Polarebene, die zur Bestimmung des räumlichen Polarsystems hinzutreten, so wird in ε ein ebenes Polarsystem enthalten sein, von welchem eine Anzahl zusammengehöriger Elemente angegeben werden können; nämlich die Gerade $|\mathfrak{a}\mathfrak{e}|$ und die Ebene $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ werden ε in Pol und Polare treffen; ebenso wird die Gerade $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ die Ebene ε in einem Punkte treffen, dessen Polare die Schnitt-

linie der Ebene $[\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{e}]$ mit ε ist, also können wir folgenden Satz aussprechen:

Wenn fünf beliebige Punkte im Raume gegeben sind und man verbindet zwei derselben durch eine Gerade g, die drei übrigen durch eine Ebene γ, was auf zehn verschiedene Arten geschehen kann, so bilden die Durchschnitts-punkte und -geraden von g und γ mit einer beliebigen Transversalebene ε allemal zehn Paare von Polen und Polaren eines und desselben ebenen Polarsystems.

Dieser Satz ist in gewisser Beziehung die räumliche Ausdehnung des bekannten Satzes der Ebene, nach welchem eine beliebige Gerade von den drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in drei Punktepaaren einer Punktinvolution geschnitten wird.

Schliefslich wollen wir noch eine Konstruktion hervorheben, die auf ein scheinbares Paradoxon führt. Nehmen wir nämlich zur Bestimmung des räumlichen Polarsystems drei Paare von Polen und Polarebenen: $\mathfrak{p}$ und ε, $\mathfrak{p}_1$ und ε_1, $\mathfrak{p}_2$ und ε_2 an, so ist jede dieser Bedingungen dreimal zu zählen und wir haben, wie es scheint, neun Bestimmungsstücke; allein dieselben sind von einander nicht unabhängig und bestimmen daher das räumliche Polarsystem noch nicht, sondern es mufs noch ein Bestimmungsstück, also z. B. ein Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ hinzutreten.

In der That, legen wir die Ebene $[\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]$, welche von den Ebenen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2$ in den Strahlen $s\ s_1\ s_2$ geschnitten wird, so haben wir in dem ebenen Polarsysteme drei Paare von Polen und Polaren, nämlich $\mathfrak{p}$ und s, $\mathfrak{p}_1$ und s_1, $\mathfrak{p}_2$ und s_2; diese sind aber von einander abhängig; denn bezeichnen wir die Schnittpunkte:

$$(s_1 s_2) = \mathfrak{q} \quad (s_2 s) = \mathfrak{q}_1 \quad (s s_1) = \mathfrak{q}_2$$

und die Schnittpunkte:

$$(|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|, s) = \mathfrak{a} \quad (|\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}|, s_1) = \mathfrak{b} \quad (|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|, s_2) = \mathfrak{c},$$

so wird das vollständige Viereck:

$$\mathfrak{a}\quad \mathfrak{b}\quad \mathfrak{p}_2\quad \mathfrak{q}_2$$

drei Seitenpaare haben, welche die Transversale $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ in drei Punktepaaren einer Punktinvolution schneiden müssen; von

diesen ist das eine $|\mathfrak{a}\mathfrak{p}_2|$ oder $|\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1|$, und $|\mathfrak{b}\mathfrak{q}_2|$ oder s_1, trifft also die Transversale in einem Paar konjugierter Punkte des ebenen Polarsystems, das andere $|\mathfrak{a}\mathfrak{q}_2|$ oder s, und $|\mathfrak{b}\mathfrak{p}_2|$ oder $|\mathfrak{b}\mathfrak{p}|$, trifft also ebenfalls die Transversale in einem Paar konjugierter Punkte des ebenen Polarsystems, folglich auch das dritte Seitenpaar $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2|$, folglich mufs der Pol von $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2|$ auf $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ liegen; der Pol von $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2|$ ist aber der Schnittpunkt der Polaren s_2 und $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$, d. h. der Punkt $\mathfrak{c}$; folglich *liegen die drei Punkte* $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ *auf einer Geraden* und ihre Polaren, d. h. *die drei Verbindungslinien* $|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$, $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1|$, $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2|$ *schneiden sich in einem Punkte.* Die beiden Dreiecke $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ liegen also perspektivisch.

Wir schliefsen hieraus folgenden Satz für das räumliche Polarsystem:

Wenn $\mathfrak{p}$ *und* ε, $\mathfrak{p}_1$ *und* ε_1, $\mathfrak{p}_2$ *und* ε_2 *drei Paare von Polen und Polarebenen eines räumlichen Polarsystems sind, so liegen die drei Schnittpunkte:*

$$(|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|,\ \varepsilon)\quad(|\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}|,\ \varepsilon_1)\quad(|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|,\ \varepsilon_2)$$

auf einer Geraden, und ihre drei Polarebenen:

$$[\mathfrak{p},\ |\varepsilon_1\varepsilon_2|]\quad[\mathfrak{p}_1,\ |\varepsilon_2\varepsilon|]\quad[\mathfrak{p}_2,\ |\varepsilon\varepsilon_1|]$$

müssen sich daher auch in einer Geraden schneiden.

Wir sehen hieraus, dafs $\mathfrak{p}$ und ε, $\mathfrak{p}_1$ und ε_1, $\mathfrak{p}_2$ und ε_2 nicht willkürlich als Pole und Polarebenen eines räumlichen Polarsystems gewählt werden dürfen, sondern dann der eben ausgesprochenen Bedingung genügen müssen, wodurch also z. B. ε_2 gezwungen ist durch einen von den übrigen Elementen abhängigen Punkt zu gehen; da wir mithin von der Ebene ε_2 nur zwei Punkte willkürlich annehmen dürfen, so reduzieren sich die gegebenen Bestimmungsstücke auf acht von einander unabhängige Elemente. Ist daher die angegebene Bedingung zwischen $\mathfrak{p}$ und ε, $\mathfrak{p}_1$ und ε_1, $\mathfrak{p}_2$ und ε_2 erfüllt, so können wir noch ein Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ willkürlich annehmen, dann ist das ganze Polarsystem vollständig bestimmt, denn wir kennen nunmehr das ganze ebene Polarsystem in der Ebene $[\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]$ und das ganze Polarbündel des Pols $(\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2)$ und haben aufserdem das Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, also den zweiten von uns betrachteten Fall.

Wir unterlassen es, die weiteren zahlreichen Aufgaben

zu behandeln, welche sich hier anknüpfen ließen und fügen nur noch eine Folgerung hinzu, welche sich aus dem letzten Satze ergiebt:

Nehmen wir nämlich vier beliebige Punkte im Raume und ihre Polarebenen in einem gegebenen räumlichen Polarsysteme und bezeichnen dieselben (mit Abänderung der vorigen Bezeichnung):

$$\begin{array}{lcccc} \text{Pole} & \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \text{Polarebenen} & \alpha & \beta & \gamma & \delta, \end{array}$$

so haben wir zwei Tetraëder, von denen das eine die Polarfigur des andern ist; diese stehen in einer gewissen Abhängigkeit von einander, da ja schon drei Paare von Polen und Polarebenen einer Bedingung unterworfen sind.

Bezeichnen wir die vier Ebenen, durch je drei Punkte gelegt:

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] = \alpha_1 \quad [\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}] = \beta_1 \quad [\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \gamma_1 \quad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \delta_1$$

und die vier Schnittpunkte je dreier Ebenen:

$$(\beta\gamma\delta) = \mathfrak{a}_1 \quad (\gamma\delta\alpha) = \mathfrak{b}_1 \quad (\delta\alpha\beta) = \mathfrak{c}_1 \quad (\alpha\beta\gamma) = \mathfrak{d}_1,$$

so haben wir zuvörderst nach dem vorigen Satze die drei Punkte:

$$(|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|, \alpha) \quad (|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|, \beta) \quad (|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, \gamma)$$

auf einer Geraden s, welche in der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ liegt. Diese Gerade schneidet offenbar die Schnittlinie $|\alpha\alpha_1|$, weil der Punkt $(|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|, \alpha)$ der Geraden s sowohl in der Ebene α, als auch in der Ebene $\alpha_1 = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ liegt; aus gleichen Gründen trifft die Gerade s auch die Schnittlinie $|\beta\beta_1|$ und die Schnittlinie $|\gamma\gamma_1|$, endlich aber auch die Schnittlinie $|\delta\delta_1|$, weil s in der Ebene $\delta_1 = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ selbst liegt. Die Gerade s trifft also alle vier Schnittlinien:

$$|\alpha\alpha_1| \quad |\beta\beta_1| \quad |\gamma\gamma_1| \quad |\delta\delta_1|.$$

In derselben Weise können wir eine zweite Gerade angeben, welche jene vier Schnittlinien treffen muſs, nämlich diejenige, in der die drei Punkte liegen:

$$(|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|, \alpha) \quad (|\mathfrak{d}\mathfrak{a}|, \gamma) \quad (|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|, \delta),$$

ferner eine dritte Gerade, die die Punkte enthält:

$$(|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|, \beta) \quad (|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|, \delta) \quad (|\mathfrak{b}\mathfrak{d}|, \gamma)$$

und eine vierte Gerade, die die Punkte enthält:

$$(|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|, \beta) \quad (|\mathfrak{b}\mathfrak{d} , \alpha) \quad (|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, \delta).$$

Alle vier Geraden besitzen die gleiche Eigenschaft, den vier Strahlen $|\alpha\alpha_1|$ $|\beta\beta_1|$ $|\gamma\gamma_1|$ $|\delta\delta_1|$ gleichzeitig zu begegnen. Hieraus folgt aber (S. 95), da es mehr als zwei Gerade giebt, welche vier Strahlen gleichzeitig treffen, dafs diese vier Strahlen einer Regelschar angehören müssen, oder wie wir sagen, hyperboloidische Lage haben. In ganz derselben Weise können wir vermittelst des zweiten Theiles des obigen Satzes zeigen, dafs die Verbindungslinien:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1| \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1| \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1|$$

hyperboloidische Lage haben; wir können also den Satz aussprechen:

Wenn man in einem räumlichen Polarsystem von den Ecken $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ eines beliebigen Tetraëders die Polarebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ nimmt, so bilden dieselben ein neues Tetraëder, dessen Ecken und Seitenflächen man den Ecken und Seitenflächen des ersteren in der Weise entsprechen lassen kann, dafs der Ecke $\mathfrak{a}$ des einen die von den drei Polarebenen der übrigen Ecken gebildete Ecke $\mathfrak{a}_1$ des zweiten Tetraëders entspreche und ebenso einer Seitenfläche des ersteren, die die Pole der drei übrigen enthaltende Seitenfläche des zweiten Tetraëders entspreche; alsdann haben sowohl die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken der beiden Tetraëder, als auch die vier Schnittlinien entsprechender Seitenflächen beider Tetraëder hyperboloidische Lage. Diese vier Strahlenpaare sind paarweise konjugierte Strahlen des räumlichen Polarsystems.

§ 22. Untersuchung eines Polartetraëders.

Das räumliche Polarsystem, dessen Konstruktion aus gewissen zu seiner Bestimmung erforderlichen Elementen, die willkürlich angenommen werden können, wir im vorigen Paragraphen kennen gelernt haben, enthält in unendlicher Menge Polartetraëder, d. h. solche Tetraëder, deren Seitenflächen die Polarebenen der gegenüberliegenden Ecken, und deren

jedes Paar Gegenkanten ein Paar konjugierter Strahlen des räumlichen Polarsystems ist. Wir brauchen nur irgend ein Paar konjugierter Strahlen $s\ s_1$ mit den ihnen zugehörigen Punktinvolutionen herauszunehmen und irgend zwei konjugierte Punkte der einen und zwei konjugierte Punkte der andern Punktinvolution zu wählen, so sind dieselben allemal die vier Ecken eines Polartetraëders, wie unmittelbar einleuchtet, weil die Polarebene je eines dieser vier Punkte durch die drei übrigen gehen mufs.

Seien nun die drei Paare Gegenkanten eines solchen Polartetraëders

$$a a_1, \quad b b_1, \quad c c_1$$

und die Punktinvolutionen auf denselben durch ein Paar konjugierter Punkte gleichnamig bezeichnet:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}', \ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1'; \quad \mathfrak{b}\mathfrak{b}', \ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1'; \quad \mathfrak{c}\mathfrak{c}', \ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_1',$$

so besteht zwischen diesen sechs Punktinvolutionen eine gewisse Abhängigkeit; wenn nämlich eine beliebige Transversalebene ε den beiden Paaren Gegenkanten $a a_1$ $b b_1$ in den Punkten:

$$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{b}_1$$

begegnet, so dafs also $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ sich treffen, so müssen auch die konjugierten Strahlen $|\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'|$ und $|\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'|$ sich treffen (S. 133) und zwar in dem Pole $\mathfrak{p}$ der Ebene ε; trifft nun dieselbe Ebene ε das dritte Paar Gegenkanten $c c_1$ in den Punkten $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, so mufs auch die Verbindungslinie $|\mathfrak{c}'\mathfrak{c}_1'|$ durch den vorigen Punkt $\mathfrak{p}$ gehen. Wir haben also in Verbindung mit dem polaren Nebensatze folgenden Doppelsatz:

Wenn man die drei Paare Gegenkanten eines Polartetraëders mit einer beliebigen Ebene schneidet und die konjugierten Punkte derselben in den zugehörigen Punktinvolutionen verbindet, so erhält man drei Strahlen, die durch einen Punkt

Wenn man einen beliebigen Punkt mit den drei Paar Gegenkanten eines Polartetraëders verbindet und die konjugierten Ebenen in den zugehörigen Ebeneninvolutionen paarweise zum Schnitte bringt, so erhält man drei Schnittlinien, die in

laufen, den Pol der gegebenen Ebene. | einer Ebene liegen, der Polarebene des gegebenen Punktes.

Hieraus folgt u. a., wenn man die gegebene Ebene ε in die Unendlichkeit verlegt (ε^∞) als der Pol derselben, welcher der **Mittelpunkt des räumlichen Polarsystems** heifst, der Durchschnittspunkt aller Verbindungslinien der Mittelpunkte der auf je zwei konjugierten Strahlen befindlichen Punktinvolutionen. Nennen wir die den unendlich-entfernten Punkten der sechs Kanten des Polartetraëders konjugierten Punkte, d. h. die sechs Mittelpunkte der auf den Kanten befindlichen Punktinvolutionen:

$$\mathfrak{a}^0 \quad \mathfrak{a}_1^0 \quad \mathfrak{b}^0 \quad \mathfrak{b}_1^0 \quad \mathfrak{c}^0 \quad \mathfrak{c}_1^0,$$

so schneiden sich $|\mathfrak{a}^0\mathfrak{a}_1^0|$, $|\mathfrak{b}^0\mathfrak{b}_1^0|$, $|\mathfrak{c}^0\mathfrak{c}_1^0|$ in dem Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Polarsystems. Die Mittelpunkte $\mathfrak{a}^0\,\mathfrak{a}_1^0\,\mathfrak{b}^0\,\mathfrak{b}_1^0\,\mathfrak{c}^0\,\mathfrak{c}_1^0$ entscheiden über den hyperbolischen oder elliptischen Charakter der Punktinvolutionen auf den Kanten; denn je nachdem der Mittelpunkt einer Punktinvolution zwischen irgend einem Paare konjugierter Punkte oder aufserhalb desselben liegt, ist die Punktinvolution elliptisch oder hyperbolisch.

Wir wissen, dafs ein räumliches Polarsystem vollständig bestimmt ist, sobald wir zwei konjugierte Strahlen desselben mit den ihnen zugehörigen Punktinvolutionen und aufser dem irgend ein Paar konjugierter Punkte kennen (S. 148). Nehmen wir daher ein beliebiges Polartetraëder des räumlichen Polarsystems an, welches die Ecken $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ und die drei Paar Gegenkanten haben möge:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = a \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}| = b \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}| = c$$
$$|\mathfrak{C}\mathfrak{D}| = a_1 \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{D}| = b_1 \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{D}| = c_1,$$

fügen wir auf dem Gegenkantenpaar $a a_1$ die Mittelpunkte $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{a}_1^0$ der zugehörigen Punktinvolutionen willkürlich hinzu, so sind diese selbst vollständig bestimmt, jede durch ihren Mittelpunkt und dasjenige Paar konjugierter Punkte, welches die Ecken des Polartetraëders bestimmen; aufserdem können wir noch auf einer Kante b den Mittelpunkt $\mathfrak{b}^0$ willkürlich wählen, denn dieser und der unendlich entfernte Punkt der Kante b kann als das neunte Bestimmungsstück, das noch notwendige Paar konjugierter Punkte des räum-

lichen Polarsystems gewählt werden; dann ist alles übrige vollständig mitbestimmt und in bekannter Weise zu ermitteln. Die drei Punkte $\mathfrak{a}^0\,\mathfrak{a}_1^0\,\mathfrak{b}^0$ aber können willkürlich angenommen werden. Um die übrigen drei Mittelpunkte der Punktinvolutionen auf den Kanten des Polartetraëders zu erhalten, brauchen wir jetzt nur die Seitenflächen desselben zu betrachten, deren jede ein Polardreieck enthält. In der Seitenfläche $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ kennen wir auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = a$ den Mittelpunkt $\mathfrak{a}^0$ der Punktinvolution, auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}| = b$ den Mittelpunkt $\mathfrak{b}^0$, folglich erhalten wir auf $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}| = c$ den Mittelpunkt $\mathfrak{c}^0$ der zugehörigen Punktinvolution nach dem bekannten oben benutzten Satze, wonach die drei Verbindungslinien der Ecken des Polardreiecks mit den Mittelpunkten der Involutionen auf den Gegenseiten sich in einem Punkte schneiden müssen, weil die drei unendlich-entfernten Punkte der Seiten auf einer Geraden (g^∞) liegen.

Wenn man aber die Ecken eines Dreiecks mit einem vierten Punkte verbindet und die Schnittpunkte mit den Gegenseiten aufsucht, so können hinsichtlich der Lage derselben verschiedene Fälle eintreten. Bezeichnen wir immer als elliptische Lage (e) diejenige, bei welcher der Treffpunkt zwischen die Ecken des Dreiecks fällt, und als hyperbolische Lage (h) diejenige, bei welcher der Treffpunkt ausserhalb der Dreiecksecken liegt, so gilt bei der ebenen Figur bekanntlich das Gesetz: Findet auf zwei Seiten elliptische Lage statt, so ist auch auf der dritten Seite die Lage elliptisch; findet bei einer Seite elliptische, bei der zweiten hyperbolische Lage statt, so ist auf der dritten Seite hyperbolische Lage; findet auf zwei Seiten hyperbolische Lage statt, so ist auf der dritten Seite elliptische Lage.

Dies vorausgeschickt, haben wir in der Seitenfläche $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ auf zwei Seiten a und b gegebene Involutionen, folglich ist die Lage von $\mathfrak{c}^0$ bestimmt, und unmittelbar angebbar, ob elliptische Lage oder hyperbolische Lage stattfindet; sodann sind in der Seitenfläche $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ auf den Seiten $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}| = c$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}| = a_1$ die Mittelpunkte der Involutionen bekannt, folglich auf der dritten $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}| = b_1$ der Mittelpunkt $\mathfrak{b}_1^0$ dadurch bestimmt, endlich in der Seitenfläche $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}]$ auf den Seiten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = a$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}| = b_1$ die Mittelpunkte bekannt, also auf

der dritten $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}| = c_1$ der letzte Mittelpunkt $\mathfrak{c}_1^0$ bestimmt. Sobald also die drei Mittelpunkte $\mathfrak{a}^0 \mathfrak{a}_1^0 \mathfrak{b}^0$ angenommen sind, werden die drei übrigen $\mathfrak{c}^0\ \mathfrak{b}_1^0\ \mathfrak{c}_1^0$ in der angegebenen Weise gefunden, und es ist unmittelbar zu erkennen, ob sie elliptische oder hyperbolische Lage hervorrufen. Für die Annahme der drei ersten Mittelpunkte haben wir aber eine achtfache Willkür, indem wir jeden von ihnen elliptisch oder hyperbolisch wählen können; die übrigen werden für jeden dieser 8 Fälle danach bestimmt, und wir erhalten auf den sechs Tetraëderkanten folgende 8 Möglichkeiten hinsichtlich des elliptischen oder hyperbolischen Charakters der zugehörigen Punktinvolutionen:

Kanten	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
a	e	e	h	h	e	e	h	h
a_1	e	e	h	h	h	h	e	e
b	e	h	e	h	e	h	h	e
b_1	e	h	e	h	h	e	e	h
c	e	h	h	e	e	h	e	h
c_1	e	h	h	e	h	e	h	e.

Oder wenn wir die Kanten nach den vier Seitenflächen des Polartetraëders gruppieren, erhalten wir in den acht möglichen Fällen folgende Tabelle:

Die vier Seitenflächen des Polartetraëders:

	$[abc]$	$[ab_1c_1]$	$[bc_1a_1]$	$[ca_1b_1]$
1)	*eee*	*eee*	*eee*	*eee*
2)	*ehh*	*ehh*	*hhe*	*heh*
3)	*heh*	*heh*	*ehh*	*hhe*
4)	*hhe*	*hhe*	*heh*	*ehh*
5)	*eee*	*ehh*	*ehh*	*ehh*
6)	*ehh*	*eee*	*heh*	*hhe*
7)	*hhe*	*heh*	*hhe*	*eee*
8)	*heh*	*hhe*	*eee*	*heh*.

Hieraus ergiebt sich nun folgendes Gesetz:

1. Wenn bei einem Polartetraëder auf einem

Paar Gegenkanten die zugehörigen Punktinvolutionen gleichartig sind (d. h. beide elliptisch oder beide hyperbolisch), so sind sie auch auf jedem der beiden übrigen Paare von Gegenkanten gleichartig und zwar sind sie entweder auf allen drei Paaren von Gegenkanten elliptisch oder auf einem Paare elliptisch und auf den beiden anderen Paaren hyperbolisch d. h. entweder sind alle sechs Punktinvolutionen elliptisch, oder zwei elliptisch und vier hyperbolisch. Im ersten Falle sind natürlich auch in jeder Seitenfläche des Tetraëders die Punktinvolutionen auf den Kanten elliptisch; im zweiten Falle sind von den drei Kanten in einer Seitenfläche immer zwei hyperbolisch und die dritte elliptisch. Ebenso sind auf den Kanten des Tetraëders, die von einer Ecke ausgehen, im ersten Falle alle drei Punktinvolutionen elliptisch, im zweiten Falle immer zwei hyperbolisch und die dritte elliptisch.

2. Wenn bei einem Polartetraëder auf einem Paar Gegenkanten die zugehörigen Punktinvolutionen ungleichartig sind (d. h. eine elliptisch, die andere hyperbolisch), so sind sie auch auf jedem der beiden übrigen Paare von Gegenkanten ungleichartig, also überhaupt drei elliptisch und drei hyperbolisch und zwar in den drei Kanten des Polartetraëders, welche in einer Seitenfläche desselben liegen, einmal alle drei elliptisch und dreimal zwei hyperbolisch und die dritte elliptisch; dagegen in den drei Kanten des Polartetraëders, welche in einer Ecke zusammenstofsen, einmal alle drei hyperbolisch und dreimal zwei elliptisch und die dritte hyperbolisch.

Wir werden hierdurch im wesentlichen nur auf drei verschiedene Arten von Polartetraëdern geführt, nämlich

in dem Falle 1) sind alle Involutionen elliptisch,

in den Fällen 2), 3), 4): auf einem Paar Gegenkanten elliptische, auf den vier übrigen hyperbolische Punktinvolutionen;

in den Fällen 5), 6), 7), 8): auf drei Kanten elliptische, auf den drei übrigen hyperbolische Punktinvolutionen, und zwar gehen von einer der vier Tetraëderecken drei hyperbolische Kanten aus, während die drei Kanten in der gegenüberliegenden Seitenfläche elliptisch sind.

Es zeigt sich nun die merkwürdige Erscheinung, dafs diese drei Gattungen von Polartetraëdern nie zusammen bei einem räumlichen Polarsystem auftreten, sondern *dafs ein gegebenes Polarsystem immer nur eine Art von Polartetraëdern enthalten kann*, wodurch dann naturgemäfs drei wesentlich verschiedene Arten von räumlichen Polarsystemen zu unterscheiden sein werden.

In der That, seien ss_1 ein beliebiges Paar konjugierter Strahlen und tt_1 ein beliebiges zweites Paar konjugierter Strahlen in einem gegebenen räumlichen Polarsystem, und nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ im Raume, so giebt es durch $\mathfrak{p}$ einen einzigen bestimmten Strahl, welcher gleichzeitig s und s_1 in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ trifft; ebenso nur einen einzigen bestimmten Strahl durch $\mathfrak{p}$, welcher gleichzeitig t und t_1 in den Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ trifft; seien ferner die konjugierten Punkte zu

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{a}' & \mathfrak{b}' & \mathfrak{a}_1' & \mathfrak{b}_1' \end{matrix}$$

in den Punktinvolutionen, welche den Strahlen sts_1t_1 im gegebenen Polarsystem zugehören; dann ist, wie wir wissen zu $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ der konjugierte Strahl $|\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'|$ und die vier Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'$ sind die Ecken eines Polartetraëders; ebenso ist zu $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ der konjugierte Strahl $|\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'|$ und die vier Punkte $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'$ sind ebenfalls die Ecken eines Polartetraëders. Da aber die vier Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ in einer Ebene liegen, weil $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ sich in dem Punkte $\mathfrak{p}$ treffen, so müssen sich die konjugierten Strahlen $|\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'|$ $|\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'|$ treffen, also auch in einer Ebene liegen, und diese ist die Polarebene ε des Punktes $\mathfrak{p}$, während andererseits der Schnittpunkt $(|\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'|, |\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'|) = \mathfrak{p}_1$ der Pol der Ebene ε_1 ist, in welcher die vier Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ liegen; wir haben also

$$\mathfrak{p} = (|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|, |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|) \qquad \varepsilon = [|\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'|\ |\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'|]$$
$$\mathfrak{p}_1 = (|\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'|, |\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'|) \qquad \varepsilon_1 = [|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|],$$

und es sind sowohl $\mathfrak{p}$ und ε, als auch $\mathfrak{p}_1$ und ε_1 Pol und Polarebene im räumlichen Polarsystem; folglich sind auch $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ und $|\varepsilon\varepsilon_1|$ konjugierte Strahlen, welche wir zur Abkürzung mit rr_1 bezeichnen wollen. Dieses Paar rr_1 begegnet sowohl dem Paare konjugierter Strahlen $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'|$, als auch dem Paare konjugierter Strahlen $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ und $|\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'|$ wie ersichtlich ist.

Wir wissen nun, dafs, wenn ein Paar konjugierter Strahlen von einem andern Paare getroffen wird, dieses zwei Paare Gegenkanten eines Polartetraëders sind, also die zugehörigen Punktinvolutionen, wenn sie bei einem Paare gleichartig sind, auch beim andern Paare gleichartig sein müssen, wenn sie bei einem Paare ungleichartig sind, auch beim andern Paare ungleichartig sein müssen. Hieraus folgt: So wie ss_1 beschaffen sind, müssen auch $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'|$ beschaffen sein; so wie $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'|$ beschaffen sind, müssen auch rr_1 beschaffen sein; so wie rr_1 beschaffen sind, müssen auch $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ und $|\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'|$ beschaffen sein, und endlich, so wie $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ und $|\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'|$ beschaffen sind, müssen auch tt_1 beschaffen sein; folglich mufs auch der Charakter der Involutionen auf ss_1 mit dem der Involutionen auf tt_1 übereinstimmen und, da ss_1 und tt_1 ganz willkürlich gewählte Paare konjugierter Strahlen im räumlichen Polarsysteme sind, so haben wir dies Ergebnis:

Wenn in einem räumlichen Polarsystem auf irgend zwei konjugierten Strahlen die zugehörigen Punktinvolutionen gleichartig sind, so sind sie auf sämtlichen Paaren konjugierter Strahlen gleichartig (d.h. beide elliptisch oder beide hyperbolisch); wenn dagegen auf irgend einem Paar konjugierter Strahlen die zugehörigen Punktinvolutionen ungleichartig sind (d. h. eine elliptisch, die andere hyperbolisch), so sind sie auf sämtlichen Paaren konjugierter Strahlen ungleichartig.

Hiernach haben wir drei wesentlich verschiedene Arten von räumlichen Polarsystemen zu unterscheiden, die wir von einander getrennt betrachten wollen.

§ 23. Drei Arten räumlicher Polarsysteme.

Nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen zerfallen die räumlichen Polarsysteme zunächst in zwei Hauptklassen:

I. Diejenigen räumlichen Polarsysteme, bei denen auf jedem Paare konjugierter Strahlen die zugehörigen Punktinvolutionen (also auch Ebeneninvolutionen) gleichartig sind,

II. diejenigen räumlichen Polarsysteme, bei denen auf jedem Paare konjugierter Strahlen die zugehörigen Punktinvolutionen (also auch Ebeneninvolutionen) ungleichartig sind.

Was zunächst die zweite Klasse von Polarsystemen betrifft, so ist ersichtlich, dafs dieselben immer eine reelle Kernfläche haben müssen; denn von irgend zwei konjugierten Strahlen desselben mufs einer der Träger einer zugehörigen elliptischen, der andere einer hyperbolischen Punktinvolution sein; letztere hat zwei reelle Doppelpunkte (Asymptotenpunkte), erstere zwei reelle Doppelebenen (Asymptotenebenen), welche durch die vorigen Doppelpunkte gehen. Die Doppelpunkte sind Punkte der Kernfläche, die Doppelebenen die Berührungsebenen in diesen Punkten; denn seien s_e und s_h die beiden konjugierten Strahlen und $\mathfrak{t}\mathfrak{t}'$ die Doppelpunkte der hyperbolischen Punktinvolution auf s_h, so ist $[\mathfrak{t}s_e] = \tau$ die Polarebene von $\mathfrak{t}$, welche durch diesen Punkt selbst geht. Alle Strahlen im Raume, die durch $\mathfrak{t}$ gehen, müssen die Träger hyperbolischer Punktinvolutionen sein, welche einen Asymptotenpunkt in $\mathfrak{t}$ haben und in dem andern zum zweiten Male der Kernfläche begegnen. Die konjugierten Strahlen zu diesen erfüllen die ganze Ebene τ und müssen nach der Natur dieses räumlichen Polarsystems sämtlich elliptisch sein; die Ebene τ kann also keinen weiteren reellen Punkt der Kernfläche enthalten, als den Punkt $\mathfrak{t}$ allein; alle Strahlen durch $\mathfrak{t}$, die in der Ebene τ selbst liegen, haben zu konjugierten Strahlen wiederum Strahlen, die in τ liegen und durch $\mathfrak{t}$ gehen, und diese Strahlenpaare bilden eine elliptische Strahleninvolution, welche wir erhalten, indem wir $\mathfrak{t}$ mit der auf s_e liegenden Punktinvolution verbinden. Diese elliptische

Strahleninvolution ist der Vertreter eines imaginären Linienpaars (die imaginären Doppelstrahlen der elliptischen Strahleninvolution). Diese beiden imaginären Geraden sind als sich selbst konjugierte Strahlen aufzufassen, die die Eigenschaft besitzen, dafs jeder ihrer Punkte ein Punkt der Kernfläche und jede Ebene durch sie eine Berührungsebene der Kernfläche ist. Wir können also sagen, dafs die Ebene τ die Kernfläche in einem imaginären Linienpaar schneidet, dessen einziger reeller Doppelpunkt $\mathfrak{t}$ ist. Da nun alles, was von dem Punkte $\mathfrak{t}$ der Kernfläche und der durch $\mathfrak{t}$ gehenden Polarebene τ gilt, in ganz gleicher Weise von jedem Punkte $\mathfrak{t}$ der Kernfläche und seiner Polarebene τ gelten mufs, da ferner sich selbst konjugierte Strahlen des Polarsystems, die ganz auf der Kernfläche liegen, nur in einer solchen Ebene τ, die durch ihren Pol $\mathfrak{t}$ geht, gesucht werden können, so dürfen wir sagen:

Das Polarsystem der zweiten Klasse hat immer eine reelle Kernfläche, den Ort aller Punkte $\mathfrak{t}$, deren Polarebenen τ durch $\mathfrak{t}$ gehen. Jede solche Polarebene τ enthält nur den einzigen reellen Punkt $\mathfrak{t}$ der Kernfläche und schneidet die Kernfläche in einem imaginären Linienpaar, welches vertreten wird durch eine bestimmte elliptische Strahleninvolution, die in der Ebene τ liegt, ihren Mittelpunkt in $\mathfrak{t}$ hat und durch das räumliche Polarsystem bestimmt ist. Wir nennen die Ebene τ die Berührungsebene der Kernfläche im Punkte $\mathfrak{t}$, weil alle Strahlen die in ihr durch $\mathfrak{t}$ gezogen werden, keinen weiteren Punkt der Kernfläche enthalten können (Träger parabolischer Punktinvolutionen), also Tangenten der Kernfläche sind. Das Polarsystem dieser II. Klasse enthält keinen reellen sich selbst konjugierten Strahl, die Kernfläche also keine reelle gerade Linie, die ganz auf ihr verläuft; sie ist eine nicht-geradlinige Fläche zweiter Ordnung; wenn man aber will, so enthält jede Berührungsebene ein imaginäres Linienpaar, vertreten durch eine bestimmte elliptische Strahleninvolution, und diese imaginären Linienpaare kön-

nen als gerade Linien der Kernfläche betrachtet werden.

Bevor wir auf diese nicht-geradlinigen Flächen 2. Ordnung, welche als Kernflächen des Polarsystems der II. Klasse auftreten, näher eingehen, wenden wir unsern Blick zurück zu dem Polarsystem der I. Klasse; dieses giebt zweien verschiedenen Arten von Polarsystemen Entstehung; nämlich solchen, die eine reelle Kernfläche besitzen, und solchen, die keine reelle Kernfläche besitzen.

Sind nämlich s und s_1 ein Paar konjugierter Strahlen und Träger elliptischer Punktinvolutionen, die, wie wir gesehen haben, immer beim Polarsystem der ersten Klasse vorkommen müssen (die Fälle 1), 2), 3), 4) auf S. 158) als Gegenkanten eines beliebigen Polartetraëders, so können hier nur zwei Fälle eintreten: entweder sind die vier übrigen Kanten des Polartetraëders sämtlich hyperbolisch oder sämtlich elliptisch; fassen wir zunächst den ersten Fall ins Auge. Da in diesem Falle überhaupt hyperbolische Punktinvolutionen auftreten, so hat das räumlische Polarsystem eine reelle Kernfläche, den Ort aller Punkte, deren Polarebenen durch sie selbst gehen. Nehmen wir daher eine solche beliebige Gerade s, den Träger einer hyperbolischen Punktinvolution mit den reellen Doppelpunkten $\mathfrak{t}\mathfrak{t}'$, so mufs auch auf der konjugierten Geraden s_1 die zugehörige Punktinvolution hyperbolisch sein und wird die reellen Asymptotenpunkte $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_1'$ haben. Nun ist offenbar $|\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1|$ eine sich selbst konjugierte Gerade, weil die Polarebenen sowohl von $\mathfrak{t}$ als auch von $\mathfrak{t}_1$ beide durch $|\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1|$ gehen, und in gleicher Weise erhalten wir drei andere sich selbst konjugierte Strahlen; wir haben also ein windschiefes Vierseit auf der Kernfläche, gebildet von den vier sich selbst konjugierten Strahlen:

$$|\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1| = l, \quad |\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1'| = g, \quad |\mathfrak{t}'\mathfrak{t}_1'| = l_1, \quad |\mathfrak{t}'\mathfrak{t}_1| = g_1.$$

Dies sind, wie leicht einzusehen ist, nicht die einzigen sich selbst konjugierten Strahlen, sondern es giebt noch unendlich-viele andere, deren Gesamtheit so ermittelt werden kann:

Nehmen wir die beiden eben gefundenen windschiefen Geraden l und l_1, deren jede ein sich selbst konjugierter Strahl im

Polarsystem ist und ziehen irgend eine Gerade s, welche beiden begegnet, so mufs der konjugierte Strahl s_1 auch beiden, l und l_1, begegnen; denn begegnet der Strahl s der Geraden l_1 in $\mathfrak{x}_1$, so ist der Pol $\mathfrak{x}$ der Ebene $[l\mathfrak{x}_1]$ auf l gelegen, weil l eine sich selbst konjugierte Gerade ist; er liegt aber auch auf der konjugierten Geraden s_1, ist also derjenige Punkt, in welchem s_1 der l begegnen mufs, und trifft andrerseits der Strahl s die Gerade l in $\mathfrak{y}$, so ist der Pol $\mathfrak{y}_1$ der Ebene $[l_1\mathfrak{y}]$ auf l_1 gelegen und zugleich auf s_1, ist also derjenige Punkt, in welchem der Strahl s_1 der Geraden l_1 begegnen mufs. Da

$\mathfrak{x}$ die Polarebene $[l\mathfrak{x}_1]$ und zugleich
$\mathfrak{x}_1$ „ „ $[l_1\mathfrak{x}]$

hat und die beiden Polarebenen $[l\mathfrak{x}_1]$ und $[l_1\mathfrak{x}]$ sich in demselben Strahl $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ schneiden, so ist dieser ein sich selbst konjugierter Strahl und ebenso ist $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ ein sich selbst konjugierter Strahl. Wir haben also zwei neue sich selbst konjugierte Strahlen gefunden. Drehen wir nun die Ebene $[l\mathfrak{x}_1]$ um den festgehaltenen Strahl l, so beschreibt sie ein Ebenenbüschel, welches wegen der Natur des Polarsystems mit der von ihrem Pole $(\mathfrak{x})$ beschriebenen geraden Punktreihe auf l projektivisch sein mufs, also sind auch die Punktreihen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ projektivisch oder auch die Ebenenbüschel $[l_1\mathfrak{x}]$ und $[l\mathfrak{x}_1]$. Die sich selbst konjugierten Strahlen $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$ sind also das Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen oder zweier projektivischen Ebenenbüschel, d. h. sie bilden eine Regelschar eines einfachen Hyperboloids, also diejenige geradlinige Fläche zweiter Ordnung, von welcher aus wir zu dem räumlichen Polarsysteme gelangt sind. Wir haben also folgendes Ergebnis:

Sobald in einem räumlichen Polarsysteme zwei konjugierte Strahlen vorkommen, deren zugehörige Punktinvolutionen beide hyperbolisch sind, so hat dasselbe eine reelle Kernfläche, welche eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung d. h. ein einfaches Hyperboloid ist, wie wir es bereits in § 20 betrachtet haben.

Was nun in einem solchen räumlichen Polarsystem die darin auftretenden Polartetraëder betrifft, so sind sie sämtlich

von gleicher Art, nämlich so beschaffen, daſs die Punktinvolutionen auf einem Paar Gegenkanten elliptisch, auf den vier übrigen Kanten hyperbolisch sind (wie 2), 3), 4) in der Tabelle des § 22). Denn nehmen wir irgend ein Polartetraëder $\mathfrak{abcd}$ in diesem Polarsystem, so muſs es (§ 22) wenigstens ein Paar Gegenkanten mit elliptischen Punktinvolutionen haben; seien diese $|\mathfrak{ab}|$ und $|\mathfrak{cd}|$. Betrachten wir nun die Seitenfläche $[\mathfrak{abc}]$, welche dem Hyperboloid in einem reellen Kegelschnitt begegnen muſs, weil sämtliche Erzeugende der einen Regelschar die Ebene $[\mathfrak{abc}]$ in den Punkten dieses Kegelschnitts durchbohren, so haben wir ein Polardreieck $\mathfrak{abc}$ für diesen Kegelschnitt und auf $|\mathfrak{ab}|$ eine elliptische Punktinvolution, also in $\mathfrak{c}$ eine mit denselben perspektivische Strahleninvolution; da diese also auch elliptisch ist, so muſs der Punkt $\mathfrak{c}$ innerhalb des Kegelschnitts liegen, also die beiden konjugierten Strahlen $|\mathfrak{ca}|$ und $|\mathfrak{cb}|$ der Strahleninvolution müssen den Kegelschnitt in reellen Punkten schneiden; daher sind $|\mathfrak{ca}|$ und $|\mathfrak{cb}|$, in gleicher Weise auch $|\mathfrak{da}|$ und $|\mathfrak{db}|$, also die vier übrigen Tetraëderkanten Träger hyperbolischer Punktinvolutionen im räumlichen Polarsysteme, w. z. b. w.

Es bleibt jetzt von allen acht möglichen Fällen eines Polartetraëders (§ 22, Tabelle) noch der einzige 1) übrig, in dem es nämlich im räumlichen Polarsysteme ein Polartetraëder giebt, dessen sämtliche sechs Kanten Träger elliptischer Punktinvolutionen sind. *In diesem Falle sind sämtliche Polartetraëder derselben Art, und das räumliche Polarsystem hat keine reelle Kernfläche.* Dies ergiebt sich mit Notwendigkeit daraus, daſs der jetzt angenommene Fall von den übrigen ausgeschlossen wird; denn gäbe es in dem eben angenommenen Fall eines durchweg elliptischen Polartetraëders auſser diesem ein Polartetraëder der andern Art mit zwei elliptischen und vier hyperbolischen Kanten, so müſsten alle Polartetraëder dieser Art sein, also auch das angenommene, was ein Widerspruch ist. In einem solchen Polarsystem kann es aber überhaupt keine reellen incidenten Elemente geben; denn irgend eine Seitenfläche eines Polartetraëders enthält ein Polardreieck eines ebenen Polarsystems, für welches die drei Punktinvolutionen auf den Seiten des Polardreiecks alle drei elliptisch sind; ein solches

ebenes Polarsystem hat niemals einen reellen Kernkegelschnitt (Th. d. K. § 57), also giebt es in keiner Ebene reelle Punkte einer Kernfläche. Wir sagen, die ganze Kernfläche ist imaginär, wird aber durch das reelle Gebilde dieses räumlichen Polarsystems vertreten.

Wir haben demnach drei Arten räumlicher Polarsysteme entsprechend den drei Arten von Polartetraëdern, indem bei jedem Polarsystem immer nur eine und dieselbe Art von Polartetraëdern auftritt:

I. Das räumliche Polarsystem hat nur Polartetraëder, deren Kanten sämtlich Träger elliptischer Punktinvolutionen sind; es hat keine reelle Kernfläche, d. h. es giebt keinen reellen Punkt, dessen Polarebene durch ihn selbst geht.

II. Das räumliche Polarsystem hat nur Polartetraëder, bei denen ein Paar Gegenkanten die Träger elliptischer, die vier übrigen Kanten die Träger hyperbolischer Punktinvolutionen sind; es hat eine relle Kernfläche, welche eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung (einfaches Hyperboloid) ist.

III. Das räumliche Polarsystem hat nur Polartetraëder, bei denen jedes Paar Gegenkanten die Träger einer hyperbolischen und einer elliptischen Punktinvolution sind, so dafs drei Kanten hyperbolische, drei Kanten elliptische Punktinvolutionen tragen, und zwar die ersteren drei in einer Ecke des Polartetraëders zusammenstofsen, die drei letzteren in der gegenüberliegenden Seitenfläche liegen. Das Polarsystem hat eine reelle Kernfläche, welche eine Fläche zweiter Ordnung ist, die keine geraden Linien enthält.

Wir können zur Abkürzung für diese drei Arten von Polarsystemen die Bezeichnungen $\{ee\}$ $\{hh\}$ $\{he\}$ wählen und erkennen, dafs die beiden ersten Arten aus der im Anfange dieses Paragraphen angegebenen ersten Hauptklasse entspringen, während die dritte Art ganz in der zweiten Hauptklasse enthalten ist. Bei der ersten Art kann von einer Konstruktion der Kernfläche überhaupt nicht die Rede sein, weil keine solche reell vorhanden ist. Bei der zweiten Art ergiebt sich die Konstruktion der reellen Kernfläche in ein-

fachster Weise vermittelst projektivischer Ebenenbüschel oder Punktreihen. Es bleibt also übrig, auch für die dritte Art von Polarsystemen die reelle Kernfläche durch möglichst einfache Konstruktion herzustellen, was nunmehr geschehen soll.

§ 24. Konstruktion der Kernfläche des räumlichen Polarsystems unabhängig davon, ob dieselbe gerade Linien enthält oder nicht.

Dasjenige räumliche Polarsystem, welches reelle sich selbst konjugierte Strahlen enthält, dessen Kernfläche also ein einfaches Hyperboloid ist, gestattet, wie wir gesehen haben, eben wegen des Vorhandenseins dieser Geraden auf der Fläche des Hyperboloids die einfache Konstruktion desselben durch projektivische Ebenenbüschel oder Punktreihen, welche bei einem Polarsystem der dritten Art selbstverständlich fortfällt. Wir können aber aus der Natur des Polarsystems eine andere Konstruktion der Kernfläche ableiten, die zwar nicht ganz so einfach ist, als die vorige, wie es in der Natur der Sache liegt, aber unabhängig davon, ob die reelle Kernfläche gerade Linien enthält oder nicht. Hierzu führt folgende Betrachtung:

Gegeben seien zwei konjugierte Strahlen s und s_1 des räumlichen Polarsystems und wenigstens einer von beiden der Träger einer hyperbolischen Punktinvolution (sind beide hyperbolisch, so ist die Kernfläche eine geradlinige, ist nur einer hyperbolisch, so hat die Kernfläche keine geraden Linien). Sei s der Träger der hyperbolischen Punktinvolution und $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$ die beiden Doppelpunkte; die Polarebenen dieser Punkte (d. h. die Berührungsebenen der Kernfläche in den Punkten $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$) sind offenbar:

$$[\mathfrak{o}s_1] = \tau \quad \text{und} \quad [\mathfrak{o}_1 s_1] = \tau_1.$$

Durch diese Bestimmungsstücke ist das räumliche Polarsystem noch nicht vollständig bestimmt, da sie bekanntlich (S. 145) nur acht Bedingungen enthalten; fügen wir als neuntes Bestimmungsstück noch einen Punkt $\mathfrak{o}_2$ der Kernfläche hinzu, so ist das Polarsystem, also auch die Kernfläche desselben vollständig bestimmt.

Wir konstruieren zuerst die Polarebene durch $\mathfrak{o}_2$, d. h.

die Berührungsebene des Punktes $\mathfrak{o}_2$, indem wir durch $\mathfrak{o}_2$ die einzige Gerade ziehen, welche s und s_1 gleichzeitig trifft, sodann zu den Treffpunkten die beiden konjugierten Punkte nehmen in den auf s und s_1 gegebenen Punktinvolutionen (d. h. auf s den vierten harmonischen zu $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$ dem Treffpunkt zugeordneten Punkt), dann ist die Ebene, welche $\mathfrak{o}_2$ mit diesen beiden konjugierten Punkten verbindet, die gesuchte Berührungsebene τ_2, die Polarebene von $\mathfrak{o}_2$. Ferner können wir leicht in der Ebene τ_2 die Strahleninvolution ermitteln, deren Mittelpunkt $\mathfrak{o}_2$ ist, und deren (imaginäre) Doppelstrahlen das Linienpaar bilden, in welchem die Ebene τ_2 die Kernfläche schneidet. Wir setzen nun auf s_1 die Punktinvolution als elliptisch voraus und verbinden dieselbe mit $\mathfrak{o}$, erhalten dadurch eine elliptische Strahleninvolution, welche auf der Schnittlinie $|\tau\tau_2|$ eine elliptische Punktinvolution ausschneidet, die mit $\mathfrak{o}_2$ verbunden die gesuchte Strahleninvolution in der Ebene τ_2 liefert; wir hätten ebenso auch die elliptische Punktinvolution auf s_1 mit $\mathfrak{o}_1$ durch eine Strahleninvolution verbinden können, die auf der Schnittlinie $|\tau_1\tau_2|$ eine elliptische Punktinvolution ausschneidet; dann hätte dieselbe mit $\mathfrak{o}_2$ verbunden die vorige elliptische Strahleninvolution liefern müssen, da es nur eine solche giebt. Wir haben also jetzt von der Kernfläche drei Punkte $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}_2$, ihre Berührungsebenen $\tau\,\tau_1\,\tau_2$ und in jeder die elliptische Strahleninvolution, deren imaginäre Doppelstrahlen als das imaginäre Linienpaar der Kernfläche in der Berührungsebene aufzufassen sind. Was wir für den Punkt $\mathfrak{o}_2$ der Kernfläche geleistet haben, können wir in gleicher Weise für jeden beliebigen Punkt derselben ausführen, sobald wir nur erst beliebig viele Punkte von ihr haben, die wir nun möglichst schnell zu konstruieren suchen wollen.

Bezeichnen wir noch die Ebene:

$$[\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}_2] = \varepsilon$$

und ihren Pol, den Punkt:

$$(\tau\,\tau_1\,\tau_2) = \mathfrak{p},$$

ferner die Schnittpunkte je dreier Ebenen:

$$(\varepsilon\,\tau_1\,\tau_2) = \mathfrak{a} \qquad (\varepsilon\,\tau\,\tau_2) = \mathfrak{a}_1 \qquad (\varepsilon\,\tau\,\tau_1) = \mathfrak{a}_2,$$

dann haben wir in der Ebene ε als Durchschnitt mit der

Kernfläche einen Kegelschnitt, welcher dem Dreieck $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}_2$ umschrieben ist und zu Tangenten in den Ecken die Verbindungslinien $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1|$ hat, also dem Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$ einbeschrieben ist (Fig. 4). Daher schneiden sich bekanntlich $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{o}|$, $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{o}_1|$, $|\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{o}_2|$ in einem Punkte, und die drei Schnittpunkte $(\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}_2,\ \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2)$ $(\mathfrak{o}_2\,\mathfrak{o},\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1,\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1)$ liegen auf einer Geraden, welche die Polare des vorigen Punktes ist in Bezug auf den Durchschnittskegelschnitt.

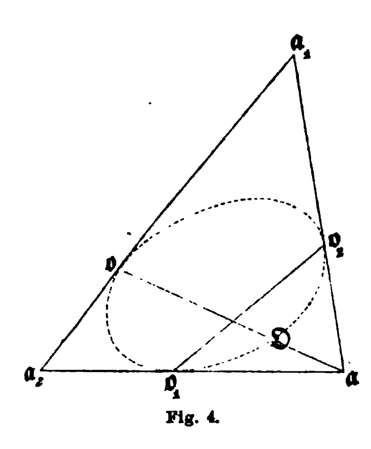


Fig. 4.

Wir haben im räumlichen Polarsystem als zugeordnete Elemente:

Pol:	und	Polarebene:	Konjugierte Strahlen:		
$\mathfrak{o}$	„	$\tau = [\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2]$	$\|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1\|$	und	$\|\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_2\|$
$\mathfrak{o}_1$	„	$\tau_1 = [\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}]$	$\|\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}_2\|$	„	$\|\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}\|$
$\mathfrak{o}_2$	„	$\tau_2 = [\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}_2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1]$	$\|\mathfrak{o}_2\,\mathfrak{o}\|$	„	$\|\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_1\|$
$\mathfrak{a}$	„	$[\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}_2]$	$\|\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}\|$	„	$\|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{o}\|$
$\mathfrak{a}_1$	„	$[\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}_2\,\mathfrak{o}]$	$\|\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{p}\|$	„	$\|\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{o}_1\|$
$\mathfrak{a}_2$	„	$[\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1]$	$\|\mathfrak{o}_2\,\mathfrak{p}\|$	„	$\|\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{o}_2\|$.
$\mathfrak{p}$	„	$\varepsilon = [\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}_2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2]$			

Dies vorausgeschickt, ziehen wir durch $\mathfrak{o}$ einen beliebigen Strahl x im Raume; derselbe mufs der Träger einer hyperbolischen Punktinvolution im räumlichen Polarsysteme sein, weil $\mathfrak{o}$ schon ein Asymptotenpunkt derselben ist; es kommt darauf an, den andern zu konstruieren, d. h. den Schnittpunkt des Strahles x mit der Kernfläche. Wir fassen den Strahl x als Schnittstrahl zweier Ebenen auf, deren eine durch $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1|$, die andere durch $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_2|$ gelegt wird. Legen wir die erste Ebene durch den von $\mathfrak{o}$ ausgehenden willkürlichen Strahl x und den festen Strahl $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1|$, so liegt der Pol dieser Ebene auf dem konjugierten Strahl $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_2|$ und wenn jene Ebene diesen Strahl in $\mathfrak{x}$ trifft, so wird der konjugierte Punkt $\mathfrak{x}_2$ in

der Punktinvolution auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_2|$ der gesuchte Pol sein. Die Punktinvolution auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_2|$ ist aber bekannt, nämlich diejenige, welche die bekannte Strahleninvolution in der Ebene τ durch $\mathfrak{o}$ (oder in der Ebene τ_1 durch $\mathfrak{o}_1$) auf dem Strahle $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_2|$ ausschneidet. Legen wir ferner die zweite Ebene durch den von $\mathfrak{o}$ ausgehenden willkürlichen Strahl x und den festen Strahl $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_2|$, so liegt der Pol dieser Ebene auf dem konjugierten Strahl $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1|$, und wenn jene Ebene diesen Strahl in $\mathfrak{y}$ trifft, so wird der konjugierte Punkt $\mathfrak{y}_1$ in der Punktinvolution auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1|$ der gesuchte Pol sein. Die Punktinvolution auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1|$ ist aber bekannt, nämlich diejenige, welche die bekannte Strahleninvolution in der Ebene τ durch $\mathfrak{o}$ (oder in der Ebene τ_2 durch $\mathfrak{o}_2$) auf dem Strahle $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1|$ ausschneidet. Die beiden Punktinvolutionen auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_2|$ sind unserer Annahme zufolge elliptisch. Da wir nun die Pole $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_1$ zweier durch x gelegten Ebenen kennen, so ist $|\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1|$ der konjugierte Strahl zu x. Möge endlich der Strahl x die Ebene $[\mathfrak{p}\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2]$ in einem Punkte $\mathfrak{z}$ treffen, so wird, weil $\mathfrak{a}$ der Pol der Ebene $[\mathfrak{p}\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2]$ ist, die Polarebene von $\mathfrak{z}$ die Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1]$ sein; schneidet diese den Strahl x in $\mathfrak{z}'$, so ist zu $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ der dem Punkte $\mathfrak{o}$ zugeordnete vierte harmonische zu suchen; dann ist dies der gesuchte zweite Schnittpunkt des Strahles x mit der Kernfläche; denn die Punktinvolution auf x hat in $\mathfrak{o}$ einen Doppelpunkt und das Punktepaar $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ zu konjugierten Punkten; also ist, da letztere durch die beiden Doppelpunkte harmonisch getrennt werden, der andere Doppelpunkt gefunden. Wir können diesen vierten harmonischen Punkt sehr viel einfacher finden; die Strahlen $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_2|$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1|$, auf denen die Punkte $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_1$ sich vorfinden, liegen nämlich in der Ebene τ, also auch die Gerade $|\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1|$ ganz in der Ebene τ, wie auch a priori klar ist, weil x durch $\mathfrak{o}$ geht. Wenn daher die Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{p}\mathfrak{o}_1) = \mathfrak{x}_1 \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{p}\mathfrak{o}_2) = \mathfrak{y}_2$$

bezeichnet werden, so ist $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2|$ die Schnittlinie der beiden Ebenen $[\mathfrak{a}\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1]$ und $[\mathfrak{p}\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2]$, welche dem Strahle x in den Punkten $\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{z}$ begegnen. Legen wir nun durch diesen Strahl $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2|$ vier Ebenen, die nach den vier harmonischen Punkten auf dem Strahle x hingehen, so haben wir vier harmonische

Ebenen, welche der Geraden $|\mathfrak{o}\mathfrak{a}|$ in vier harmonischen Punkten begegnen müssen; von diesen vier harmonischen Punkten sind $\mathfrak{a}$ und der Schnittpunkt $(\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2, \mathfrak{a}\mathfrak{o})$ zwei zugeordnete, die den Punkten $\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{z}$ entsprechen, der dritte ist $\mathfrak{o}$ und der zugeordnete vierte harmonische werde mit $\mathfrak{O}$ bezeichnet (Fig. 4); dann ist ersichtlich, dafs $\mathfrak{O}$ auf dem Kegelschnitt liegen mufs, in welchem die Ebene ε die Kernfläche schneidet; denn für diesen schon oben angegebenen Kegelschnitt, der dem Dreieck $\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2$ umschrieben, dem Dreiseit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ einbeschrieben ist, sind $\mathfrak{a}$ und $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2|$ Pol und Polare, werden also harmonisch getrennt durch $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$, die Schnittpunkte des Strahles $|\mathfrak{a}\mathfrak{o}|$ mit dem Kegelschnitt. Der Punkt $\mathfrak{O}$ gehört also a fortiori der Kernfläche an, da er einem Kegelschnitte auf derselben angehört; die Ebene $[\mathfrak{O}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2]$ ist nun diejenige, welche dem Strahle x in dem gesuchten Punkte begegnet (dem zweiten Doppelpunkte seiner Punktinvolution). Wir bezeichnen diese Ebene

$$[\mathfrak{O}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2] = \xi$$

und haben demnach folgende Konstruktion der Ebene ξ gefunden:

Wir ermitteln zuerst den Punkt $\mathfrak{O}$ in der Ebene ε als den zweiten Schnittpunht der Verbindungslinie $|\mathfrak{o}\mathfrak{a}|$ mit dem Kegelschnitte, in welchem die Ebene ε die Kernfläche schneidet. Sodann legen wir durch den willkürlichen Strahl x die Ebenen $[x\mathfrak{o}_1]$ und $[x\mathfrak{o}_2]$, welche bez. den Strahlen $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_2|$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1|$ in $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{y}$ begegnen, die zu diesen konjugierten Punkte in den auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_2|$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1|$ bekannten Punktinvolutionen seien

$$\mathfrak{x}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}_1;$$

die Verbindungslinien $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}_2|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{y}_1|$ treffen bez. die Strahlen $|\mathfrak{p}\mathfrak{o}_1|$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{o}_2|$ in den Punkten:

$$\mathfrak{x}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}_2,$$

dann ist $[\mathfrak{O}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2]$ diejenige Ebene ξ, welche dem Strahle x in dem gesuchten zweiten Punkte der Kernfläche begegnet.

Verändern wir den willkürlichen Strahl x, so erhalten wir durch diese Konstruktion unendlich viele neue Punkte der Kernfläche; zu jedem Strahle x erhalten wir eine bestimmte Ebene ξ, und der Durchschnittspunkt (ξx) ist allemal ein Punkt der Kernfläche. Bei der Veränderung des will-

kürlichen Strahles x beschreibt derselbe ein **Strahlenbündel** um den festen Mittelpunkt $\mathfrak{o}$ und die zugehörige Ebene $\mathfrak{x}$ ein **Ebenenbündel** um den festen Mittelpunkt $\mathfrak{O}$ (vergl. S. 29), und die Abhängigkeit zugehöriger Elemente dieser beiden Bündel ist durch die obige Konstruktion leicht zu erkennen.

Der Strahl x erscheint als der Schnittstrahl zweier Ebenen, die um die beiden festen Strahlen $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1|$ und $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_2|$ sich drehen, also zwei Ebenenbüschel beschreiben, welche von einander durchaus unabhängig sind, weil der Strahl x ganz willkürlich im Raume durch $\mathfrak{o}$ gezogen ist. Dagegen wird das Ebenenbüschel $[\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}]$ mit der Punktreihe $\mathfrak{x}_2$ auf $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_2|$ projektivisch sein wegen der projektivischen Grundeigenschaft des Polarsystems und ebenso wird das Ebenenbüschel $[\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_2\mathfrak{y}]$ mit der Punktreihe $\mathfrak{y}_1$ auf $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_1|$ projektivisch sein; mit diesen von $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_1$ beschriebenen Punktreihen liegen bez. die Strahlenbüschel $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_2|$ und $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{y}_1|$ perspektivisch, also auch die Punktreihen, welche $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ auf $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}_1|$ und $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}_2|$ durchlaufen; die veränderliche Ebene $\mathfrak{x} = [\mathfrak{O}\,\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2]$ können wir auffassen als bestimmt durch die beiden veränderlichen Strahlen $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{x}_1|$ und $|\mathfrak{O}\mathfrak{y}_2|$, welche selbst in den beiden festen Ebenen $[\mathfrak{O}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}_1]$ und $[\mathfrak{O}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}_2]$ liegen und in diesen beiden Ebenen zwei Strahlenbüschel beschreiben, so daſs erstens das von $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{x}_1|$ beschriebene Strahlenbüschel mit dem obigen von der Ebene $[\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}]$ beschriebenen Ebenenbüschel und zweitens das von $|\mathfrak{O}\mathfrak{y}_2|$ beschriebene Strahlenbüschel mit dem obigen von der Ebene $[\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_2\mathfrak{y}]$ beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch ist. Wir haben also zwei projektivische Beziehungen: Der veränderliche Strahl x in dem Strahlenbündel $\mathfrak{o}$ wird durch zwei Ebenen bestimmt, welche Ebenenbüschel um feste Axen beschreiben, die veränderliche Ebene $\mathfrak{x}$ in dem Ebenenbündel $\mathfrak{O}$ wird durch zwei Strahlen bestimmt, welche ebene Strahlenbüschel in festen Ebenen beschreiben; das eine Ebenenbüschel ist mit dem einen Strahlenbüschel, das andere Ebenenbüschel mit dem andern Strahlenbüschel projektivisch, und dadurch ist die Abhängigkeit des Strahles x und der Ebene $\mathfrak{x}$ von einander bestimmt. Diese beiden projektivischen Beziehungen sind aber nicht vollkommen frei, sondern einer Bedingung unterworfen, die noch hinzutritt; die Ebenenbüschel nämlich,

welche die festen Axen $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1|$ und $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_2|$ haben, besitzen eine gemeinschaftliche Ebene $[\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2]$ und andererseits besitzen die Strahlenbüschel in den festen Ebenen $[\mathfrak{O}\mathfrak{p}\mathfrak{o}_1]$ und $[\mathfrak{O}\mathfrak{p}\mathfrak{o}_2]$ einen gemeinschaftlichen Strahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{p}|$; der gemeinschaftlichen Ebene entspricht nun für beide projektivischen Beziehungen der gemeinschaftliche Strahl. In der That, wenn die um $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1|$ gedrehte veränderliche Ebene in die Lage der Ebene $\varepsilon = [\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2]$ gelangt, kommt $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{a}_2$, folglich $\mathfrak{x}_2$ nach $\mathfrak{p}$ und ebenso, wenn die um $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_2|$ gedrehte veränderliche Ebene in die Lage von $\varepsilon = [\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2]$ kommt, gelangt $\mathfrak{y}$ nach $\mathfrak{a}_1$, also $\mathfrak{y}_1$ nach $\mathfrak{p}$, daher entspricht offenbar der Schnittstrahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{p}|$, welcher den beiden Strahlenbüscheln in den festen Ebenen $[\mathfrak{O}\mathfrak{p}\mathfrak{o}_1]$ und $[\mathfrak{O}\mathfrak{p}\mathfrak{o}_2]$ gemeinschaftlich ist, in beiden projektivischen Beziehungen der Ebene ε. Ebenso wie für diesen besonderen Fall der Strahl x unbestimmt wird, in welchem die beiden zusammenfallenden Ebenen sich schneiden, wird auch die Ebene $\mathfrak{x}$ unbestimmt, weil die beiden sie bestimmenden Strahlen zusammenfallen; aber gerade dieser Fall ist von vorn herein unserer Konstruktion nicht bedürftig, weil wir in der Ebene ε alle Punkte $(x, \mathfrak{x})$ der Kernfläche kennen, nämlich die Punkte des oben hervorgehobenen Kegelschnitts, der dem Dreieck $\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2$ umschrieben, dem Dreiseit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ einbeschrieben ist. Unsere Konstruktion leistet das von ihr Verlangte, indem sie alle übrigen aufserhalb dieser Ebene liegenden Punkte der Kernfläche finden lehrt.

Wir haben in dem Obigen eine Konstruktion der Kernfläche eines räumlichen Polarsystems gegeben, unabhängig davon, ob diese Kernfläche gerade Linien enthält oder nicht, vermittelst zweier Gebilde von zwiefacher Unendlichkeit, eines Strahlenbündels und eines Ebenenbündels, die in eine derartige Beziehung zu einander gesetzt sind, welche man „Reziprozität“ nennt. Diese Gebilde zweiter Stufe und die Beziehung ihrer Elemente auf einander, sowie die daraus entspringenden Erzeugnisse werden in dem zweiten Abschnitte dieses Buches näher untersucht werden. Während hier diese Gebilde aus dem räumlichen Polarsystem hervortraten, wird dort umgekehrt aus der Konstruktion der Fläche zweiter Ordnung vermittelst reziproker Gebilde zweiter Stufe das räumliche Polarsystem abgeleitet werden (§ 56). Da wir

also dort noch einmal auf dasselbe zurückkommen, so wollen wir seine weitere Untersuchung bis auf jene Stelle verschieben, wobei dann insbesondere die ausgezeichneten Elemente des räumlichen Polarsystems (Mittelpunkt, konjugierte Durchmesser, Fokalkegelschnitte) einer eingehenden Untersuchung unterzogen werden sollen. Wir kehren nunmehr zu der geradlinigen Fläche zweiter Ordnung, dem Hyperboloid, zurück.

§ 25. Das orthogonale Hyperboloid.

Ein Hyperboloid von besonderer Art erhalten wir, wenn wir zur Bestimmung des räumlichen Polarsystems, dessen Kernfläche dieses Hyperboloid sein soll, zwei konjugierte Strahlen s und s_1 als die Axen zugehöriger orthogonaler Ebeneninvolutionen (S. 14) annehmen. Sind $\mathfrak{p}^\infty$ und $\mathfrak{p}_1^\infty$ die unendlich-entfernten Punkte der gegebenen Strahlen s und s_1, so hat die Ebene $[s\mathfrak{p}_1^\infty]$, welche dem Strahle s_1 parallel läuft, zu ihrer konjugierten die darauf rechtwinklige, welche in $\mathfrak{p}_1$ den Strahl s_1 treffe; dann ist also $\mathfrak{p}_1$ der Mittelpunkt der Punktinvolution auf s_1, welche die Ebeneninvolution des konjugierten Strahles s ausschneidet. Ebenso legen wir zu $[s_1\mathfrak{p}^\infty]$ eine rechtwinklige Ebene durch s_1; diese treffe s in $\mathfrak{p}$, dann ist $\mathfrak{p}$ der Mittelpunkt der Punktinvolution auf s, und diese Konstruktion zeigt, dafs $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ nichts anderes ist, als die kürzeste Entfernung der beiden Geraden $s\,s_1$, die windschief im Raume liegen, weil $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ auf beiden rechtwinklig steht.

Die orthogonalen Ebeneninvolutionen durch s und s_1 schneiden auf s_1 und s elliptische Punktinvolutionen aus, von denen wir vorerst nur die Mittelpunkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ und ihre konjugierten, die unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{p}^\infty$ und $\mathfrak{p}_1^\infty$ kennen gelernt haben. Diese Involutionen sind vollständig bekannt, sobald wir noch ein Paar konjugierter Punkte von jeder kennen; wir wählen hierzu die Potenzpunkte, d. h. diejenigen konjugierten Punkte der Punktinvolution, welche von dem Mittelpunkte gleich weit abstehen. Das negative Quadrat dieses Abstandes ist dann die Potenz der elliptischen Punktinvolution; wir bezeichnen sie durch

$$-B^2$$

und können den Wert von B leicht ausdrücken. Sei nämlich d die kürzeste Entfernung zwischen den Strahlen s und s_1

$$d = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$$

und w der Winkel, welchen die Richtungen der beiden Strahlen s und s_1 mit einander bilden, so müssen die beiden Ebenen durch s_1, welche durch die Potenzpunkte auf s gehen, rechtwinklig zu einander sein, weil sie der orthogonalen Ebeneninvolution mit der Axe s_1 angehören, und es wird daher $B \cdot \sin w = d$, also:

$$B = \frac{d}{\sin w}.$$

Hierdurch ist die Potenz $(-B^2)$ der Punktinvolution auf s gefunden, und gleichen Wert hat offenbar die Potenz der elliptischen Punktinvolution auf s_1. Das räumliche Polarsystem ist noch nicht vollständig bestimmt durch die beiden orthogonalen Ebeneninvolutionen der konjugierten Strahlen s und s_1, da diese nur acht Bestimmungsstücke enthalten (S. 146); wir können noch über ein neuntes Bestimmungsstück verfügen. Die vier Punkte:

$$\mathfrak{p} \quad \mathfrak{p}_1 \quad \mathfrak{p}^\infty \quad \mathfrak{p}_1^\infty$$

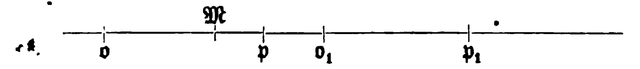
bilden ein Polartetraëder des räumlichen Polarsystems, und wir kennen nur die elliptischen Punktinvolutionen auf einem Paar Gegenkanten $s = |\mathfrak{p}\mathfrak{p}^\infty|$ und $s_1 = |\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1^\infty|$; da wir es nur mit einer reellen Kernfläche (einem Hyperboloid) zu thun haben wollen, so müssen die Punktinvolutionen auf den vier übrigen Kanten des Polartetraëders hyperbolisch sein (S. 166, II); wählen wir einen Asymptotenpunkt auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ willkürlich als neuntes Bestimmungsstück, so ist das Polarsystem vollständig bestimmt; es sei dies der Punkt $\mathfrak{o}$ aufserhalb $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$, so dafs das Verhältnis:

$$\frac{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1} = \mu < 1$$

(der Fall $\mu = 1$ wird hier ausgeschlossen und in § 30 besonders untersucht werden; für einen Wert $\mu > 1$ braucht man nur $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$, d. h. s und s_1 mit einander zu vertauschen) sei, dann wird der vierte harmonische zu $\mathfrak{o}$ zugeordnete Punkt $\mathfrak{o}_1$ zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ so liegen, dafs

$$\frac{\mathfrak{o}_1\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}_1\mathfrak{p}_1} = -\mu$$

ist, und es werden $\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1$ die beiden Asymptotenpunkte der hyperbolischen Punktinvolution auf der Kante $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ des Polartetraëders sein. Der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ dieser Punktinvolution ist also die Mitte zwischen $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1|$



und die Potenz der hyperbolischen Punktinvolution ist leicht auszudrücken; wir nennen sie c^2, also $(\mathfrak{M}\mathfrak{o})^2 = c^2$ und haben nach bekannten elementaren Eigenschaften harmonischer Punkte:

$$c = d \cdot \frac{\mu}{1-\mu^2}\,.$$

Wir wollen jetzt auf den übrigen Kanten unserers Polartetraëders $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}^\infty\mathfrak{p}_1^\infty$ die Potenzen der zugehörigen hyperbolischen Punktinvolutionen ermitteln und hierzu die Seitenflächen des Polartetraëders betrachten, welche die Träger ebener Polarsysteme sind, von denen die Seiten je eines Polardreiecks mit ihren Punktinvolutionen zur Bestimmung desselben dienen. Nehmen wir zuerst die Seitenfläche $[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty]$, so kennen wir auf den beiden Strahlen $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}|$ und $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1^\infty|$ die zugehörigen Punktinvolutionen, die erstere ist hyperbolisch mit der Potenz c^2 und dem Mittelpunkt $\mathfrak{M}$, die letztere elliptisch mit der Potenz $-B^2$ und dem Mittelpunkte $\mathfrak{p}_1$; folglich läfst sich die Punktinvolution auf der dritten Seite $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty|$ des Polardreiecks bestimmen, welche notwendig hyperbolisch sein mufs; ihr Mittelpunkt ist $\mathfrak{p}$, weil die Ecke $\mathfrak{p}_1^\infty$ des Polardreiecks im Unendlichen liegt. Nennen wir A^2 die Potenz der hyperbolischen Punktinvolution auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty|$, und denken wir uns die Asymptotenpunkte derselben ermittelt, so bilden dieselben mit den Punkten $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1$ zusammen ein vollständiges Viereck, dessen Diagonaldreieck ein Polardreieck sein mufs; nun hat der Diagonalpunkt $\mathfrak{p}$ zur Polare $s_1 = |\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1^\infty|$, und die Seite $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1| = |\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ hat zum Pol $\mathfrak{p}_1^\infty$, folglich müssen die beiden übrigen Diagonalpunkte auf s_1 liegen, konjugierte Punkte sein und durch $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1^\infty$ harmonisch getrennt werden wegen der Eigenschaft des vollständigen Vierecks. Diese beiden Punkte können daher nichts anderes sein, als die

Potenzpunkte auf s_1; umgekehrt erhalten wir, wenn wir die bekannten Potenzpunkte auf s_1 verbinden mit den Punkten $\mathfrak{o}\ \mathfrak{o}_1$ als Durchschnittspunkte die gesuchten Asymptotenpunkte auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty|$, und wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke erhalten wir daher:

$$\frac{A}{B} = \frac{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1} = \mu, \text{ also } A = \mu B.$$

Die Potenz der hyperbolischen Punktinvolution auf der Kante $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty|$ ist also $= \mu^2 B^2$. Jetzt betrachten wir die zweite Seitenfläche $[\mathfrak{p}\mathfrak{p}^\infty\mathfrak{p}_1^\infty]$ unseres Polartetraëders; in ihr ist $\mathfrak{p}$ der Pol von $|\mathfrak{p}^\infty\mathfrak{p}_1^\infty|$, also der Mittelpunkt des ebenen Polarsystems, und auf den beiden konjugierten Durchmessern $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}^\infty|$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty|$ kennen wir die zugehörigen Punktinvolutionen; die erstere auf s ist elliptisch und hat die Potenz $-B^2$, die zweite auf $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty|$ ist hyperbolisch und hat die Potenz $\mu^2 B^2$; hieraus läſst sich die Punktinvolution auf $|\mathfrak{p}^\infty\mathfrak{p}_1^\infty|$ ermitteln, welche hyperbolisch sein muſs. Anstatt dieser ganz im Unendlichen liegenden hyperbolischen Punktinvolution fassen wir lieber die mit ihr perspektivische Strahleninvolution durch $\mathfrak{p}$ auf; denken wir uns die Asymptoten derselben ermittelt, welche harmonisch getrennt werden durch die Strahlen $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}^\infty| = s$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty|$ (konjugierten Durchmesser) und hingehen nach den Asymptotenpunkten der Punktinvolution auf $|\mathfrak{p}^\infty\mathfrak{p}_1^\infty|$; bezeichnen wir diese Asymptotenpunkte durch

$$\mathfrak{o}^\infty \quad \text{und} \quad \mathfrak{o}_1^\infty,$$

so ist die Lage der Asymptoten $|\mathfrak{p}\mathfrak{o}^\infty|$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{o}_1^\infty|$ durch die Potenzen der Punktinvolutionen auf den konjugierten Durchmessern $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}^\infty|$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty|$ leicht zu ermitteln; ziehen wir nämlich durch die Endpunkte des reellen Durchmessers Parallele zu dem konjugierten Durchmesser, so werden auf diesen Parallelen durch die Asymptoten Stücke abgeschnitten, welche die Länge des imaginären konjugierten Durchmessers vertreten; also haben wir:

$$\frac{A}{B} = \mu = \frac{\sin(\mathfrak{p}\mathfrak{o}^\infty, \mathfrak{p}\mathfrak{p}^\infty)}{\sin(\mathfrak{p}\mathfrak{o}^\infty, \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty)} = -\frac{\sin(\mathfrak{p}\mathfrak{o}_1^\infty, \mathfrak{p}\mathfrak{p}^\infty)}{\sin(\mathfrak{p}\mathfrak{o}_1^\infty, \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty)}.$$

Hierdurch ist also die Richtung des Punktes $\mathfrak{o}^\infty$ bestimmt und in gleicher Weise bestimmt sich die Richtung des Punktes $\mathfrak{o}_1^\infty$. Noch einfacher gestaltet sich hiernach die Konstruktion, wenn wir durch den kürzesten Abstand d, der auf

beiden Geraden s und s_1 rechtwinklig ist, die beiden Ebenen $[ds]$ und $[ds_1]$ legen und die Neigungswinkel zwischen denselben durch zwei neue Ebenen so teilen, dafs das Teilungsverhältnis der Sinus der Teilwinkel den bekannten Wert $\mu = \frac{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1}$ erhält; diese beiden Ebenen, welche die ersteren harmonisch trennen, treffen die unendlich-entfernte Gerade $|\mathfrak{p}^\infty \mathfrak{p}_1^\infty|$ in den gesuchten Asymptotenpunkten $\mathfrak{o}^\infty$ und $\mathfrak{o}_1^\infty$ der auf ihr befindlichen hyperbolischen Punktinvolution.

Sind aber erst auf den beiden konjugierten Geraden (Gegenkanten des Polartetraëders) $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1| = d$ und $|\mathfrak{p}^\infty \mathfrak{p}_1^\infty| = d_1^\infty$ die Asymptotenpunkte:

$$\mathfrak{o} \quad \mathfrak{o}_1 \quad \mathfrak{o}^\infty \quad \mathfrak{o}_1^\infty$$

der zugehörigen hyperbolischen Punktinvolutionen gefunden, so ergeben sich die Verbindungslinien derselben bekanntlich als sich selbst konjugierte Strahlen, d. h. als Gerade Linien der Kernfläche oder Erzeugende des Hyperboloids; wir bezeichnen dieselben:

$$|\mathfrak{o}\mathfrak{o}^\infty| = l \qquad |\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}^\infty| = g$$
$$|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1^\infty| = g_1 \qquad |\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_1^\infty| = l_1,$$

haben also l und g parallel, g_1 und l_1 parallel und ihre Richtungen bestimmt durch die Sinus-Verhältnisse:

$$\frac{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1} = -\frac{\mathfrak{o}_1\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}_1\mathfrak{p}_1} = \mu = \frac{\sin(ls)}{\sin(ls_1)} = -\frac{\sin(l_1 s)}{\sin(l_1 s_1)}.$$

Wir haben jetzt auf unserem Polartetraëder:

$$\mathfrak{p} \quad \mathfrak{p}_1 \quad \mathfrak{p}^\infty \quad \mathfrak{p}_1^\infty$$

sämtliche Punktinvolutionen der Kanten ermittelt; auf den Kanten $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}^\infty|$ und $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1^\infty|$ sind sie elliptisch, ihre Mittelpunkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$, ihre Potenzwerte $-B^2$; auf den Kanten $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^\infty|$ und $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}^\infty|$ sind sie hyperbolisch, ihre Mittelpunkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$, ihre Potenzwerte $\mu^2 B^2$; auf der Kante $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ ist sie hyperbolisch, ihr Mittelpunkt $\mathfrak{M}$, der Potenzwert c^2 (wo $c = \frac{d\mu}{1-\mu^2}$ ist); endlich wird die Punktinvolution auf der unendlich-entfernten $|\mathfrak{p}^\infty \mathfrak{p}_1^\infty|$ besser angeschaut durch die mit ihr perspektivische Strahleninvolution von $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}_1$ aus, deren Asymptoten zu den Geraden l und l_1 oder g_1 und g parallel laufen.

Die vier Punkte:

$$\mathfrak{o} \quad \mathfrak{o}_1 \quad \mathfrak{o}^{\infty} \quad \mathfrak{o}_1^{\infty}$$

sind nicht blofs die Ecken eines windschiefen Vierseits, dessen Seiten:

$$g \quad l \cdot g_1 \quad l_1$$

Erzeugende der hyperboloidischen Kernfläche sind, sondern können auch aufgefafst werden als die eines Polartetraëders anderer Art, wie wir es auf S. 144 gefunden haben: nämlich das windschiefe Vierseit hat vier Ecken und vier Seitenflächen, indem je zwei Seiten desselben sowohl in einer Ecke sich treffen, als auch in einer Seitenfläche liegen; diese Ecke und Seitenfläche sind Pol und Polarebene. Die Diagonalen des windschiefen Vierseits sind ein Paar konjugierter Strahlen und zugleich das dritte Paar Gegenkanten des Tetraëders, dessen vier übrige Kanten die Seiten des windschiefen Vierseits sind.

Dieses Tetraëder hat mit dem vorigen das eine Paar Gegenkanten d und d_1^{∞} gemeinschaftlich, deren Richtungen zu einander rechtwinklig sind, weil d auf s und s_1 rechtwinklig ist, während d_1^{∞} die unendlich-entfernten Punkte von s und s_1 verbindet. Wenn wir $\mathfrak{M}$, den Mittelpunkt der hyperbolischen Punktinvolution auf d, mit d_1^{∞} durch eine Ebene verbinden, so ist deren Pol der unendlich-entfernte Punkt von d, folglich ist $\mathfrak{M}$ der Pol der unendlich-entfernten Ebene, also der Mittelpunkt für alle Punktinvolutionen der durch $\mathfrak{M}$ gezogenen Strahlen, d. h. der Mittelpunkt des Hyperboloids (S. 98), und für das Polarbündel, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ ist, müssen der Strahl d und die Ebene $[\mathfrak{M} d_1^{\infty}]$, weil sie rechtwinklig zu einander sind, eine Hauptaxe und eine Hauptebene sein (S. 48); die beiden andern Hauptaxen sind die Halbierungsstrahlen der Winkel zwischen den Asymptoten, die wir erhalten, wenn wir durch $\mathfrak{M}$ Parallele zu l (oder g) und l_1 (oder g_1) ziehen. Denn die Strahleninvolution von $\mathfrak{M}$, perspektivisch mit der Punktinvolution auf d_1^{∞}, hat zu Axen die beiden übrigen Hauptaxen des Polarbündels $\mathfrak{M}$. Der Kernkegel dieses Polarbündels $\mathfrak{M}$ ist aber, wie wir wissen, der Asymptotenkegel (S. 99) des Hyperboloids, und die Hauptaxen des ersteren fallen der Richtung nach zusammen mit den Hauptaxen des letzteren. Auf einer derselben (d) kennen wir die Potenz der zugehörigen hyperbolischen Punktinvolution (c^2); von den beiden andern Hauptaxen mufs daher eine der Träger einer hyperbolischen (b^2),

die andere der Träger einer elliptischen $(-a^2)$ Punktinvolution sein, da die Ebene $[\mathfrak{M} d_1^\infty]$ das Hyperboloid in einer Hyperbel schneidet, deren Asymptoten nach $\mathfrak{o}^\infty$ und $\mathfrak{o}_1^\infty$ hingehen. Von dieser Hyperbel können wir leicht ein Paar konjugierter Durchmesser mit ihren Punktinvolutionen ermitteln, indem wir durch $\mathfrak{M}$ Parallele zu s und s_1 ziehen; nach bekannten Beziehungen erhalten wir die Potenzen der Punktinvolutionen auf diesen beiden von $\mathfrak{M}$ zu s und s_1 gezogenen Parallelen:

$$-B^2 \cdot \frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}} \quad \text{und} \quad -B^2 \cdot \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{M}}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1},$$

und nach bekannten elementaren Beziehungen zwischen harmonischen Punkten:

$$\frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}} = \frac{1}{1-\mu^2} \qquad \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{M}}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1} = \frac{-\mu^2}{1-\mu^2},$$

also die beiden Potenzen:

$$-\frac{B^2}{1-\mu^2} \quad \text{und} \quad \frac{\mu^2 B^2}{1-\mu^2},$$

von denen die erste negativ, die zweite positiv ist, während die Axen die Potenzwerte:

$$-a^2 \quad \text{und} \quad b^2$$

liefern; die Axen sind aber selbst ein besonderes Paar konjugierter Durchmesser, und wir haben für zwei Paare konjugierter Durchmesser die bekannten Beziehungen:

$$\frac{\mu^2 B^2}{1-\mu^2} - \frac{B^2}{1-\mu^2} = b^2 - a^2, \qquad \text{d. h.} \quad a^2 - b^2 = B^2,$$

$$\left(\frac{\mu^2 B^2}{1-\mu^2}\right)\left(\frac{B^2}{1-\mu^2}\right) \cdot \sin^2 w = a^2 b^2, \text{ d. h. } a^2 b^2 = \frac{B^2 . \sin^2 w . \mu^2 B^2}{(1-\mu^2)^2},$$

da aber nach dem früheren

$$B \sin w = d \quad \text{und} \quad \frac{\mu d}{1-\mu^2} = c \text{ ist,}$$

so folgt:

$$a^2 - b^2 = B^2 \quad \text{und} \quad a^2 b^2 = B^2 c^2,$$

woraus sich zwischen den Potenzwerten der Punktinvolutionen auf den drei Hauptaxen des Hyperboloids die Bedingung ergiebt:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0 \text{*)},$$

*) Da jeder reelle Durchmesser der Hyperbel größer ist, als die reelle Axe, so folgt:

wo $2c$ und $2b$ die hyperbolischen reellen Hauptaxen, $2a$ die elliptische, d. h. $-a^2$ das Quadrat der halben imaginären Hauptaxe bedeutet (S. 101).

$$\frac{\mu^2 B^2}{1-\mu^2} > b^2 \quad \text{oder} \quad \mu^2 B^2 > b^2 - \mu^2 b^2,$$

und da $B^2 = a^2 - b^2$ ist, wird

$$\mu^2 a^2 > b^2 \quad \text{oder}$$

$$\mu^2 > \frac{b^2}{a^2}.$$

Setzen wir für $\frac{b^2}{a^2}$ den ihm gleichen Wert $\frac{c^2 - b^2}{c^2}$ und bemerken, dafs $\sqrt{c^2 - b^2}$ der halbe Abstand der Brennpunkte der Ellipse $\mathfrak{E}_{bc}^{(2)}$ ist, so wird, wenn diese Brennpunkte mit $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$ bezeichnet werden:

$$\mu^2 = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{p}}{\mathfrak{M}\mathfrak{p}_1} > \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{f}^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{p}_1},$$

also

$$\mathfrak{M}\mathfrak{p}^2 > \mathfrak{M}\mathfrak{f}^2,$$

d. h. der Punkt $\mathfrak{p}$ liegt notwendig zwischen Brennpunkt und zugehörigem Scheitel derjenigen Ellipse, welche in einer Hauptebene des Hyperboloids liegt.

Dieselbe Bedingung, so geschrieben: $\frac{1}{\mu^2} < \frac{a^2}{b^2}$ zeigt, wenn wir für $\frac{a^2}{b^2}$ den ihm gleichen Wert $\frac{a^2 + c^2}{c^2}$ setzen, und bemerken, dafs $\sqrt{a^2 + c^2}$ der halbe Abstand der Brennpunkte der Hyperbel $\mathfrak{H}_{ca}^{(2)}$ ist, wenn diese Brennpunkte in der c-Axe durch $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_1'$ bezeichnet werden:

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{p}} < \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{f}_1^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{p}_1},$$

also:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{p}_1^2 < \mathfrak{M}\mathfrak{f}_1^2,$$

d. h. der Punkt $\mathfrak{p}_1$ liegt notwendig zwischen Brennpunkt und zugehörigem Scheitel derjenigen Hyperbel $\mathfrak{H}_{ca}^{(2)}$, welche in einer Hauptebene des Hyperboloids liegt und mit dem Hauptschnitt $\mathfrak{E}_{cb}^{(2)}$ die grofse Axe $2c$ gemeinschaftlich hat.

Da nämlich:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{f} = \sqrt{c^2 - b^2} = \frac{bc}{a}$$

$$\mathfrak{M}\mathfrak{f}_1 = \sqrt{c^2 + a^2} = \frac{ac}{b} \text{ ist},$$

so wird:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{f} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{f}_1 = c^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{p}_1.$$

Wenn daher $\mathfrak{M}\mathfrak{p} < c$, so mufs $\mathfrak{M}\mathfrak{p}_1 > c$ sein. Die Strecke $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$

Aus dieser Beziehung geht hervor, dafs das von uns betrachtete Hyperboloid von besonderer Art ist, weil zwischen den Gröfsen der Hauptaxen eine Bedingung obwaltet. Diese Bedingung selbst läfst unmittelbar erkennen eine ähnliche für den Asymptotenkegel unseres Hyperboloids, den Kernkegel desjenigen Polarbündels im räumlichen Polarsystem, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ ist. Da nämlich (S. 103) die beiden Kegelöffnungen in den Hauptebenen:

$$\text{in der } [ab]\text{-Ebene} \quad \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{a}{b}$$

$$\text{„ „ } [ac]\text{-Ebene} \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{a}{c}$$

sind, so liefert die vorige Bedingung:

$$\operatorname{ctg}^2 \vartheta - \operatorname{ctg}^2 \varphi = 1,$$

welche zeigt (S. 68), dafs der Asymptotenkegel ein orthogonaler Kegel ist. Die Hauptaxen und Hauptebenen desselben fallen zusammen mit den Hauptaxen und Hauptebenen unseres Hyperboloids. Der Durchschnitt des Hyperboloids mit der $[bc]$-Ebene ist eine Ellipse $\mathfrak{E}_{bc}^{(2)}$ mit den Hauptaxen $2b$ und $2c$, von denen die letztere die gröfsere ist wegen der obigen Relation $\frac{1}{a^2} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 b^2}$ $(c > b)$. Der Durchschnitt des Hyperboloids mit der $[ac]$-Ebene ist eine Hyperbel $\mathfrak{H}_{ac}^{(2)}$ mit der reellen Hauptaxe $2c$ und dem Asymptotenwinkel 2φ, d. h. demjenigen Winkelraum, in welchem nicht die Hyperbelzweige liegen, also $\operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{a}$. Der Durchschnitt des Hyperboloids mit der $[ab]$-Ebene ist eine Hyperbel $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$

---

liegt daher ganz innerhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1$, welche selbst folgenden Wert hat:

$$\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{M}\mathfrak{f} = c\,\frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{ab}{c} = B.$$

Wenn insbesondere $\mathfrak{p}$ bis nach $\mathfrak{f}$ gelangt, so kommt $\mathfrak{p}_1$ nach $\mathfrak{f}_1$, und es wird in diesem Grenzfalle $\mu^2 = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{f}}{\mathfrak{M}\mathfrak{f}_1} = \frac{b^2}{a^2}$, der Wert von μ kann also nur bis zu diesem Grenzwerte $\frac{b}{a}$ hin abnehmen, aber nicht unter denselben heruntergehen. In diesem Grenzfalle selbst wird $\mu = \frac{b}{a}$, $1 - \mu^2 = \frac{b^2}{c^2}$, $d = \frac{ab}{c}$, also da $d = B \,.\, \sin w$ ist, $w = 90^\circ$.

mit der reellen Axe $2b$ und dem Asymptotenwinkel 2ϑ, d. h. demjenigen Winkelraum, in welchem nicht die Hyperbelzweige liegen, also $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b}{a}$; der komplementäre Winkelraum, welcher die Hyperbelzweige selbst enthält, ist $> 90^0$, weil $a > b$ ist wegen der obigen Relation $\frac{1}{c^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}$. Die Asymptoten dieser Hyperbel $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$, welche in der Ebene $[\mathfrak{M} p_1^\infty]$ liegt, sind die Parallelen durch $\mathfrak{M}$ einmal zu l (oder g) und andererseits zu l_1 (oder g_1). Ein Durchmesser dieser Hyperbel $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$ ist für uns von besonderem Interesse, nämlich derjenige, welcher auf einer der Asymptoten rechtwinklig ist, sei dies der zu l rechtwinklige; dies mufs ein reeller Durchmesser sein, weil er in den Winkelraum zwischen den Asymptoten hineinfällt, die den über 90^0 betragenden Winkel einschliefsen, in dem die Hyperbel liegt. Dieser Durchmesser $2x$ ist leicht zu ermitteln; sei sein konjugierter $2y$, so haben wir wegen der Rechtwinkligkeit von x gegen l:

$$y \cdot \cos(yx) = x$$

und wegen der Eigenschaft der konjugierten Durchmesser:

$$x^2 - y^2 = b^2 - a^2$$
$$x \cdot y \cdot \sin(xy) = ab,$$

woraus folgt $y^2 - x^2 = y^2 \sin^2(xy) = a^2 - b^2 = \frac{a^2 b^2}{x^2}$, und da

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{c^2}, \text{ so folgt:}$$
$$x^2 = c^2,$$

d. h. der gesuchte zur Asymptote rechtwinklige Durchmesser der Hyperbel $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$ ist gerade so grofs wie die Hauptaxe $2c$ des Hyperboloids. Legen wir daher durch ihn und diese Hauptaxe eine Ebene, so mufs dieselbe das Hyperboloid in einem Kreise schneiden, weil durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Durchschnittskegelschnitts zwei gleiche zu einander rechtwinklige Durchmesser gehen.

Wir haben also die Kreisebenen des Hyperboloids gefunden; es sind diejenigen beiden Ebenen, welche durch die c-Axe rechtwinklig zu den Erzeugenden l (oder g) und l_1 (oder g_1) gelegt werden. Nehmen wir einen dieser beiden

Kreise, so ergiebt sich eine sehr einfache Konstruktion unseres Hyperboloids.

Sei $\mathfrak{x}$ ein beliebieger Punkt dieses Kreises und ziehen wir $|\mathfrak{o}\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}|$, so ist der Winkel $\mathfrak{o}\mathfrak{x}\mathfrak{o}_1 = 90^0$, weil $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1|$ ein Durchmesser des Kreises ist; ferner steht die Ebene $[\mathfrak{o}\mathfrak{x}\mathfrak{o}_1]$ rechtwinklig auf dem Strahle l, der durch $\mathfrak{o}$ geht. Da also l Normale der Ebene $[\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}\mathfrak{o}]$ ist, so ist ihre Richtung auch auf der Richtung von $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}|$ rechtwinklig; da $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}|$ rechtwinklig ist zu l und zu $|\mathfrak{o}\mathfrak{x}|$, so ist $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}|$ Normale der Ebene $[l|\mathfrak{o}\mathfrak{x}|]$ oder $[l\mathfrak{x}]$; legen wir daher die Ebene $[l_1\mathfrak{x}]$, welche durch $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}|$ geht, die Normale der Ebene $[l\mathfrak{x}]$, so müssen die Ebenen $[l\mathfrak{x}]$ und $[l_1\mathfrak{x}]$ selbst zu einander rechtwinklig sein, weil eine durch die Normale der andern geht. Nun sind aber l und l_1 Erzeugende des Hyperboloids und $\mathfrak{x}$ ein gewisser Punkt desselben, folglich müssen sich die beiden Ebenen $[l\mathfrak{x}]$ und $[l_1\mathfrak{x}]$ in einer Geraden g_x schneiden, welche der anderen Regelschar angehört, zu der nicht l und l_1 gehören. Wir haben daher folgende einfache Konstruktion unseres Hyperboloids:

Wenn man um l eine Ebene dreht und durch l_1 allemal eine zu ihr rechtwinklige Ebene legt, so beschreibt die Durchschnittslinie beider Ebenen eine Regelschar g_x unseres Hyperboloids.

Dafs die beiden durch diese Bewegung erzeugten Ebenenbüschel $[l]$ und $[l_1]$ projektivisch sind, ist evident (siehe § 26). Wir nennen ein solches besonderes Hyperboloid, welches erzeugt wird von zwei projektivischen Ebenenbüscheln, deren entsprechende Ebenen rechtwinklig zu einander sind, ein orthogonales Hyperboloid*) und haben als charakteristische Eigenschaft desselben die, dafs seine Kreisschnitte rechtwinklig stehen auf zwei bestimmten Erzeugenden l (oder g),

*) Vergl. J. Steiner: Crelle's Journal Bd. II S. 292, Aufgaben und Lehrsätze, J. Steiner: Syst. Entw. d. Abh. g. Gest. v. einand. S. 218 u. 232. M. Chasles: Journal de mathématiques p. J. Liouville tome I p. 324: Analogie entre des propositions de Géométrie plane et de Géométrie à trois dimensions. A. Schönflies: Synthetisch-geometrische Untersuchungen über Flächen II. Grades. Inaug.-Dissertation. Berlin 1877. A. Schönflies: Über ein specielles Hyperboloid. Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. XXIII S. 269. H. Schröter: Über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art, Borchardts Journal f. Math. Bd. 85, S. 26.

l_1 (oder g_1) der einen oder der andern Regelschar. Wir hätten ebenso auch durch g und g_1 Paare je zweier zu einander rechtwinkligen Ebenen legen können, deren Durchschnittslinien l_x die andere Regelschar desselben Hyperboloids erzeugen.

Da der Asymptotenkegel des Hyperboloids ein orthogonaler ist, wie oben bemerkt wurde, und die Kegelstrahlen den Erzeugenden des Hyperboloids parallel laufen, so folgt schon aus der Erzeugung des orthogonalen Kegels durch rechtwinklige Ebenenpaare die des orthogonalen Hyperboloids, und dadurch ist auch die gleichnamige Bezeichnung gerechtfertigt.

Das Resultat unserer Untersuchung besteht also darin, daſs ein räumliches Polarsystem, in dem zwei konjugierte Strahlen mit zugehörigen orthogonalen Ebeneninvolutionen vorkommen, zur Kernfläche ein orthogonales Hyperboloid hat.

§ 26. Eine metrische Eigenschaft des orthogonalen Hyperboloids.

Wir gehen auf die einfache Erzeugung des orthogonalen Hyperboloids, welche wir zuletzt kennen gelernt haben, noch näher ein, um einige Folgerungen daran zu knüpfen.

Drehen wir um zwei feste windschiefe Gerade l und l_1 als Axen zwei veränderliche Ebenen ξ und ξ_1 und stellen dieselben beständig rechtwinklig zu einander, so wird ihre Schnittlinie:

$$|\xi\xi_1| = g_x$$

eine Regelschar eines orthogonalen Hyperboloids beschreiben; denn sei die zur Stellung der Ebene ξ normale Richtung durch den unendlich-entfernten Punkt $\mathfrak{x}^\infty$ gegeben, dann ist die durch l_1 und $\mathfrak{x}^\infty$ gelegte Ebene die Ebene ξ_1. Bei der Drehung von ξ um l durchläuft aber $\mathfrak{x}^\infty$ eine gerade Punktreihe auf derjenigen unendlich-entfernten Geraden l^∞, in welcher die Normalebene der Axe l die unendlich-entfernte Ebene ε^∞ schneidet; es beschreiben die Ebenen ξ und $[l\mathfrak{x}^\infty]$ zwei gleiche, also projektivische Ebenenbüschel, von denen das zweite nur als das um 90^0 gedrehte erste erscheint, folglich ist auch die von $\mathfrak{x}^\infty$ beschriebene gerade Punktreihe mit dem von ξ beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch, daher

sind es auch die Ebenenbüschel:

$$l[\mathfrak{x}] \text{ und } l_1[\mathfrak{x}_1].$$

Ihr Erzeugnis, der Ort der Schnittlinie $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1| = g_x$, ist also eine Regelschar eines einfachen Hyperboloids, von welchem l und l_1 ein Paar Erzeugender der andern Regelschar sind. Dafs dieses Hyperboloid ein orthogonales ist, erkennen wir sogleich, wenn wir irgend eine Ebene ε normal zum Strahle l legen; dann wird nämlich auf der durch l gehenden Ebene $\mathfrak{x}$ sowohl die Ebene $\mathfrak{x}_1$ als auch die Ebene ε rechtwinklig stehen, folglich auch die Schnittlinie $|\mathfrak{x}_1\varepsilon|$; die Ebene ε schneidet daher die Ebenen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ in zwei zu einander rechtwinkligen Strahlen, welche durch zwei feste Punkte gehen, die Durchschnittspunkte der Strahlen l und l_1 mit der Ebene ε. Der Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte laufen, ist aber ein Kreis, folglich ist die Durchschnittskurve der Ebene ε mit unserem Hyperboloid ein Kreis. Das Gleiche gilt von einer beliebigen Ebene ε_1, die normal zum Strahle l_1 gestellt wird. Wir haben also folgendes Ergebnis:

Wenn ein diëdrischer rechter Winkel sich so bewegt, dafs seine beiden Ebenen um zwei feste windschiefe Gerade l und l_1 sich drehen, so beschreibt seine Kante ein orthogonales einfaches Hyperboloid, dessen Kreisschnittebenen rechtwinklig auf den beiden Erzeugenden l und l_1 des Hyperboloids stehen.

Hieraus ergiebt sich zugleich eine zweite Konstruktion des Hyperboloids:

Wenn zwei windschiefe Gerade l und l_1 gegeben sind, und man bewegt eine veränderliche Ebene ε, welche denselben in den Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ begegnet so, dafs sie beständig zu l (oder l_1) rechtwinklig bleibt, dann wird ein über $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ als Durchmesser in der Ebene ε beschriebener Kreis ein orthogonales Hyperboloid erzeugen, dessen einer Regelschar l und l_1 angehören. Dasselbe Hyperboloid erhält man als Ort einer zweiten Kreisschar, wenn man in einer zu l_1 rechtwinklig gestellten Ebene ε_1 dieselbe Konstruktion ausführt.

Zieht man durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ eines orthogonalen Hyperboloids Parallele zu sämtlichen Erzeugenden g_x der einen Regelschar, so sind dieselben bekanntlich Strahlen des Asymptotenkegels (S. 99); zieht man auch zu l und l_1 die Parallelen s und s_1 durch $\mathfrak{M}$ und betrachtet $s\,s_1$ als die Axen zweier den Asymptotenkegel erzeugenden projektivischen Ebenenbüschel, so sind diese Ebenenbüschel bez. parallel gestellt und gleich den Ebenenbüscheln $l[g_x]$ und $l_1[g_x]$, welche das orthogonale Hyperboloid erzeugen, folglich ist der Asymptotenkegel des orthogonalen Hyperboloids ein orthogonaler Kegel (S. 67), und da der orthogonale Kegel, wie wir gesehen haben (S. 70), immer auch erzeugt werden kann durch zwei projektivisch-gleiche Ebenenbüschel, so schliefsen wir:

Zwei projektivisch-gleiche Ebenenbüschel, deren Axen sich nicht treffen, erzeugen allemal ein orthogonales Hyperboloid.

Sind $\mathfrak{o}^\infty$ und $\mathfrak{o}_1^\infty$ die unendlich-entfernten Punkte der Axen l und l_1, legt man die Ebenen $[l\,\mathfrak{o}_1^\infty]$ und $[l_1\,\mathfrak{o}^\infty]$, die sich in der Geraden $|\mathfrak{o}^\infty \mathfrak{o}_1^\infty| = d_1^\infty$ schneiden, also parallel laufen, und legt man endlich durch l und l_1 die zu diesen Ebenen rechtwinkligen Ebenen, so schneiden sich dieselben in dem kürzesten Abstande $d = |\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1|$ der beiden Geraden l und l_1, und die Schnittlinien:

$$|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1^\infty| = g_1 \qquad |\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}^\infty| = g$$

müssen offenbar zwei besondere Erzeugende der Regelschar g_x sein, und zwar ist g parallel l und g_1 parallel l_1, also auch die Ebene $[l g_1]$ parallel der Ebene $[g l_1]$ und ihr Abstand $d = |\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1|$ die kürzeste Distanz sowohl für die Geraden l und l_1 als auch für die Geraden g und g_1, nämlich:

$$\mathfrak{o} = (l g_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{o}_1 = (l_1 g).$$

Legen wir nun irgend eine Ebene ε rechtwinklig zum Strahle l, so ist dieselbe auch zu g rechtwinklig; sie schneidet das Hyperboloid in einem Kreise, die vier Strahlen $l\ l_1\ g\ g_1$ in vier Punkten $\mathfrak{p}\ \mathfrak{p}_1\ \mathfrak{q}\ \mathfrak{q}_1$; da $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1|$ Durchmesser dieses Kreises ist, ferner die Ebene $[l g_1]$ der Ebene $[l_1 g]$ parallel und ε zu beiden rechtwinklig ist, so schneidet ε beide in parallelen Linien; folglich sind die Sehnen $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}|$ und $|\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}_1|$ im obigen Kreise parallel, also ist auch $|\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_1|$ ein Durchmesser des Kreises.

Wir erkennen hieraus, dafs wir an Stelle der gegebenen Strahlen l und l_1, welche wir als Axen zweier projektivischen Ebenenbüschel nahmen, deren entsprechende Ebenen zu einander rechtwinklig gestellt wurden, auch die beiden mit jenen Erzeugenden Parallelen g und g_1 der zweiten Regelschar hätten annehmen können, um in gleicher Weise das orthogonale Hyperboloid zu konstruieren; also:

Es läfst sich dasselbe orthogonale Hyperboloid auf zwei verschiedene Arten durch je zwei projektivische Ebenenbüchel erzeugen, deren entsprechende Ebenen zu einander rechtwinklig sind. Die Axen dieser Ebenenbüschel sind zwei zu den beiden Kreisschnitten rechtwinklige Erzeugende l und l_1 der einen Regelschar des Hyperboloids oder die mit ihnen parallelen Erzeugenden g und g_1 der andern Regelschar.

Da die Ebenen $[lg_1]$ und $[l_1 g]$, welche sich in d_1^∞ schneiden, die Berührungsebenen des Hyperboloids in den Punkten $(lg_1) = \mathfrak{o}$ und $(l_1 g) = \mathfrak{o}_1$ sind, so ist $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1| = d$ der konjugierte Strahl zu d_1^∞, also der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$ der Pol der unendlich-entfernten Ebene, d. h. der Mittelpunkt des Hyperboloids. Die durch $\mathfrak{M}$ und d_1^∞ gelegte Ebene ist rechtwinklig auf d, also d selbst eine Hauptaxe und die Ebene $[\mathfrak{M} d_1^\infty]$ eine Hauptebene des Hyperboloids. Wir nennen die Länge der einen Hauptaxe des Hyperboloids

$$\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1 = 2c$$

und erhalten die beiden andern, indem wir in der Ebene $[\mathfrak{M} d_1^\infty]$ die Parallelen durch $\mathfrak{M}$ zu l (oder g) und l_1 (oder g_1) ziehen, dieselben als die Asymptoten der Durchschnitts-Hyperbel $(\mathfrak{H}_{ab}^{(2)})$ in dieser Hauptebene erkennen und Winkel und Nebenwinkel zwischen diesen Asymptoten halbieren; diese zu einander rechtwinkligen Halbierungslinien sind die Hauptaxen ihrer Richtung nach; die eine mufs hyperbolisch $(= 2b)$ sein, die andere elliptisch; ihre Länge wird bekanntlich vertreten durch das Stück $(2a)$, welches durch die Asymptoten auf einer Scheiteltangente abgeschnitten wird.

Da nun eine durch $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1| = d$ rechtwinklig zu l gelegte Ebene das Hyperboloid in einem Kreise schneidet, dessen

Durchmesser $2c$ ist, so schneidet dieselbe die Hyperbel $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$ in einem Durchmesser, der ebenfalls $2c$ sein mufs und rechtwinklig auf einer (zu l parallelen) Asymptote dieser Hyperbel steht; sei für den Augenblick der zu diesem konjugierte Durchmesser $2c_1$, so haben wir wegen der Rechtwinkligkeit von c gegen die eine Asymptote

$$c = c_1 \cos(cc_1)$$

und wegen bekannter Beziehungen zwischen den Paaren konjugierter Durchmesser:

$$c^2 - c_1^2 = b^2 - a^2$$
$$cc_1 \sin(cc_1) = ab,$$

woraus folgt $a^2 - b^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}$

oder: $$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0,$$

die schon oben (S. 180) gefundene Bedingung zwischen den Axen eines orthogonalen Hyperboloids.

Wenn wir uns bei dem orthogonalen Hyperboloid zwei solche besondere konjugierte Strahlen s und s_1 herstellen, wie wir sie früher (S. 174) als Axen zugehöriger orthogonaler Ebeneninvolutionen zum Ausgangspunkte wählten, so besitzen die Punkte des Hyperboloids eine sehr einfache metrische Eigenschaft rücksichtlich s und s_1, die wir hervorheben müssen.

Nehmen wir auf derjenigen Hauptaxe ($2c$) des orthogonalen Hyperboloids, durch welche die Kreisschnitte gehen, ein solches Paar konjugierter Punkte ($\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$) an, dafs die Strecke $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ ganz hineinfällt in die Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1$ (s. Anm. zu S. 182), wo $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ die demselben Scheitel zunächst liegenden Brennpunkte in den Hauptschnitten der $[cb]$-Ebene und der $[ca]$-Ebene bedeuten (was in doppelter Weise geschehen kann); legen wir sodann durch $\mathfrak{p}$ eine zur c-Axe rechtwinklige Ebene, welche das Hyperboloid in einer Hyperbel schneidet und denken uns die zu dieser konjugierte Hyperbel konstruiert, dann giebt es in dieser Hyperbel einen reellen Halbmesser von der Grösse $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1 \left(= \frac{ab}{c}\right)$, der natürlich doppelt auftritt.

Der zu einem solchen Halbmesser konjugierte Durchmesser der Hyperbel ist der Strahl s, der zu demselben konjugierte Strahl s_1 und das Strahlenpaar ss_1 ist von der verlangten Beschaffenheit. Dafs in der That ein reeller Halbmesser von der Gröfse $\frac{ab}{c}$ in der obigen Hyperbel existieren mufs, erkennen wir sofort aus dem Werte der reellen Zwergaxe jener konjugierten Hyperbel; nach S. 180 ist die Potenz der zugehörigen Punktinvolution $= a^2(1 - \mu^2)$ und, da nach der Konstruktion des Punktepaars $(\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1)$ das Verhältnis $\mu^2 > \frac{b^2}{a^2}$ ist, also $1 - \mu^2 < \frac{a^2 - b^2}{a^2} \left(= \frac{b^2}{c^2}\right)$, so ist $a^2(1 - \mu^2) < \frac{a^2 b^2}{c^2}$, also der gesuchte Halbmesser reell.

Ist auf diese Weise ein solches besonderes Paar konjugierter Strahlen ss_1 für das orthogonale Hyperboloid hergestellt, welche durch die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ so gelegt sind, dafs

$$\frac{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1} = \mu = \frac{\sin(ls)}{\sin(ls_1)} \text{ wird,}$$

und denken wir uns (Fig. 5) durch $\mathfrak{o}$ zu s eine Parallele t und

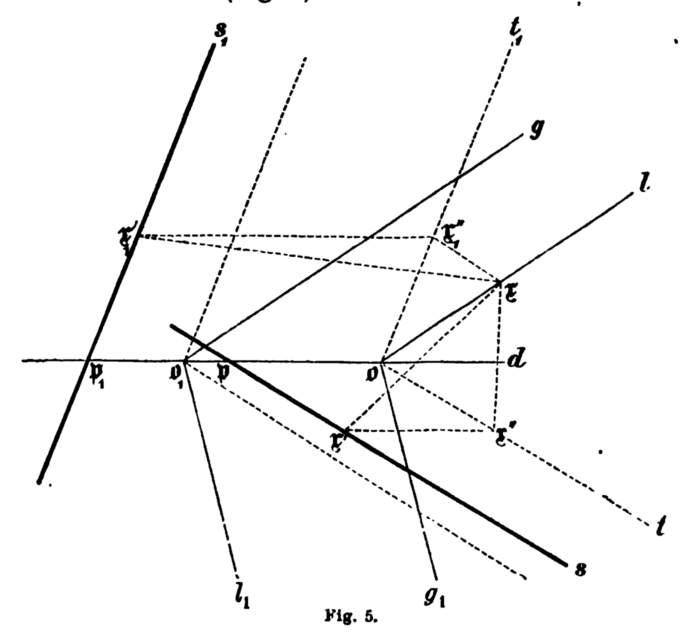


Fig. 5.

zu s_1 eine Parallele t_1 gezogen, nehmen sodann einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ der Geraden l und legen durch $\mathfrak{x}$ eine Ebene normal zu den parallelen Strahlen s und t, denen diese Ebene in $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ begegnen möge, ebenso durch $\mathfrak{x}$ eine Ebene normal zu den parallelen Geraden s_1 und t_1, denen diese Ebene in den Punkten $\mathfrak{x}_1'$ und $\mathfrak{x}_1''$ begegnen möge; dann sind die beiden Dreiecke $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1'\mathfrak{x}_1''$ einander ähnlich, weil sie resp. bei $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{x}_1''$ rechtwinklig sind und die Seiten

$$\mathfrak{x}''\mathfrak{x}' = \mathfrak{o}\mathfrak{p} \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}'' = \mathfrak{o}\mathfrak{x} \, . \, \sin(lt)$$
$$\mathfrak{x}_1''\mathfrak{x}_1' = \mathfrak{o}\mathfrak{p}_1 \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1'' = \mathfrak{o}\mathfrak{x} \, . \, \sin(lt_1)$$

einander proportional sind; folglich wird auch das Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}'}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1'} = \mu$$

sein müssen, d. h. jeder Punkt $\mathfrak{x}$ der Geraden l hat von den Geraden s und s_1 Abstände, die in dem konstanten Verhältnisse μ zu einander stehen. Da diese Abstände bei der räumlichen Figur nur im absoluten Sinne aufzufassen sind, so hat ihr Verhältnis für alle Punkte der Geraden $l_1\, g\, g_1$ denselben absoluten Wert μ. Diese Eigenschaft des konstanten Abstandsverhältnisses kommt nicht allein den Punkten dieser Erzeugenden $l\, g\, l_1\, g_1$, sondern überhaupt sämtlichen Punkten des orthogonalen Hyperboloids zu.

Denn legen wir durch l und l_1 zwei zu einander rechtwinklige Ebenen, die sich in der Erzeugenden g_x des orthogonalen Hyperboloids schneiden, so läfst sich zunächst für die Richtung von g_x ein sehr einfaches Gesetz erkennen. In $\mathfrak{o}$ schneiden sich die Erzeugenden l und g_1, und durch $\mathfrak{o}$ gehen die zu s und s_1 parallel gezogenen Geraden tt_1; letztere werden durch erstere harmonisch getrennt wegen des Verhältnisses

$$\frac{\sin(lt)}{\sin(lt_1)} = -\frac{\sin(g_1 t)}{\sin(g_1 t_1)} = \mu.$$

Ziehen wir durch $\mathfrak{o}$ auch noch eine Parallele h_x zu g_x, so wird die Ebene $[h_x g_1]$ parallel sein der Ebene $[g_x l_1]$, und die Ebene $[h_x l]$ mit der Ebene $[g_x l]$ zusammenfallen; da aber die Ebenen $[g_x l]$ und $[g_x l_1]$ zu einander rechtwinklig sind,

so müssen auch die Ebenen $[h_x l]$ und $[h_x g_1]$ zu einander rechtwinklig sein. Die vier Ebenen:

$$h_x [l g_1 t t_1]$$

sind aber harmonisch und zwei zugeordnete rechtwinklig zu einander, mithin halbieren diese die Winkel zwischen den beiden andern zugeordneten $[h_x t]$ und $[h_x t_1]$. Wenn aber in einem Dreikant $h_x t t_1$ der Neigungswinkel an einer Kante h_x halbiert wird durch eine Ebene, welche die gegenüberliegende Seitenfläche des Dreikants in einer Geraden l schneidet, so ist:

$$\frac{\sin(h_x t)}{\sin(h_x t_1)} = \frac{\sin(l t)}{\sin(l t_1)} = \mu,$$

folglich hat das Verhältnis $\frac{\sin(h_x t)}{\sin(h_x t_1)}$ den konstanten Wert μ und, da die Strahlen $h_x t t_1$ bez. parallel laufen den Strahlen $g_x s s_1$, so sind auch die Richtungen dieser Strahlen der Bedingung unterworfen:

$$\frac{\sin(g_x s)}{\sin(g_x s_1)} = \mu$$

d. h. die Erzeugenden g_x einer Regelschar des orthogonalen Hyperboloids verändern ihre Richtung dergestalt, daſs das Verhältnis der Sinus der Winkel, welche sie mit den festen Richtungen von s und s_1 bilden, den konstanten Wert μ behält.

Daſs dasselbe auch für die Erzeugenden l_x der andern Regelschar gilt, braucht nicht besonders nachgewiesen zu werden, weil die Erzeugenden der beiden Regelscharen paarweise parallel laufen.

Nehmen wir jetzt eine beliebige Erzeugende g_x der ersten Regelschar, so trifft dieselbe l und l_1 in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$; diese besitzen, weil sie auf den Geraden l und l_1 liegen, wie vorhin gezeigt wurde, die Eigenschaft, daſs ihre Abstände von s und s_1 in dem Verhältnis μ zu einander stehen; seien die Perpendikel aus $\mathfrak{a}$ auf $s s_1$ die Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}'|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1'|$, die Perpendikel aus $\mathfrak{b}$ auf s und s_1 die Geraden $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}'|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1'|$, dann ist:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1'} = \mu; \quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1'} = \mu;$$

ziehen wir ferner durch $\mathfrak{a}$ eine Parallele t zu s und eine Parallele t_1 zu s_1, so ist auch:

$$\frac{\sin(g_x t)}{\sin(g_x t_1)} = \mu.$$

Eine Normalebene durch $\mathfrak{b}$ zu s gelegt (Fig. 6), treffe nun

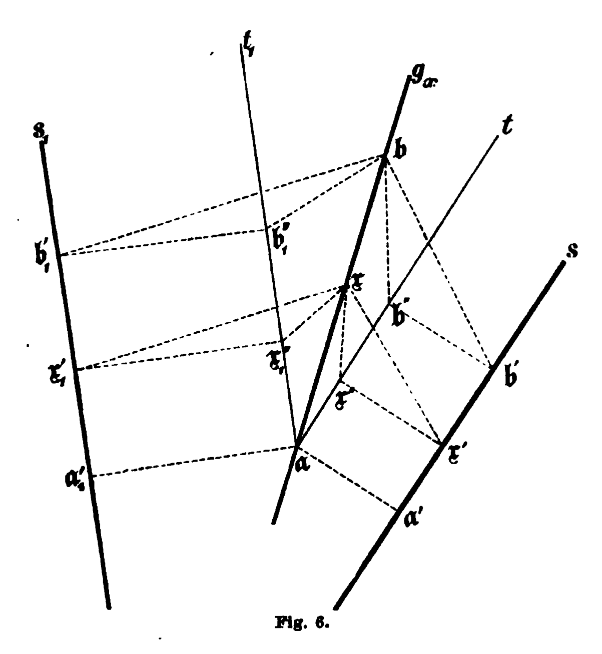


Fig. 6.

s in $\mathfrak{b}'$ und t in $\mathfrak{b}''$; ebenso wird eine Normalebene durch $\mathfrak{b}$ zu s_1 gelegt, den Strahl s_1 in $\mathfrak{b}_1'$ und t_1 in $\mathfrak{b}_1''$ treffen, und da diese beiden Ebenen normal zu s und s_1, also auch zu t und t_1 sind, so sind auch $|\mathfrak{b}''\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{b}''\mathfrak{b}'|$ normal zu t u.s.w. Wir haben also:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}''\mathfrak{b}' \qquad \mathfrak{b}\mathfrak{b}'' = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \, . \sin(g_x t)$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{b}_1''\mathfrak{b}_1' \qquad \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1'' = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \, . \sin(g_x t_1),$$

also

$$\frac{\mathfrak{b}''\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}_1''\mathfrak{b}_1'} = \mu \quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1'} = \mu \quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{b}''}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1''} = \mu,$$

folglich sind die beiden Dreiecke $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1'\mathfrak{b}_1''$ einander ähnlich, weil ihre Seiten proportional sind. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt aber die Gleichheit der Winkel, nämlich

$$\angle \mathfrak{b}\mathfrak{b}''\mathfrak{b}' = \angle \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1''\mathfrak{b}_1'$$

folglich die Gleichheit der Neigungswinkel:

$$\angle ([ts], [tg_x]) = \angle ([t_1 s_1], [t_1 g_x])$$

weil t die Normale der Ebene $[\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'']$ und t_1 die Normale der Ebene $[\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1'\mathfrak{b}_1'']$ ist.

Nehmen wir jetzt auf der Erzeugenden g_x einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ an und legen durch ihn eine Normalebene zu s, welche s und t in den Punkten $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ treffe, und zweitens durch $\mathfrak{x}$ eine Normalebene zu s_1, welche s_1 und t_1 in $\mathfrak{x}_1'$ und $\mathfrak{x}_1''$ treffe, dann müssen auch die Dreiecke:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1'\mathfrak{x}_1''$$

einander ähnlich sein, weil sie zwei Seiten proportional und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben; es ist nämlich

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'' = \mathfrak{a}'\mathfrak{a}; \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}'' = \mathfrak{a}\mathfrak{x} \cdot \sin(g_x t)$$
$$\mathfrak{x}_1'\mathfrak{x}_1'' = \mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}; \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1'' = \mathfrak{a}\mathfrak{x} \cdot \sin(g_x t_1),$$

also

$$\frac{\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''}{\mathfrak{x}_1'\mathfrak{x}_1''} = \mu = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}''}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1''}$$

und aufserdem

$$\angle \mathfrak{x}\mathfrak{x}''\mathfrak{x}' = \angle \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1''\mathfrak{x}_1',$$

weil diese ebenen Winkel den Neigungswinkeln

$$\angle ([ts], [tg_x]) = \angle ([t_1 s_1], [t_1 g_x])$$

bez. gleich sind.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt aber die Proportionalität des dritten Seitenpaares:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}'}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1'} = \mu$$

d. h. die Perpendikel aus dem beliebigen Punkte $\mathfrak{x}$ der Erzeugenden g_x auf die beiden festen Strahlen $s s_1$ stehen in dem konstanten Verhältnisse μ zu einander. Wir haben also folgendes Resultat:

Jeder Punkt des orthogonalen Hyperboloids besitzt die Eigenschaft, dafs das Verhältnis seiner Abstände von den beiden festen Strahlen s und s_1 einen unveränderlichen Wert (μ) behält.

Diese Eigenschaft läfst sich geradezu umkehren, denn es ist leicht einzusehen, dafs kein anderer Punkt im Raume als diejenigen unsres Hyperboloids die Eigenschaft haben kann, denselben Wert des Verhältnisses seiner Abstände von s und s_1 zu liefern; wir schliefsen also:

Der Ort sämtlicher Punkte im Raume, für welche das Verhältnis ihrer Abstände von zwei festen windschiefen Geraden ss_1 einen konstanten Wert $\mu (< 1)$ besitzt, ist ein orthogonales Hyperboloid. Die Konstruktion desselben aus den gegebenen Daten ss_1 und μ ist im Vorigen enthalten.

Solche zwei Gerade ss_1 sind allemal konjugiert in Bezug auf das Hyperboloid und die Axen zugehöriger orthogonaler Ebeneninvolutionen.

§ 27. Das gleichseitige Hyperboloid.*)

Dem orthogonalen Hyperboloid, welches uns in den beiden letzten Paragraphen beschäftigt hat, steht zur Seite ein anderes Hyperboloid von besonderer Art, welches sich zu jenem in ähnlicher Weise verhält, wie die gleichseitige Hyperbel zum Kreise.

Das charakteristische Merkmal des orthogonalen Hyperboloids war die Eigenschaft, dafs seine beiden Kreisschnitte normal stehen auf zwei Erzeugenden. Hier tritt uns die Frage nach einem Hyperboloid entgegen, welches durch eine zu einer Erzeugenden rechtwinklige Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten wird; oder auch, da die beiden unendlich-entfernten Punkte einer gleichseitigen Hyperbel in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen sich finden, und durch jeden derselben eine Erzeugende derselben Regelschar, der die erste Erzeugende angehört, gehen mufs, die Frage:

Ein Hyperboloid zu finden, bei welchem drei derselben Regelschar angehörige Erzeugende ll_1l_2 normal unter einander gerichtet sind.

Da hier nur die Richtungen der Erzeugenden in Betracht kommen, so können wir uns durch den Mittelpunkt des Hyperboloids (oder irgend einen beliebigen Punkt im Raume) die Parallelen zu den Erzeugenden der einen oder der anderen Regelschar gezogen denken; diese bilden bekanntlich (S. 99)

*) Vergl. H. Vogt: „Über ein besonderes Hyperboloid“, Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 86. S. 301.

den Asymptotenkegel des Hyperboloids und die vorige Frage reduziert sich auf die folgende: Giebt es auf einem Kegel 2. O. drei zu einander normale Kegelstrahlen. Diese Frage ist oben (S. 78) beantwortet worden und giebt uns hier folgende Antwort auf unsere neue Frage:

Kommen unter den Erzeugenden einer Regelschar drei zu einander normale vor, so giebt es unendlich viele solcher Tripel von normalen Erzeugenden, indem zu jedem Strahl der Regelschar zwei bestimmte unter einander und zu ihm normale Erzeugende derselben Regelschar vorhanden sind.

Oder auch:

Ist einmal eine Ebene, welche ein Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, rechtwinklig zu einer Erzeugenden desselben, so schneidet jede zu einer Erzeugenden normale Ebene das Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel.

Es ist leicht die Bedingung dafür aufzustellen, daſs dieser Fall einmal auftritt. Nehmen wir den Hauptschnitt des Hyperboloids $\mathfrak{E}_{bc}^{(2)}$, eine Ellipse, deren Hauptaxen $2c$ und $2b$ sind, während die a-Axe imaginär d. h. der Träger einer elliptischen Punktinvolution ist, deren Potenz $= -a^2$ ist, so daſs also die beiden Hauptschnitte $\mathfrak{H}_{ac}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$ Hyperbeln sind mit der gemeinschaftlichen imaginären a-Axe und den reellen Zwergaxen $2c$ und $2b$. Denken wir uns eine der beiden Erzeugenden aufgesucht, welche in der Berührungsebene eines Scheitels der c-Axe enthalten sind; sei l^0 diese Erzeugende und die darauf rechtwinklig gestellte Ebene ε, welche in einer gleichseitigen Hyperbel schneiden soll; dann wird diese Ebene ε durch die c-Axe gehen, welche zugleich ihre reelle Hauptaxe ist; die imaginäre Hauptaxe derselben trägt also eine elliptische Involution mit der Potenz $-c^2$; diese ist die Schnittlinie der Ebene ε mit der $[ab]$-Ebene. Die Hyperbel $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$, deren Potenzen auf den Hauptaxen b^2 und $-a^2$ sind, hat also einen imaginären Durchmesser mit der Potenz $-c^2$ und eine Asymptote, welche rechtwinklig auf letzterem steht, weil sie parallel l^0 ist. Nen-

nen wir für den Augenblick denjenigen reellen Durchmesser $2c_1$, welcher konjugiert ist der Schnittlinie $|\varepsilon, [ab]|$, so haben wir für die Hyperbel $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$:

$$c_1^2 - c^2 = b^2 - a^2$$
$$c_1 c \,.\, \sin(cc_1) = ab$$
$$c_1 \cos(cc_1) = c,$$

woraus folgt:

$$c_1^2 - c_1^2 \sin^2(cc_1) = c^2$$
$$b^2 - a^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2} \text{ oder}$$
$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 0.$$

Dies ist die Bedingung zwischen den Hauptaxen des Hyperboloids dafür, dafs dasselbe einmal drei zu einander normale Erzeugende einer Regelschar habe, also auch unendlich-viele solcher Tripel.

Wir nennen ein solches Hyperboloid ein **gleichseitiges Hyperboloid.**

Fassen wir nun bei einem gleichseitigen Hyperboloid drei solche zu einander rechtwinklige Erzeugende $l\,l_1\,l_2$ derselben Regelschar auf, so giebt es bekanntlich drei zu denselben parallele Erzeugende $g g_1 g_2$ der andern Regelschar, die mithin auch unter einander normal sind, und da jedes g_x jedem l_x begegnen mufs, so enthalten die $g g_1 g_2$ die kürzesten Entfernungen zwischen je zwei der $l l_1 l_2$ und umgekehrt. Solche sechs Erzeugende $g\, g_1\, g_2\, l\, l_1\, l_2$ fügen sich zusammen zu sechs Kanten eines Parallelepipeds, dessen übrige sechs Kanten nicht auf dem Hyperboloid liegen, oder zu den sechs Seiten eines räumlichen Sechsseits, dessen je zwei Gegenseiten parallel sind (Fig. 7):

$$l\, g_1\, l_2\, g\, l_1\, g_2.$$

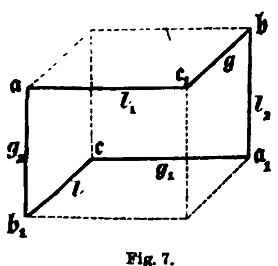


Fig. 7.

Die sechs Ecken dieses Sechsseits sind zugleich sechs Ecken des Parallelepipeds, dessen beide übrige Ecken nicht auf dem gleichseitigen Hyperboloid liegen.

Wir können uns solcher rechtwinkligen Sechsseite oder Parallelepipeda unendlich viele

eines solchen Parallelepipeds, wie wir es vorhin betrachtet haben, deren Ecken sämtlich auf einer Kugelfläche liegen. Der Radius r dieser Kugel ist also $= c_1$, und wir haben aus dem Obigen:

$$r^2 = c^2 + b^2 - a^2,$$

wodurch der Radius der Kugel bestimmt ist. (Aus der oben gefundenen Bedingung $\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 0$ folgt $a < b$ und $a < c$, folglich ist r^2 positiv, also die Kugel reell.)

Um nun zu einer beliebigen Erzeugenden l die beiden unter einander und zu ihr rechtwinkligen Erzeugenden $g_1 g_2$ zu finden, braucht man nur ihre Durchschnittspunkte mit der gefundenen Kugel aufzusuchen und die beiden durch diese Punkte gehenden Erzeugenden der andern Regelschar zu nehmen.

Auf der von uns gefundenen Kugel liegen nicht allein die sechs Ecken des Sechsseits $l g_1 l_2 g l_1 g_2$, sondern auch die beiden übrigen Ecken des Parallelepipeds, nämlich der Durchschnittspunkt der drei Ebenen:

$$[l g_2]\ [l_2 g_1]\ [l_1 g]$$

und auch der Durchschnittspunkt der drei Ebenen:

$$[l_2 g]\ [l_1 g_2]\ [l g_1].$$

Diese sechs Ebenen sind Berührungsebenen des Hyperboloids, und je drei zu einander rechtwinklig, also können wir auch sagen:

Auf der vorigen Kugel liegen allemal auch die Schnittpunkte je dreier zu einander normaler Berührungsebenen des Hyperboloids (die Allgemeingültigkeit dieses Satzes wird sich später ergeben).

Fassen wir nochmals die vorige Figur des auf dem gleichseitigen Hyperboloid verlaufenden Sechsseits:

$$l g_1 l_2 g l_1 g_2$$

ins Auge und fügen derselben ein beliebiges zweites Sechsseit derselben Art hinzu:

$$l' g_1' l_2' g' l_1' g_2',$$

so haben wir zwölf Erzeugende auf dem Hyperboloid und gelangen von der bekannten Eigenschaft aus, daſs irgend zwei Erzeugende durch die Erzeugenden der andern Regelschar

allemal projektivisch geschnitten werden, zu metrischen Beziehungen der Art:

$$\text{(I)} \qquad g(ll_1l_2l') = g_1(ll_1l_2l') = g_2(ll_1l_2l'),$$

oder, wenn wir die Schnittpunkte:

$$(gl) = \mathfrak{g}^\infty \qquad (g_1l_1) = \mathfrak{g}_1^\infty \qquad (g_2l_2) = \mathfrak{g}_2^\infty$$
$$(gl') = \mathfrak{x} \qquad (g_1l') = \mathfrak{x}_1 \qquad (g_2l') = \mathfrak{x}_2$$

bezeichnen:

$$(\mathfrak{g}^\infty \mathfrak{c}_1 \mathfrak{b} \mathfrak{x}) = (\mathfrak{c} \mathfrak{g}_1^\infty \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}_1) = (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{a} \mathfrak{g}_2^\infty \mathfrak{x}_2),$$

oder, wenn wir die Werte der Doppelverhältnisse einsetzen:

$$\begin{cases} \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 \,.\, \mathfrak{a}_1\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}_2 \,.\, \mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 \,.\, \mathfrak{b}_1\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{x} \,.\, \mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{c}_1\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{x}_1 \,.\, \mathfrak{c}_1\mathfrak{x}, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$-(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 \,.\, \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 \,.\, \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1)^2 = (\mathfrak{x}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{x}\mathfrak{c}_1) \,.\, (\mathfrak{x}_1\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{x}_1\mathfrak{a}_1) \,.\, (\mathfrak{x}_2\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{x}_2\mathfrak{b}_1).$$

Nun bedeutet aber das Produkt $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 \,.\, \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 \,.\, \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1)$ das Volumen unseres Parallelepipeds, welches wir kurz mit

$$v = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 \,.\, \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 \,.\, \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$$

bezeichnen wollen, und jedes der Produkte:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{x}\mathfrak{c}_1, \qquad \mathfrak{x}_1\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{x}_1\mathfrak{a}_1, \qquad \mathfrak{x}_2\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{x}_2\mathfrak{b}_1$$

bedeutet die Potenz des Punktes

$$\mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{x}_1, \qquad \mathfrak{x}_2$$

in Bezug auf die vorhin ermittelte dem Parallelepiped umschriebene Kugel, Potenzwerte, die wir kurz mit

$$P(\mathfrak{x}) \qquad P(\mathfrak{x}_1) \qquad P(\mathfrak{x}_2)$$

bezeichnen wollen, so dafs wir erhalten:

$$-v^2 = P(\mathfrak{x})\,P(\mathfrak{x}_1)\,P(\mathfrak{x}_2).$$

In gleicher Weise erhalten wir, wenn wir an Stelle der Geraden l' die Gerade l_1' oder l_2' setzen und die Schnittpunkte:

$$(gl_1') = \mathfrak{y} \qquad (g_1l_1') = \mathfrak{y}_1 \qquad (g_2l_1') = \mathfrak{y}_2$$
$$(gl_2') = \mathfrak{z} \qquad (g_1l_2') = \mathfrak{z}_1 \qquad (g_2l_2') = \mathfrak{z}_2$$

bezeichnen:

$$-v^2 = P(\mathfrak{y})\,P(\mathfrak{y}_1)\,P(\mathfrak{y}_2)$$
$$-v^2 = P(\mathfrak{z})\,P(\mathfrak{z}_1)\,P(\mathfrak{z}_2), \quad \text{also}$$
$$-v^6 = P(\mathfrak{x})\,P(\mathfrak{x}_1)\,P(\mathfrak{x}_2)\,P(\mathfrak{y})\,P(\mathfrak{y}_1)\,P(\mathfrak{y}_2)\,P(\mathfrak{z})\,P(\mathfrak{z}_1)\,P(\mathfrak{z}_2).$$

Wenn wir andererseits von der Gleichheit der Doppelverhältnisse ausgehen:

(II) $$l'(g'g_1'g_2'g) = l_1'(g'g_1'g_2'g) = l_2'(g'g_1'g_2'g)$$

und das Volumen des zweiten Parallelepipeds:

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{c}_1' \,.\, \mathfrak{b}'\mathfrak{a}_1' \,.\, \mathfrak{c}'\mathfrak{b}_1' = v'$$

bezeichnen, so erhalten wir in gleicher Weise:

$$\begin{aligned} -v'v' &= P(\mathfrak{x})\,P(\mathfrak{y})\,P(\mathfrak{z}) \\ &= P(\mathfrak{x}_1)\,P(\mathfrak{y}_1)\,P(\mathfrak{z}_1) \\ &= P(\mathfrak{x}_2)\,P(\mathfrak{y}_2)\,P(\mathfrak{z}_2)\,, \end{aligned}$$

und durch Vergleichung mit dem vorigen Resultat ergiebt sich der absolute Wert der Volumina v und v' als derselbe, also:

Die Volumina sämtlicher auf dem gleichseitigen Hyperboloid zu verzeichnenden rechtwinkligen Sechsseite (oder Parallelepipeda) haben denselben konstanten Wert.

Um diesen konstanten Wert zu ermitteln, gehen wir zurück zu der besonderen schon früher betrachteten Erzeugenden l^0 in der Berührungsebene in einem Endpunkte der c-Axe. Die beiden zu dieser und unter einander rechtwinkligen Erzeugenden g_1^0 und l_2^0 fanden wir oben durch ihren Schnittpunkt $\mathfrak{p}$, welcher der Endpunkt eines Halbmessers c_1 war in der Hyperbel $\mathfrak{H}_{ba}^{(2)}$. Ziehen wir durch $\mathfrak{p}$ eine Parallele k^0 zu l^0, so ist der Abstand dieser Parallelen l^0 und k^0 von einander eine Kante des besonderen Parallelepipeds, welches wir betrachten, der Abstand des Mittelpunktes $\mathfrak{M}$ von der Ebene $[g_1^0 l_2^0]$ die Hälfte einer zweiten Kante des Parallelepipeds und der Abstand des Mittelpunkts $\mathfrak{M}$ von der Ebene $[l^0 k^0]$ die Hälfte der dritten Kante desselben, endlich das Volumen des Parallelepipeds gleich dem Produkt aus diesen drei Kanten. Wir können aber diese drei Kanten leicht ausdrücken durch die Hauptaxen des Hyperboloids. Ziehen wir noch durch $\mathfrak{M}$ eine Parallele m^0 zu l^0, so ist der Abstand der Geraden m^0 und l^0 von einander $= c$, der Abstand der Geraden m^0 und k^0 von einander $= c_1 \cos(cc_1) = c$, folglich der Abstand der Geraden l^0 und k^0 von einander $= c \,.\, \sqrt{2}$ und der Abstand des Punktes $\mathfrak{M}$ von der Ebene

$[l^0 k^0] = \frac{c}{2}\sqrt{2}$, also sind zwei Kanten des Parallelepipeds einander gleich und jede gleich $c\sqrt{2}$; die dritte Kante ist der doppelte Abstand des Punktes $\mathfrak{M}$ von der Ebene $[g_1^0 l_2^0]$ und gleich $2 \,.\, c_1 \sin(cc_1) = 2\,\frac{ab}{c}$, folglich der Inhalt des Parallelepipeds:

$$= 4abc.$$

Dies ist also der Wert des konstanten Volumens aller auf dem gleichseitigen Hyperboloid zu verzeichnenden rechtwinkligen Parallelepipeda, deren jedes gewisse sechs Kanten, die ein zusammenhängendes räumliches Sechsseit bilden, hat, welche drei Paare paralleler Erzeugender aus den beiden Regelscharen sind.

§ 28. Beziehung des gleichseitigen Hyperboloids zum allgemeinen Tetraëder.

Haben wir ein allgemeines Tetraëder d. h. ein solches, dessen Ecken vier beliebige Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ sind, die nicht in einer Ebene liegen, so heifst die von jeder Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche herabgelassene Normale eine Höhe des Tetraëders; nennen wir die Seitenflächen des Tetraëders:

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = \alpha \quad [\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{A}] = \beta \quad [\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \gamma \quad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \delta$$

und den Fufspunkt des aus $\mathfrak{A}$ auf α herabgelassenen Perpendikels $\mathfrak{a}$, analog für die andern Ecken die Fufspunkte der Höhen:

$$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c} \quad \mathfrak{d},$$

so werden zwei Ebenen $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]$ und $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{c}]$ sich in einer Geraden l schneiden, welche offenbar den drei Höhen $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{c}|$ gleichzeitig begegnet, weil sie durch $\mathfrak{A}$ geht und mit jeder der beiden andern Höhen in einer Ebene liegt. Diese Gerade l trifft aber auch die vierte Höhe $\mathfrak{D}\mathfrak{d}$; denn da $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$ die Normale der Ebene β ist, so ist die Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]$ rechtwinklig zur Ebene $\beta = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$, und ebenso ist die Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{c}]$ rechtwinklig zur Ebene $\gamma = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}]$. Wir haben also von $\mathfrak{A}$ ausgehend drei Strahlen $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$ eines Dreikants und durch die Kante $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ eine Ebene normal zu der gegenüberliegenden

Fläche des Dreikants, durch die Kante $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ eine Ebene normal zu der gegenüberliegenden Fläche des Dreikants gelegt und der Schnittstrahl beider Ebenen ist l; nach einem auf S. 81 bewiesenen Satze mufs nun auch die dritte durch $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$ normal zur Fläche $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \delta$ gelegte Ebene durch l gehen; da aber die durch $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$ normal zur Fläche δ gelegte Ebene durch die Höhe $|\mathfrak{D}\mathfrak{d}|$ gehen mufs, so liegen l und $|\mathfrak{D}\mathfrak{d}|$ in einer Ebene, d. h. die Gerade l schneidet alle vier Höhen des Tetraëders. In ganz derselben Weise können wir anstatt von $\mathfrak{A}$ von jeder der drei übrigen Tetraëderecken ausgehen und demnach vier Gerade konstruieren, welche sämtlich allen vier Tetraëderhöhen gleichzeitig begegnen. Hieraus folgt nach S. 95 der schon dort in gleicher Weise bewiesene Satz:

Die vier Höhen eines Tetraëders sind Erzeugende einer Regelschar eines Hyperboloids oder *kürzer, haben hyperboloidische Lage.*

Legt man durch die Höhe $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$ eine Ebene ε parallel zur Höhe $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$, so wird diese Ebene rechtwinklig sein zur Ebene β, weil sie durch $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$ geht und auch rechtwinklig zur Ebene α, weil sie parallel $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ ist; folglich mufs die Ebene ε rechtwinklig stehen auf der Schnittlinie $|\alpha\beta|$, welche identisch ist mit $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$. Die Ebene ε geht also durch das aus $\mathfrak{B}$ auf $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ herabgelassene Perpendikel, d. h. durch eine Höhe des Dreiecks $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$. Legt man zweitens durch die Höhe $|\mathfrak{C}\mathfrak{c}|$ eine Ebene ε' parallel zur Höhe $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$, so wird diese aus gleichem Grunde durch das aus $\mathfrak{C}$ auf $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}|$ herabgelassene Perpendikel d. h. durch die zweite Höhe des Dreiecks $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ hindurchgehen. Die Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon'|$, welche parallel $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ ist und den Höhen $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{c}|$ begegnet, geht also durch den Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und ist die in diesem Punkte auf der Tetraëderfläche α errichtete Normale. Diese Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon'|$ ist offenbar eine Erzeugende der andern Regelschar des vorigen Hyperboloids, auf welchem die vier Tetraëderhöhen liegen. *Wir erhalten auf diese Weise die vier zu den Tetraëderhöhen parallelen Erzeugenden der andern Regelschar, wenn wir in den Höhenpunkten der Seitenflächen des Tetraëders auf diesen Normalen errichten.*

Betrachten wir die Durchschnittsfigur der Ebene α mi dem Hyperboloid der vier Höhen, so ist diese ein Kegel· schnitt, welcher nach dem Vorigen durch die Ecken des Drei· ecks $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und zugleich durch den Höhenpunkt desselben gehen mufs, folglich eine gleichseitige Hyperbel (Th. d. K S. 232), und da die Ebene derselben auf der Erzeugenden $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ rechtwinklig steht, so ist das Hyperboloid ein gleich· seitiges (S. 197) und wir haben das Resultat:

Die vier Höhen eines Tetraëders sind allemal vier Erzeugende derselben Regelschar eines gleich· seitigen Hyperboloids, und die in den Höhenpunk· ten der Seitenflächen auf diesen errichteten Nor· malen sind vier Erzeugende der andern Regelscha desselben.

Da wir hiernach vier Paare paralleler Erzeugender des Hyperboloids haben, so schneiden sich die durch diese ge· legten vier Ebenen im Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ des gleichseitigen Hyperboloids.

Bezeichnet man die vier Tetraëderhöhen:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{a}| = a \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}| = b \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{c}| = d \quad |\mathfrak{D}\mathfrak{d}| = d,$$

so bestimmen schon drei derselben das gleichseitige Hyper· boloid, auf welchem auch die vierte liegen mufs. Umgekehrt läfst sich auch erkennen, dafs, wenn drei Gerade Erzeugende eines gleichseitigen Hyperboloids sind, sie allemal auch als drei Höhen eines Tetraëders aufgefafst werden können.

In der That, seien $b\,c\,d$ drei beliebige derselben Regel· schar angehörige Erzeugende eines gleichseitigen Hyperboloids, und schneidet man dieselben durch eine beliebige zu d normale Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{b}] = \delta$, so ist die Schnittkurve derselben eine gleichseitige Hyper· bel. Schneidet die zu d parallele Erzeugende d_1 die Ebene δ in $\mathfrak{b}_1$, so

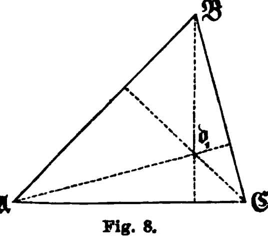


Fig. 8.

mufs der Höhenpunkt $\mathfrak{A}$ des Dreiecks $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{b}_1$ auf jener gleich· seitigen Hyperbel liegen (Fig. 6). Die durch $\mathfrak{A}$ gehende der Regelschar $b\,c\,d$ angehörende Erzeugende a des Hyperboloids mufs dann d_1 treffen, die Normale von δ, und ebenso treffen l

und c den Strahl d_1. Hieraus folgt, weil $\mathfrak{d}_1$ der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist, dafs die durch a und $|\mathfrak{A}\mathfrak{d}_1|$ gelegte Ebene Normalebene des Strahles $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ ist u. s. f. Es lassen sich also durch die Dreiecksseiten $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ drei Ebenen legen, die beziehungsweise rechtwinklig sind zu den drei Strahlen a b c. Diese drei Ebenen schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{D}$, und das Tetraëder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ hat nich allein die drei Höhen a b c, sondern auch als vierte Höhe d, denn sie mufs der Regelschar abc angehören und zu d_1 parallel sein, folglich identisch sein mit unserer obigen Erzeugenden d.

Drei beliebige Erzeugende eines gleichseitigen Hyperboloids, welche derselben Regelschar angehören, können also immer als Höhen eines Tetraëders aufgefafst werden. Dasselbe ist dadurch noch nicht vollständig bestimmt; wir können noch eine der drei auf diesen Höhen normalen Seitenflächen des Tetraëders oder einen Höhenfufspunkt beliebig wählen; wird dieser willkürlich angenommen, so ist das ganze Tetraëder vollständig bestimmt und wird, wie oben angegeben, konstruiert. Seien bcd die gegebenen Erzeugenden des gleichseitigen Hyperboloids, und verändern wir den Höhenfufspunkt $\mathfrak{d}$ auf d, so rückt die Ebene δ parallel mit sich fort, folglich verändern sich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ auf den Strahlen b und c und beschreiben projektivisch-ähnliche Punktreihen, deren Erzeugnis sehr bald untersucht werden soll (§ 29); da die unendlich-entfernte Gerade der Ebene δ unverändert bleibt, so trifft die Verbindungslinie $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ sämtliche Punkte derselben. Der Strahl d_1 ist durch d vollständig bestimmt; die Ebene $[\mathfrak{d}_1\mathfrak{A}a]$ bleibt beständig rechtwinklig auf $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$, nimmt also alle möglichen Stellungen um die feste Axe d_1 an, folglich wird die Gerade a sämtliche Erzeugenden der ersten Regelschar durchlaufen.

Die Frage: Unter welcher Bedingung erzeugen drei Gerade im Raume ein gleichseitiges Hyperboloid? ist hiernach identisch mit der anderen: Wann sind drei Gerade Höhen eines Tetraëders?

Sind b und c zwei beliebige windschiefe Gerade und $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Punkt im Raume, so können wir $\mathfrak{A}$ als Ecke eines Tetraëders wählen, für welches b und c Höhen sein sollen. Legen wir nämlich durch $\mathfrak{A}$ eine Ebene β normal

zu b und eine Ebene γ normal zu c, so schneider selben in einer Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$; schneidet ferner di den Strahl c in $\mathfrak{C}$ und die Ebene γ den Strahl b i sind $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ drei Ecken des Tetraëders und die vierte dem festen Strahle $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$. Die durch a und d_1 gele hat aber zur Normale $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$, folglich mufs der drit strahl a in derjenigen Ebene liegen, welche durch zu der bekannten Geraden $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ gelegt werden kann folgt:

Wenn zwei windschiefe Gerade $b\ c$ als eines Tetraëders und von einer dritten nur ein Punkt $\mathfrak{A}$ gegeben sind, so ist die G auf eine bestimmte Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ beschränkt, man erhält, indem man durch $\mathfrak{A}$ die Norm β zu b und die Normalebene γ zu c legt Schnittpunkte:

$$(\beta c) = \mathfrak{C} \quad (\gamma b) = \mathfrak{B}$$

mit $\mathfrak{A}$ durch eine Ebene verbindet.

Der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des gleichseitigen Hyperbol welchem die vier Höhen $a\ b\ c\ d$ des Tetraëders $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ läfst sich unmittelbar finden vermittelst der vier Erzeugenden $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$, welche in den Höhenpunkten der Seitenflächen $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ normal auf diesen stehen. wir nämlich zwei parallele Erzeugende des Hyperbo enthält diejenige in ihrer Ebene liegende Gerade, w ihnen parallel ist und gleich weit von beiden abs Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Hyperboloids.

Nehmen wir nun die Höhe $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ und den Höhen des Dreiecks $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, so wird in dem Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ der Mitte von $\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1$ auf $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ herabgelassene Perpen Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ enthalten. Nennen wir $\mathfrak{a}_2$ den Mi der Strecke $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|$ und denken uns durch $\mathfrak{a}_2$ eine Eben zur Ebene $\alpha = [\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ gelegt, so schneiden die drei Tetraëderflächen auf dieser Parallelebene ein Dreieck aus, dessen Ecken die Mitten der Kanten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$ sind, welches also ähnlich und ähnlich liegen dem Dreieck $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$; der Punkt $\mathfrak{a}_2$ ist daher Höhenp Dreiecks $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3$, ebenso wie $\mathfrak{a}_1$ der Höhenpunkt des $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ist.

Die Ebene $[\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3]$ ist parallel gelegt zur Ebene α und steht von ihr ebenso weit ab, wie die Ecke $\mathfrak{A}$; bezeichnen wir diese Ebene durch α' und denken uns die drei analogen Ebenen $\beta'\ \gamma'\ \delta'$ gelegt, welche parallel den Ebenen $\beta\ \gamma\ \delta$ laufen und die Höhen $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{D}\mathfrak{d}|$ halbieren, so bilden die vier Ebenen $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$ ein neues Tetraëder $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$, dessen Kanten parallel laufen den Kanten des alten Tetraëders, dieselben Mittelpunkte haben wie jene, während sich in jedem solchen Mittelpunkte je eine Kante des alten und die der Gegenkante parallele Kante des neuen Tetraëders halbieren (Fig. 9). Wir bezeichnen mit

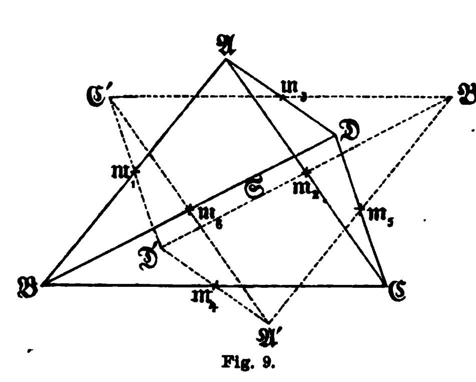


Fig. 9.

$\mathfrak{m}_1$	die Mitte	der	Kante	$\|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\|$	und	der	Kante	$\|\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\|$
$\mathfrak{m}_2$	„	„	„	$\|\mathfrak{A}\mathfrak{C}\|$	„	„	„	$\|\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'\|$
$\mathfrak{m}_3$	„	„	„	$\|\mathfrak{A}\mathfrak{D}\|$	„	„	„	$\|\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\|$
$\mathfrak{m}_4$	„	„	„	$\|\mathfrak{B}\mathfrak{C}\|$	„	„	„	$\|\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'\|$
$\mathfrak{m}_5$	„	„	„	$\|\mathfrak{C}\mathfrak{D}\|$	„	„	„	$\|\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\|$
$\mathfrak{m}_6$	„	„	„	$\|\mathfrak{B}\mathfrak{D}\|$	„	„	„	$\|\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\|$.

Da nun $\mathfrak{a}_2$ der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{m}_2\ \mathfrak{m}_3$ ist, und dieses zu Ecken die Mitten der Seiten des Dreiecks $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ hat, so ist bekanntlich $\mathfrak{a}_2$ der Mittelpunkt des dem Dreieck $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ umschriebenen Kreises, und das aus $\mathfrak{a}_2$ auf der Seitenfläche $\alpha' = [\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}']$ errichtete Perpendikel geht durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des gleichseitigen Hyperboloids. Dieses Perpendikel mufs aber auch durch den Mittelpunkt einer dem Tetraëder $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ umschriebenen Kugel gehen, und da dasselbe Raisonnement ebenso für die übrigen Tetraëderecken gilt, so erkennen wir, dafs der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des gleichseitigen Hyperboloids zusammenfällt mit dem Mittelpunkte der dem Tetraëder $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ umschriebenen Kugel.

Der Mittelpunkt dieser Kugel wird aber gefunden, indem man in den Mitten der Kanten Normalebenen zu denselben legt, also haben wir folgenden Satz:

*Wenn man in einem Tetraëder durch die Mitte jeder Kante eine Ebene normal zur Gegenkante legt, so schneiden sich diese sechs Ebenen in einem Punkte, dem Mittelpunkt des gleichseitigen Hyperboloids, auf welchem die vier Höhen des Tetraëders liegen.**)

Ebenso wie der Punkt $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt einer dem Tetraëder $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$ umschriebenen Kugel ist, giebt es einen analogen Punkt $\mathfrak{M}'$, welcher gleichzeitig der Mittelpunkt der dem Tetraëder $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ umschriebenen Kugel und der Mittelpunkt des gleichseitigen Hyperboloids sein mufs, auf welchem die vier Höhen des Tetraëders $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$ liegen. Die beiden Punkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ liegen symmetrisch in Bezug auf denjenigen Punkt $\mathfrak{S}$, in welchem sich die vier Verbindungslinien $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{C}'|$, $|\mathfrak{D}\mathfrak{D}'|$ entsprechender Ecken beider Tetraëder schneiden, d. h. der Punkt $\mathfrak{S}$ liegt mit $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ auf derselben Geraden und halbiert die Strecke $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'$. Dieser Punkt $\mathfrak{S}$ hat aber für beide Tetraëder eine sehr einfache Bedeutung; in ihm schneiden sich nämlich die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenkanten, also ist er der Schwerpunkt des Tetraëders. Wir haben demgemäfs den Satz:

In einem Tetraëder $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ liegen der Schwerpunkt $(\mathfrak{S})$, der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel $(\mathfrak{M}')$ und der Mittelpunkt $(\mathfrak{M})$ des gleichseitigen Hyperboloids, auf welchem die vier Höhen des Tetraëders liegen, auf einer geraden Linie, und zwar der erstere in der Mitte zwischen den beiden andern.

Der Zusammenhang, in welchem die beiden Tetraëder $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$ mit einander stehen, ist ein sehr einfacher; wir erkennen ihn, wenn wir durch jede der sechs Mitten $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{m}_2 \dots \mathfrak{m}_6$ diejenige Ebene legen, welche die beiden in dieser Mitte sich kreuzenden Kanten enthält, deren eine

---

*) Die betreffende Literatur siehe Baltzer: Elemente der Mathematik (1872). Fünftes Buch § 6. 8. 9.

dem einen, die andere dem andern Tetraëder angehört. Diese sechs Ebenen sind nämlich offenbar paarweise parallel und bilden ein schiefes Parallelepiped, als dessen acht Ecken die zweimal vier Ecken der beiden Tetraëder auftreten. Die Kanten der Tetraëder sind also die zweimal sechs Diagonalen in den Seitenflächen des Parallelepipeds.

Diese räumliche Figur läfst zugleich den bekannten Ausdruck für den Inhalt eines Tetraëders am einfachsten hervortreten; es sind nämlich:

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{C}'|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{B}'|, \quad |\mathfrak{D}'\mathfrak{A}|, \quad |\mathfrak{A}'\mathfrak{D}|$$

vier gleiche und gleichgerichtete Kanten des Parallelepipeds, folglich:

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{C}'|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{B}'|, \quad |\mathfrak{D}'\mathfrak{A}|$$

drei gleiche und gleich gerichtete Kanten eines dreiseitigen Prismas, dessen Inhalt halb so grofs ist, als der des Parallelepipeds. Folglich hat das Tetraëder $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'\mathfrak{A})$, welches gleiche Grundfläche und Höhe mit letzterem hat, einen Inhalt gleich dem sechsten Teile des Inhalts des Parallelepipeds.

Dieser Tetraëder $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}')$ hat aber halb so grofsen Inhalt als das ursprüngliche Tetraëder $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$, denn die Fläche $\mathfrak{d}'$ steht gleich weit ab von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{D}$, und die Fläche $\mathfrak{d}$ steht gleich weit ab von $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{D}'$, folglich wird die Verbindungslinie $|\mathfrak{D}\mathfrak{D}'|$ durch die Flächen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ in drei gleiche Teile geteilt, also ist $\mathfrak{D}'$ von $\mathfrak{d}$ halb so weit entfernt als $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{d}$.

Das Tetraëder $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ hat daher zum Inhalt den dritten Teil des Inhaltes vom Parallelepiped. Letzterer ist leicht auszudrücken durch Gröfse und Lage von einem Paar Gegenkanten des Tetraëders. Bezeichnet k den kürzesten Abstand der Gegenkanten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$, so wird demnach der Inhalt des Tetraëders:

$$= \tfrac{1}{6} k \, . \, |\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \, . \, |\mathfrak{C}\mathfrak{D}| \, . \sin\left(|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \; |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|\right),$$

denn k ist die Höhe, $\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ eine Seitenfläche des Parallelepipeds.

§ 29. Das hyperbolische Paraboloid.

Das einfache Hyperboloid artet in eigentümlicher Weise aus, wenn wir den bisher ausgeschlossenen Fall ins Auge fassen, nämlich, dafs sein Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ selbst im Unend-

lichen liegt oder, was dasselbe sagt, dafs die unendlich-entfernte Ebene ε^∞ ihren Pol selbst enthält. In diesem Falle mufs ε^∞ eine Berührungsebene sein, also dieses besondere Hyperboloid in einem reellen Linienpaar l^∞ und g^∞ schneiden, als deren gemeinschaftlicher Punkt der Mittelpunkt $\mathfrak{M}^\infty$ anzusehen ist.

In diesem Falle nennt man die geradlinige Fläche 2. O. ein **hyperbolisches Paraboloid**, als dessen charakteristische Eigenschaft die festzuhalten ist, dafs dasselbe zwei unendlich-entfernte Gerade l^∞ und g^∞ besitzt, deren Ebene ε^∞ eine Berührungsebene der Fläche ist.

Die beiden Regelscharen auf dem hyperbolischen Paraboloid nehmen hierbei einen einfachen Charakter an; da nämlich sämtliche g_x auf zwei Erzeugenden l und l_1 der andern Regelschar projektivische Punktreihen ausschneiden, und unter den g_x auch die besondere Erzeugende g^∞ vorkommt, so müssen die beiden projektivischen Punktreihen auf l und l_1 ähnlich sein (Th. d. K. § 19), und ebenfalls auf irgend zwei andern Erzeugenden sowohl dieser als auch der zweiten Regelschar. Zugleich gilt die Umkehrung:

Zwei projektivisch-ähnliche gerade Punktreihen, deren Träger sich nicht begegnen, erzeugen allemal ein hyperbolisches Paraboloid.

In der That, seien dieselben:

$$l(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{x} \ldots \mathfrak{p}^\infty \ldots) \quad \text{und} \quad l_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{p}_1^\infty \ldots),$$

so müssen die unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{p}^\infty$ und $\mathfrak{p}_1^\infty$ entsprechende sein, also ist $|\mathfrak{p}^\infty\mathfrak{p}_1^\infty| = g^\infty$ eine Erzeugende, die ganz in ε^∞ liegt. Nehmen wir nun zwei beliebige Erzeugende:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1| = g \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1| = g_1$$

und verbinden deren unendlich-entfernten Punkte, so wird die Verbindungslinie ganz in ε^∞ liegen und daher auch der Erzeugenden g^∞ begegnen müssen. Bezeichnen wir diese Gerade, welche die unendlich-entfernten Punkte von g und g_1 verbindet, durch l^∞, so sehen wir, dafs l^∞ den drei Erzeugenden $g\ g_1\ g^\infty$ gleichzeitig begegnet, also ganz der Regelschar l_x angehören mufs, mithin alle Verbindungslinien $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1| = g_x$ trifft oder deren unendlich-entfernten Punkte enthält. Wir haben mithin folgendes Ergebnis:

Jede der beiden Regelscharen eines hyperbolischen Paraboloids besitzt eine ganz im Unendlichen liegende Erzeugende (l^∞ und g^∞), so dafs die unendlich-entfernten Punkte aller Erzeugenden g_x auf l^∞ und die unendlich-entfernten Punkte aller Erzeugenden l_x auf g^∞ liegen. Oder: Die unendlich-entfernte Ebene ε^∞ ist Berührungsebene des hyperbolischen Paraboloids und schneidet dasselbe in zwei reellen Geraden.

Dies läfst sich auch so aussprechen:

Beim hyperbolischen Paraboloid laufen sämtliche Erzeugende der einen Regelschar beständig einer festen Ebene parallel (treffen l^∞) und ebenso sämtliche Erzeugende der andern Regelschar einer zweiten festen Ebene (treffen g^∞).

Es folgt hieraus: dafs auf einem hyperbolischen Paraboloid keine zwei parallele gerade Linien vorkommen können (die im Endlichen verlaufen); denn wären irgend zwei Erzeugende aus den beiden Regelscharen l und g_1 einander parallel, so müfste, weil durch den unendlich-entfernten Punkt von l die bestimmte Gerade g^∞ geht, g_1 die g^∞ treffen, was unmöglich ist, weil sich nie zwei Erzeugende aus derselben Regelschar begegnen können. Andererseits können wir in gewissem Sinne sagen, dafs sämtliche l mit g^∞ und sämtliche g mit l^∞ parallel sind.

Während das hyperbolische Paraboloid, wie wir gesehen haben, nur durch zwei projektivisch-ähnliche (oder insbesondere gleiche) gerade Punktreihen erzeugt werden kann, läfst es sich andererseits durch zwei beliebige Ebenenbüschel erzeugen, die nur besondere Stellung zu einander haben müssen; sie müssen nämlich so liegen, dafs durch ihre Axen l und l_1 einmal ein Paar entsprechende parallele Ebenen gehen, d. h. dafs dasjenige Ebenenpaar der beiden projektivischen Büschel, welches auf dem kürzesten Abstand ihrer Axen normal steht, ein Paar entsprechender Ebenen ist; dann ist nämlich g^∞ eine Erzeugende und sämtliche unendlich-entfernten Punkte von $g\, g_1\, g_2 \ldots$ liegen auf l^∞, folglich degeneriert das Hyperboloid in ein hyperbolisches Paraboloid.

Wir können das hyperbolische Paraboloid auch dadurch erzeugen, dafs wir eine Axe der beiden projektivischen Ebenen-

büschel ganz in die Unendlichkeit verlegen, nach l^∞, so dafs das eine Ebenenbüschel ein Büschel von Parallelebenen wird; weil dies Erzeugnis l^∞ enthält, so ist es ein hyperbolisches Paraboloid.

Oder wir können das hyperbolische Paraboloid als das Erzeugnis zweier projektivischer Punktreihen:

$$l(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots) \quad \text{und} \quad l^\infty(\mathfrak{a}^\infty\mathfrak{b}^\infty\mathfrak{c}^\infty\ldots\mathfrak{x}^\infty)$$

erhalten, von denen der Träger der einen die ganz im Unendlichen liegende Gerade l^∞ ist; diese tritt unserer Anschauung näher, wenn wir einen im endlichen Raume liegenden Punkt $\mathfrak{O}$ mit der Punktreihe $(\mathfrak{a}^\infty\mathfrak{b}^\infty\mathfrak{c}^\infty\ldots\mathfrak{x}^\infty\ldots)$ durch ein ebenes Strahlenbüschel verbinden und auf der Ebene $[\mathfrak{O}l^\infty]$ desselben in $\mathfrak{O}$ die Normale errichten. Durch diese Normale a gehen sämtliche Normalebenen, welche wir in $\mathfrak{O}$ auf den Strahlen $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}^\infty|$ errichten, und wir erhalten dadurch ein Ebenenbüschel mit der Axe a, welches projektivisch-gleich ist mit dem Strahlenbüschel $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{a}^\infty\mathfrak{b}^\infty\mathfrak{c}^\infty\ldots\mathfrak{x}^\infty\ldots|$; die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}^\infty|$ erscheint dann als das Perpendikel, welches aus dem Punkte $\mathfrak{x}$ auf die entsprechende Ebene $\mathfrak{x}$ des Ebenenbüschels $a[\mathfrak{x}]$ herabgelassen ist und wir erhalten folgende Erzeugung des hyperbolischen Paraboloids:

Wenn eine gerade Punktreihe $l(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots)$ und ein mit derselben projektivisches Ebenenbüschel $a[\alpha\beta\gamma\ldots\mathfrak{x}\ldots]$ gegeben sind, und man von jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Punktreihe auf die entsprechende Ebene $\mathfrak{x}$ des Ebenenbüschels ein Perpendikel fällt, so bilden diese sämtlichen Geraden eine Regelschar eines hyperbolischen Paraboloids.

Die beiden ausgezeichneten Geraden l^∞ und g^∞ sind auch aufzufassen als ein Linienpaar, in welches der Asymptotenkegel des allgemeinen Hyperboloids degeneriert.

Von besonderem Interesse ist für uns der unendlich-entfernte Punkt $\mathfrak{P}^\infty$ des hyperbolischen Paraboloids, in welchem sich die beiden Geraden l^∞ und g^∞ begegnen, d. h. der Berührungspunkt der Ebene ε^∞. Wir nennen die ausgezeichnete nach demselben hingehende Richtung die Axenrichtung des hyperbolischen Paraboloids und erkennen unmittelbar ihre charakteristische Eigenschaft:

Jede Ebene parallel zur Axenrichtung des hyperbolischen Paraboloids schneidet dasselbe in einer Parabel, jede andere Ebene in einer Hyperbel; Ellipsen können aus dem hyperbolischen Paraboloid niemals geschnitten werden.

Zu dem ausgezeichneten Punkte $\mathfrak{P}^\infty$ oder der durch ihn bestimmten Axenrichtung giebt es eine rechtwinklig stehende Ebene, deren Stellung einzig ist, d. h. alle Ebenen, die rechtwinklig zur Axenrichtung stehen, schneiden die unendlich-entfernte Ebene ε^∞ in einer bestimmten Geraden s^∞, und diese begegnet wiederum den beiden vorhin ermittelten Geraden l^∞ und g^∞ in zwei bestimmten ausgezeichneten Punkten:

$$(s^\infty, g^\infty) = \mathfrak{Q}^\infty \quad (s^\infty, l^\infty) = \mathfrak{R}^\infty.$$

Durch den Punkt $\mathfrak{Q}^\infty$ geht nur eine einzige bestimmte Erzeugende der Regelschar l_x, wir bezeichnen dieselbe mit l^0; und durch $\mathfrak{R}^\infty$ geht nur eine einzige bestimmte Erzeugende der Regelschar g_x, wir bezeichnen dieselbe mit g^0; l^0 und g^0 selbst müssen sich, da sie verschiedenen Regelscharen angehören, in einem endlichen Punkte $\mathfrak{S}$ treffen; wir nennen denselben den Scheitel des hyperbolischen Paraboloids; die Berührungsebene in dem Scheitel des Paraboloids ist $[g^0 l^0]$ und, da sie durch s^∞ geht, der Konstruktion nach rechtwinklig auf der Axenrichtung.

Wir haben ein windschiefes Vierseit auf dem hyperbolischen Paraboloid, gebildet von den vier ausgezeichneten Erzeugenden:

$$l^0 \quad g^0 \quad l^\infty \quad g^\infty$$

mit den vier Ecken:

$$(l^\infty g^\infty) = \mathfrak{P}^\infty \quad (g^\infty l^0) = \mathfrak{Q}^\infty \quad (l^\infty g^0) = \mathfrak{R}^\infty \quad (g^0 l^0) = \mathfrak{S}.$$

Die Gerade $|\mathfrak{S}\mathfrak{P}^\infty|$ hat zu ihrer konjugierten Geraden die Gerade $|\mathfrak{Q}^\infty \mathfrak{R}^\infty|$, d. h. die unendlich-entfernte Gerade derjenigen Ebene, welche auf der Richtung von $|\mathfrak{S}\mathfrak{P}^\infty|$ rechtwinklig steht.

Die Ebene $[l^0 g^0] = \tau^0$ ist die Berührungsebene am Scheitel $\mathfrak{S}$ des Paraboloids; die auf derselben normal stehende Gerade $|\mathfrak{S}\mathfrak{P}^\infty|$ heiſse die c-Axe desselben. Legen wir die beiden Ebenen durch $|cl^0|$ und $|cg^0|$ und halbieren die von ihnen gebildeten Winkel und Nebenwinkel durch zwei neue Ebenen,

so schneiden dieselben die Ebene ε^∞ in zwei Geraden b^∞ und a^∞, welche als die beiden übrigen Hauptaxen des Paraboloids aufzufassen sind. Von den drei Hauptaxen:

$$a^\infty \quad b^\infty \quad c$$

sind also zwei ganz im Unendlichen gelegen, die dritte (c) hat nur einen unendlich-entfernten Punkt $\mathfrak{P}^\infty$; von den drei Hauptebenen:

$$[ca^\infty] \quad [cb^\infty] \quad [a^\infty b^\infty]$$

ist eine die unendlich-entfernte Ebene $\varepsilon^\infty = [a^\infty b^\infty]$, die beiden andern haben jede nur eine unendlich-entfernte Gerade. Die Durchschnittskurven dieser beiden Hauptebenen mit dem hyperbolischen Paraboloid sind offenbar zwei Parabeln:

$$\mathfrak{P}^{(2)}_{cb^\infty} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}^{(2)}_{ca^\infty},$$

welche in den beiden zu einander rechtwinkligen, Winkel und Nebenwinkel zwischen den Ebenen $[cl^0]$ und $[cg^0]$ halbierenden Ebenen liegen, und sowohl den gemeinschaftlichen Scheitel $\mathfrak{S}$, als auch die gemeinschaftliche Axe c haben; aber ihre Oeffnungen liegen nach entgegengesetzten Richtungen der c-Axe hin. Dies erkennen wir leicht, wenn wir auf l^0 einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ laufen lassen und diejenige Erzeugende g_x der andern Regelschar verfolgen, welche durch $\mathfrak{x}$ geht. Diese Erzeugende g_x hat ihren unendlich-entfernten Punkt, wie wir wissen, auf l^∞; sie begegnet den beiden Hauptebenen $[cb^\infty]$ und $[ca^\infty]$ in zwei Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ und geht durch den Punkt $\mathfrak{x}$ der Geraden l^0; die vier Ebenen:

$$c\,[a^\infty b^\infty l^0 g^0]$$

sind aber vier harmonische Ebenen, weil das erste Ebenenpaar Winkel und Nebenwinkel des andern Ebenenpaars halbiert; die vier Durchschnittspunkte dieser Ebenen mit g_x sind daher vier harmonische Punkte und, da der Durchschnittspunkt von g_x mit der Ebene $[cg^0] = [g^0 l^\infty]$ im Unendlichen liegt, so mufs der Punkt $\mathfrak{x}$ in der Mitte zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegen. Wir haben daher folgenden Satz:

Eine beliebige Erzeugende g_x der einen Regelschar trifft die beiden Parabeln in den Hauptebenen des hyperbolischen Paraboloids allemal in zwei Punkten, deren Mitte in der Ebene τ liegt,

d. h. in der Berührungsebene am Scheitel des Paraboloids und zwar auf der Geraden l^0 dieser Ebene, während eine beliebige Erzeugende l_x der andern Regelschar den beiden Parabeln in den Hauptebenen in zwei Punkten begegnet, deren Mitte ebenfalls in der Ebene τ liegt, aber auf der Geraden g^0.

Hieraus folgt nun mit Evidenz, dafs die Parabeln $\mathfrak{P}^{(2)}_{ca^\infty}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}_{cb^\infty}$ ihre Öffnungen nach entgegengesetzten Seiten der c-Axe hin haben.

Wenn wir um die Hauptaxe c des hyperbolischen Paraboloids eine veränderliche Ebene drehen und die Durchschnittskurve derselben mit dem Hyperboloid verfolgen, so erkennen wir, dafs die sämtlichen Durchschnittskurven Parabeln sind, welche in zwei Gruppen zerfallen; die eine Gruppe von Parabeln hat ihre Öffnung nach der einen Richtung der c-Axe, die andere Gruppe nach der entgegengesetzten Richtung. Die beiden Gruppen werden von einander getrennt durch zwei specielle Parabeln, welche in die Linienpaare:

$$|l^0 g^\infty| \quad \text{und} \quad |g^0 l^\infty|$$

zerfallen und in den Ebenen $[cl^0]$ und $[cg^0]$ liegen.

Denken wir uns eine zweite Bewegung ausgeführt, indem wir eine zur c-Axe rechtwinklig gestellte Ebene parallel mit sich verschieben, und verfolgen wir die Durchschnittskurve dieser Ebene mit dem Hyperboloid, so erkennen wir, dafs dieselbe allemal eine Hyperbel sein wird, deren Mittelpunkt auf der c-Axe fortrückt, und deren Asymptoten beständig den festen Geraden l^0 und g^0 parallel bleiben; diese Hyperbeln zerfallen aber wieder in zwei Gruppen, welche durch die beiden Linienpaare:

$$l^0 g^0 \quad \text{und} \quad l^\infty g^\infty$$

von einander getrennt werden; die eine Gruppe von Hyperbeln liegt allemal in einem und demselben Paare von Scheitelräumen zwischen den Richtungen von l^0 und g^0, die andere Gruppe in den Nebenscheitelräumen, also sind die Durchschnittskurven für zwei gleich weit vom Scheitel des Paraboloids abstehende Ebenen immer konjugierte Hyperbeln,

weil ihre reellen Axen konjugierte Strahlen in Bezug auf das Paraboloid sind.

Durch die beiden Parabeln $\mathfrak{P}^{(2)}_{cb^\infty}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}_{ca^\infty}$ in den Hauptebenen ist das hyperbolische Paraboloid vollständig bestimmt, denn wir können in jeder zur c-Axe rechtwinklig gestellten Ebene die Durchschnittshyperbel konstruieren, von welcher wir den Mittelpunkt (Durchschnittspunkt mit der c-Axe) und die beiden Hauptaxen (Durchschnittslinien mit der $[cb^\infty]$- und $[ca^\infty]$-Hauptebene) mit den ihnen zugehörigen hyperbolischen und elliptischen Punktinvolutionen kennen vermittelst der gegebenen Parabeln.

Da irgend zwei Erzeugende der einen Regelschar des hyperbolischen Paraboloids von sämtlichen Erzeugenden der andern Regelschar allemal in zwei projektivisch-ähnlichen Punktreihen geschnitten werden, so entsteht insbesondere die Frage, ob es auch solche Paare von Erzeugenden giebt, welche die Träger projektivisch-gleicher Punktreihen werden, oder, was dasselbe ist, ob jedes hyperbolische Paraboloid auch durch zwei gleiche Punktreihen erzeugt werden kann?

Legt man das Ebenenbüschel:

$$l^\infty[gg_1g_2\dots g_x\dots],$$

welches ein Büschel von Parallelebenen ist, so wird dasselbe zwei solche Erzeugende l und l' in gleichen Punktreihen schneiden, welche gleich geneigt sind gegen die Stellung der Ebene $[l^\infty g_x]$. Sollen nun zwei Erzeugende l und l' gleich geneigt sein zur Ebene $[l^\infty g^0]$, so müssen die unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{x}^\infty$ und $\mathfrak{x}'^\infty$ von l und l' verbunden eine unendlich-entfernte Gerade geben, welche der unendlich-entfernten Geraden der Ebene $[l^\infty g^0]$ in einem Punkte begegnet, dessen Richtung gleich geneigt ist gegen die Richtungen der Punkte $\mathfrak{x}^\infty$ und $\mathfrak{x}'^\infty$. Diese beiden Punkte liegen aber auf g^∞, und die Geraden l^∞ und g^∞ treffen sich in $\mathfrak{P}^\infty$; folglich muſs die Richtung nach $\mathfrak{P}^\infty$ gleich geneigt sein zu den Richtungen nach $\mathfrak{x}^\infty$ und $\mathfrak{x}'^\infty$, oder da die Richtung nach $\mathfrak{P}^\infty$ rechtwinklig ist zu der Richtung nach $\mathfrak{Q}^\infty$, so müssen die vier Punkte auf g^∞

$$\mathfrak{P}^\infty\mathfrak{Q}^\infty\mathfrak{x}^\infty\mathfrak{x}'^\infty$$

harmonisch gelegen sein, d. h.: Wenn wir in der durch die Hauptaxe c des Paraboloids gelegten Ebene $[l^0 g^\infty]$ vom Scheitel $\mathfrak{S}$ aus zwei Strahlen ziehen, die zu l^0 gleich geneigt sind, so bestimmen dieselben die gesuchten Punkte $\mathfrak{x}^\infty$ und $\mathfrak{x}'^\infty$ auf g^∞, so dafs die beiden durch $\mathfrak{x}^\infty$ und $\mathfrak{x}'^\infty$ gehenden Erzeugenden l und l' der andern Regelschar in projektivisch-gleichen Punktreihen von sämtlichen Erzeugenden g_x geschnitten werden. Es giebt daher unendlich viele Paare l und l' von der verlangten Art und in gleicher Weise unendlich viele Paare g und g', welche von sämtlichen Erzeugenden l_x in zwei projektivisch gleichen Punktreihen geschnitten werden. Die Paare l und l' treffen g^∞ in einer gleichseitig-hyperbolischen Punktinvolution, deren Doppelpunkte $\mathfrak{P}^\infty$ und $\mathfrak{Q}^\infty$ sind, und die Paare g und g' treffen l^∞ in einer gleichseitig-hyperbolischen Punktinvolution, deren Doppelpunkte $\mathfrak{P}^\infty$ und $\mathfrak{R}^\infty$ sind. Wir haben also folgendes Ergebnis der Untersuchung:

Ein hyperbolisches Paraboloid kann auf zweifach unendlich-viele Arten als das Erzeugnis zweier projektivisch-gleichen Punktreihen aufgefafst werden.

§ 30. Das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wenn die beiden Geraden l^∞ und g^∞ des hyperbolischen Paraboloids rechtwinklig zu einander sind; wir nennen es dann ein gleichseitiges; jede zu der Hauptaxe c normale Ebene schneidet dasselbe in einer gleichseitigen Hyperbel, und da zwei solche von dem Scheitel $\mathfrak{S}$ des Paraboloids nach entgegengesetzten Seiten hin gleich weit abstehende Ebenen dasselbe immer in konjugierten Hyperbeln schneiden (S. 216), zwei konjugierte gleichseitige Hyperbeln aber einander kongruent sind, so folgt, dafs die in den beiden zu einander rechtwinkligen Hauptebenen $[cb^\infty]$ und $[ca^\infty]$ liegenden Parabeln:

$$\mathfrak{P}^{(2)}_{cb^\infty} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}^{(2)}_{ca^\infty}$$

beim gleichseitigen Paraboloid einander gleich werden.

Zwei projektivische gerade Punktreihen l und l_1, die ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid erzeugen sollen,

sind außer der Bedingung, daß sie projektivisch-ähnlich sein müssen, noch einer zweiten Bedingung unterworfen. Seien nämlich $\mathfrak{p}^\infty$ und $\mathfrak{p}_1^\infty$ ihre unendlich-entfernten Punkte, welche auf g^∞ liegen, so schneiden sich die beiden Ebenen

$$[l\mathfrak{p}_1^\infty] \quad \text{und} \quad [l_1\mathfrak{p}^\infty]$$

in g^∞. Zu der Stellung dieser beiden Ebenen giebt es eine bestimmte rechtwinklige Richtung, deren unendlich-entfernter Punkt $\mathfrak{R}^\infty$ sei; da nun l^∞ auf g^∞ rechtwinklig steht beim gleichseitigen Paraboloid, so muß l^∞ durch $\mathfrak{R}^\infty$ gehen. Die Richtung von $\mathfrak{R}^\infty$ finden wir aber, indem wir durch l und l_1 zwei Ebenen legen, die auf den vorigen Ebenen:

$$[l\mathfrak{p}_1^\infty] \quad \text{und} \quad [l_1\mathfrak{p}^\infty]$$

rechtwinklig stehen, und diese beiden neuen Ebenen schneiden sich in einer Geraden, welche den Erzeugenden $l l_1 l^\infty$ in den Punkten $\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{R}^\infty$ begegnet. Diese Gerade muß, weil sie den drei Erzeugenden $l\; l_1\; l^\infty$ gleichzeitig begegnet, eine Erzeugende der Regelschar g_x sein; sie ist aber zugleich, der Konstruktion zufolge, diejenige Gerade $|\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_1|$, welche den kürzesten Abstand der Träger $l l_1$ enthält; wir sehen also:

Wenn zwei projektivische gerade Punktreihen ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid erzeugen sollen, so müssen nicht nur ihre unendlich-entfernten Punkte sich entsprechen, sondern auch diejenigen beiden Punkte, welche den kürzesten Abstand von einander haben, müssen entsprechende sein.

Dies läßt sich auch so aussprechen:

Sind l und l_1 irgend zwei Erzeugende der einen Regelschar eines gleichseitig-hyperbolischen Paraboloids, so ist diejenige Gerade, welche den kürzesten Abstand zwischen l und l_1 enthält (d. h. auf beiden normal steht) eine Erzeugende der andern Regelschar.

Wir können das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid auch auf folgende Weise konstruieren:

Wenn zwei windschiefe Gerade (l und l_1) im Raume gegeben sind, und man fällt aus jedem Punkte der einen (l) das Perpendikel auf die andere (l_1), so bilden sämtliche Perpendikel eine

Regelschar eines gleichseitig-hyperbolischen Paraboloids.

Denn legen wir die Normalebene zu l_1, so schneidet dieselbe die unendlich-entfernte Ebene ε^∞ in einer Geraden l^∞, und die vorigen Perpendikel sind nichts anderes, als die Strahlen, welche gleichzeitig den drei Geraden $l_1\, l\, l^\infty$ begegnen, bilden also eine Regelschar eines hyperbolischen Paraboloids, und dafs dasselbe ein gleichseitiges sein mufs, erhellt aus folgender Bemerkung: Sind $\mathfrak{p}^\infty$ und $\mathfrak{p}_1^\infty$ die unendlich-entfernten Punkte der Träger l und l_1, so gehört die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}^\infty \mathfrak{p}_1^\infty| = g^\infty$ dem hyperbolischen Paraboloid an, und da die Richtung von $\mathfrak{p}_1^\infty$ normal ist zu der Stellung jeder durch l^∞ gehenden Ebene, so mufs auch die durch $\mathfrak{p}_1^\infty$ gehende Gerade g^∞ zu l^∞ rechtwinklig sein; folglich ist das Paraboloid ein gleichseitig-hyperbolisches.

Eine andere Konstruktion des gleichseitig-hyperbolischen Paraboloids ist folgende:

Wenn man zwei windschiefe Gerade (l und l_1) durch ein Büschel paralleler Ebenen schneidet, deren Stellung zu einer derselben (l) normal ist, so erhält man auf *ihnen* zwei projektivische Punktreihen, deren Erzeugnis ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid ist. Denn die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser beiden projektivischen Punktreihen sind nichts anderes, als die aus den Punkten von l_1 auf die Gerade l herabgelassenen Perpendikel.

Das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid ist als eine Ausartung zu betrachten, sowohl des orthogonalen, als auch des gleichseitigen Hyperboloids (S. 174, S. 195), denn es vereinigt in sich die charakteristischen Eigenschaften beider Flächen auf besondere Weise. Da die beiden Geraden l^0 und g^0 in der Berührungsebene am Scheitel $\mathfrak{S}$ des gleichseitig-hyperbolischen Paraboloids zu einander rechtwinklige Erzeugende sind, so ist die Ebene $[g^0 l^\infty]$ normal zu der Erzeugenden l^0; diese Ebene $[g^0 l^\infty]$ schneidet aber das Paraboloid in einem Linienpaare, welches als specieller Fall eines Kreises zu betrachten ist, weil dasselbe die unendlich-entfernten imaginären Kreispunkte auf l^∞ enthält. Dies war die charakteristische Eigenschaft des orthogonalen Hyper-

boloids. Andererseits sind aber auch die Erzeugenden $l^0\, g^0\, l^\infty$ als drei unter einander rechtwinklige Erzeugende aufzufassen; dies war die charakteristische Eigenschaft des gleichseitigen Hyperboloids.

Untersuchen wir das Paraboloid zunächst rücksichtlich der ersten Eigenschaft. Seien die Brennpunkte der beiden gleichen Parabeln:

$$\mathfrak{P}^{(2)}_{cb^\infty} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}^{(2)}_{ca^\infty}$$

in den beiden zu einander rechtwinkligen Hauptebenen die Punkte:

$$\mathfrak{f} \quad \text{und} \quad \mathfrak{f}_1,$$

welche in der c-Axe gleich weit von dem gemeinschaftlichen Scheitel $\mathfrak{S}$ abstehen, und nennen wir den Abstand:

$$\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1 = 2\lambda;$$

nehmen wir sodann zwei beliebige Punkte $\mathfrak{p}\;\mathfrak{p}_1$ auf der c-Axe, die auch nach entgegengesetzten Seiten hin von $\mathfrak{S}$ gleich weit abstehen, aber so, daſs die Strecke $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 = 2d$ ganz innerhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1$ liegt, also $d < \lambda$ ist; denken wir uns durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ zwei Ebenen normal zur c-Axe des Paraboloids gelegt, so werden dieselben in zwei (ihrer Stellung nach) konjugierten gleichseitigen Hyperbeln das Paraboloid durchschneiden; die reelle Axe jeder dieser beiden gleichen Hyperbeln ist offenbar $< 2\lambda$; wir können also von $\mathfrak{p}$ aus einen reellen Halbmesser dieser Hyperbel ziehen, der $= 2\lambda$ ist (in doppelter Weise) und ebenso von $\mathfrak{p}_1$ aus in der andern Hyperbel; ergänzen wir noch die zu diesen Halbmessern konjugierten Halbmesser, welche bez. ihnen parallel sind, in jeder der beiden Hyperbeln und bezeichnen ihre Strahlen durch

$$s \quad \text{und} \quad s_1,$$

so sind diese Träger elliptischer Punktinvolutionen mit den Mittelpunkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ und den Potenzwerten $-4\lambda^2$; die konjugierten Strahlen s und s_1 bilden einen Winkel w mit einander, der bestimmt wird durch die Gleichung:

$$\lambda \,.\, \sin w = d$$

(weil wegen der konstanten Potenz der Hyberbel $4\lambda^2 . \sin w = 4\lambda d$, gleich dem Quadrate der reellen Halbaxe der Hyperbel ist).

Hieraus folgt, da $\sin w < 1$ sein mufs, die vorausgesetzte Bedingung $d < \lambda$.

Ein solches eben gefundenes Paar von konjugierten Strahlen ss_1, für welches die Gerade, die ihren kürzesten Abstand enthält (auf beiden rechtwinklig steht), die Mittelpunkte der zugehörigen elliptischen Punktinvolutionen bestimmt, während die Potenzen derselben den Wert haben $-\frac{4d^2}{\sin^2 w}$, ist, wie unmittelbar ersichtlich und auf S. 175 ausgeführt worden ist, von der besonderen Beschaffenheit, dafs jede die Axe einer zugehörigen orthogonalen Ebeneninvolution wird, und hat zugleich, wie auf S. 190 ff. gezeigt ist, die andere Eigenschaft, dafs das Verhältnis der Abstände irgend eines Punktes der Fläche von den Strahlen s und s_1 unverändert bleibt; der Wert dieses konstanten Verhältnisses (μ) ist in diesem besonderen Falle $= 1$, weil insbesondere der Punkt $\mathfrak{S}$ von s und s_1 gleich weit absteht.

Wir gelangen daher durch Umkehrung dieses Resultats zu folgendem Satze:

Der Ort eines Punktes, welcher von zwei windschiefen Geraden $s\ s_1$ im Raume gleich weit absteht, ist ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid, dessen Hauptaxe (c) diejenige Gerade ist, welche auf beiden gegebenen gleichzeitig normal steht oder den kürzesten Abstand derselben enthält; die Mitte dieses kürzesten Abstandes ist der Scheitel des Paraboloids, die durch denselben parallel zu s und s_1 gelegte Ebene die Berührungsebene am Scheitel. Legt man durch die Gerade, welche den kürzesten Abstand zwischen $s\ s_1$ enthält, und durch jede von beiden, s und s_1, je eine Ebene, halbiert Winkel und Nebenwinkel zwischen diesen Ebenen durch zwei neue zu einander rechtwinklige Ebenen, so schneiden dieselben die Berührungsebene am Scheitel $\mathfrak{S}$ in zwei Geraden l^0 und g^0, die unendlich-entfernte Ebene ε^∞ in zwei Geraden g^∞ und l^∞; dies sind vier Erzeugende des gleichseitig-hyperbolischen Paraboloids. Um das ganze Paraboloid zu erhalten, kann man nach dem Obigen so verfahren, dafs man von den Fufspunkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ des kürzesten Abstandes $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 = 2d$ Paral-

lele zu s und s_1 zieht und auf jeder derselben nach beiden Seiten hin von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ aus ein Stück abträgt $= \frac{2d}{\sin w}$; die Endpunkte der abgetragenen Stücke seien $\mathfrak{q}\, \mathfrak{q}'\, \mathfrak{q}_1\, \mathfrak{q}_1'$, d. h. da $2d = \mathfrak{p}\mathfrak{q} \, . \sin w$ ist, wo w den Winkel (ss_1) bedeutet, so wird man auf s von $\mathfrak{p}$ aus das Stück $2d$ abzutragen und in dem Endpunkte des abgetragenen Stücks ein Perpendikel auf s zu errichten haben, welches der durch $\mathfrak{p}$ zu s_1 parallel gezogenen Geraden in $\mathfrak{q}$ begegnet. Ist ein solcher Punkt $\mathfrak{q}$ ermittelt, so ziehe man durch $\mathfrak{q}$ diejenige einzige Gerade l', welche g^0 und g^∞ trifft, und lege die ganze Regelschar g_x, welche $l^0\, l'\, l^\infty$ gleichzeitig trifft.

Die Geraden $s\, s_1$ sind ein Paar konjugierter Strahlen mit zugehörigen orthogonalen Ebeneninvolutionen für das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid. Ist dieses gegeben, so läſst sich ein solches ausgezeichnetes Strahlenpaar $s\, s_1$ nach der obigen Konstruktion in zweifach unendlicher Mannigfaltigkeit ermitteln, indem man das Punktepaar $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{S}$ aus bis nach $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1$ heranrücken läſst und die Richtungen von s und s_1 durch den Halbmesser $2\lambda = \frac{2d}{\sin w}$ auf doppelte Weise herstellen kann.

Untersuchen wir jetzt an zweiter Stelle das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid als Ausartung eines gleichseitigen Hyperboloids. Da jede Erzeugende g_x der einen Regelschar die Geraden l^0 und l^∞ schneidet, also der Ebene $[g^0 l^\infty]$ parallel ist, und diese Ebene auf l^0 normal steht, so ist jede Erzeugende g_x normal gerichtet gegen l^0 und jede Erzeugende l_x normal gerichtet gegen g^0; unter den sämtlichen Erzeugenden g_x können wir unendlich viele Paare rechtwinkliger auffinden, denn durch jeden Punkt von l^∞ geht nur eine bestimmte g_x; wenn wir uns also auf l^∞ diejenige elliptische Punktinvolution $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ denken, deren imaginäre Doppelpunkte die imaginären Kreispunkte auf l^∞ sind, so gehen durch zwei konjugierte Punkte derselben allemal zwei Erzeugende $g_\mathfrak{x}$ und $g_\mathfrak{y}$, die rechtwinklig zu einander gerichtet sind; sie begegnen beide der Erzeugenden l^0 und sind normal auf ihr; die drei Erzeugenden $l^0\, g_\mathfrak{x}\, g_\mathfrak{y}$ sind also drei unter einander normale Erzeugende des Paraboloids und

solcher Tripel giebt es unendlich viele, indem $g_{\mathfrak{x}}$ und $g_{\mathfrak{y}}$ sich verändern, l^0 immer dasselbe bleibt. In gleicher Weise können wir ein Tripel normaler Erzeugenden $g^0\, l_{\mathfrak{x}}\, l_{\mathfrak{y}}$ herstellen, indem wir auf g^∞ die Punktinvolution, deren Doppelpunkte die imaginären Kreispunkte sind, annehmen und ein beliebiges Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ derselben wählen. Es giebt also auf dem gleichseitig-hyperbolischen Paraboloid eine doppelte Unendlichkeit von Tripeln je dreier unter einander normaler Erzeugender, von denen immer zwei derselben Regelschar angehören, und die dritte die der andern Regelschar angehörige Erzeugende ist, welche in der Berührungsebene am Scheitel liegt. Die in der früheren (S. 197) allgemeinen Betrachtung aufgefundenen Parallelepipeda, deren sechs Kanten auf dem gleichseitigen Hyperboloid verlaufen, behalten also nur drei an einander stofsende Kanten im Endlichen.

Nehmen wir zwei derartige Tripel aus den beiden verschiedenen Gruppen:

$$l^0\, g_{\mathfrak{x}}\, g_{\mathfrak{y}} \quad \text{und} \quad g^0\, l_{\mathfrak{x}}\, l_{\mathfrak{y}}\,,$$

so bilden die vier Strahlen $g_x\, g_y\, l_x\, l_y$ ein Tetraëder:

$$(g_{\mathfrak{x}} l_{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{A} \quad (l_{\mathfrak{x}} g_{\mathfrak{y}}) = \mathfrak{B} \quad (g_{\mathfrak{y}} l_{\mathfrak{y}}) = \mathfrak{C} \quad (l_{\mathfrak{y}} g_{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{D},$$

von welchem zwei Paare von Gegenkanten, nämlich

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{D}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$$

rechtwinklig zu einander sind, folglich müssen (S. 84) auch die beiden letzten Gegenkanten:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{D}|$$

zu einander rechtwinklig sein; es müssen die vier Höhen dieses Tetraëders sich in einem Punkte schneiden, durch welchen gleichzeitig die drei kürzesten Abstände der drei Paar Gegenkanten hindurchgehen. Der kürzeste Abstand der Gegenkanten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = l_{\mathfrak{x}}$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}| = l_{\mathfrak{y}}$ ist aber die Gerade g^0, und der kürzeste Abstand der Gegenkanten $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}| = g_{\mathfrak{y}}$ und $|\mathfrak{D}\mathfrak{A}| = g_{\mathfrak{x}}$ ist die Gerade l^0, und $g^0\, l^0$ treffen sich in dem Scheitel $\mathfrak{S}$ des Paraboloids, folglich ist $\mathfrak{S}$ der Höhenpunkt des Tetraëders $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$.

Bezeichnen wir noch die Fufspunkte der kürzesten Abstände der beiden Gegenkantenpaare $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ in diesem Tetraëder, nämlich die Punkte:

$$(l^0 g_{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{a} \quad (l^0 g_{\mathfrak{y}}) = \mathfrak{a}_1 \quad (g^0 l_{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{b} \quad (g^0 l_{\mathfrak{y}}) = \mathfrak{b}_1$$

und die Fufspunkte der Höhen des Tetraëders $\mathfrak{ABCD}$ durch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$, so wird, weil in dem Dreieck $\mathfrak{AD}\mathfrak{a}_1$ der Punkt $\mathfrak{S}$ der Höhenpunkt ist, die Beziehung gelten:

$$\mathfrak{aA} \cdot \mathfrak{aD} + \mathfrak{aS} \cdot \mathfrak{aa}_1 = 0 \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Sa} \cdot \mathfrak{Sa}_1 = \mathfrak{SA} \cdot \mathfrak{SA}_1 = \mathfrak{SD} \cdot \mathfrak{SD}_1,$$

in dem Dreieck $\mathfrak{AB}\mathfrak{b}_1$ in gleicher Weise:

$$\mathfrak{bA} \cdot \mathfrak{bB} + \mathfrak{bS} \cdot \mathfrak{bb}_1 = 0 \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Sb} \cdot \mathfrak{Sb}_1 = \mathfrak{SA} \cdot \mathfrak{SA}_1 = \mathfrak{SB} \cdot \mathfrak{SB}_1,$$

folglich auch

$$\mathfrak{Sa} \cdot \mathfrak{Sa}_1 = \mathfrak{Sb} \cdot \mathfrak{Sb}_1.$$

Halten wir nun das eine Paar Erzeugender z. B. $g_{\mathfrak{x}}$ und $g_{\mathfrak{y}}$ fest, verändern aber das andere Paar $l_{\mathfrak{x}}$ und $l_{\mathfrak{y}}$, so folgt, dafs das Punktepaar $\mathfrak{AD}$ eine Punktinvolution durchläuft, deren Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ ist; diese Punktinvolution mufs elliptisch sein, weil das Ebenenpaar $[g^0 l_{\mathfrak{x}}]$ und $[g^0 l_{\mathfrak{y}}]$ rechtwinklig ist; ebenso durchlaufen $\mathfrak{bb}_1$ eine elliptische Punktinvolution, deren Mittelpunkt $\mathfrak{S}$ ist. Wir haben also folgenden Satz:

Die Paare rechtwinkliger Erzeugender aus der einen Regelschar $(l_{\mathfrak{x}} l_{\mathfrak{y}})$ eines gleichseitig-hyperbolischen Paraboloids treffen eine beliebige Erzeugende der andern Regelschar $(g_{\mathfrak{x}})$ allemal in Punktepaaren einer elliptischen Punktinvolution, deren Mittelpunkt derjenige Punkt ist, in welchem $g_{\mathfrak{x}}$ von l^0 getroffen wird; die Potenz dieser Punktinvolution ist gleich dem negativen Rechteck aus den Abständen der Erzeugenden $g_{\mathfrak{x}}$ von der zugehörigen normalen Erzeugenden $g_{\mathfrak{y}}$ und von g^0. Die gleiche Eigenschaft gilt auch für die Paare $g_{\mathfrak{x}}$ und $g_{\mathfrak{y}}$.

Nennen wir die Potenz der Punktinvolution auf g^0:

$$\mathfrak{Sb} \cdot \mathfrak{Sb}_1 = -\mu^2$$

und den Abstand irgend einer Erzeugenden $g_{\mathfrak{x}}$ von g^0

$$\delta = \mathfrak{Sa},$$

so wird sich die Potenz der Punktinvolution auf $g_{\mathfrak{x}}$ ausdrücken lassen durch μ^2 und δ; nämlich

$$\mathfrak{aA} \cdot \mathfrak{aD} = \mathfrak{Sa}\,\{\mathfrak{aS} + \mathfrak{Sa}_1\} = -\,\{\mu^2 + \delta^2\}.$$

Da ferner die drei Strahlen $g^0\, g_{\mathfrak{x}}\, g_{\mathfrak{y}}$ sämtlich auf l^0 normal stehen, so wird, wenn wir den Winkel

$$\angle (g_{\mathfrak{x}} g^0) = w$$

bezeichnen,

$$\mathfrak{a}\mathfrak{A} \,.\, \cos w = \mathfrak{S}\mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{D} \,.\, \cos w = \mathfrak{S}\mathfrak{b}_1\,,$$

folglich,

$$-(\mu^2 + \delta^2) \,.\, \cos^2 w = -\mu^2,$$

woraus folgt

$$\delta^2 = \mu^2 \,.\, \mathrm{tg}^2\, w,$$

d. h. der Abstand der Geraden $g_{\mathfrak{x}}$ von der festen Erzeugenden g^0 wächst proportional der Tangente des Winkels, welchen die veränderliche Erzeugende $g_{\mathfrak{x}}$ mit der festen Erzeugenden g^0 bildet. Dies läfst sich auch so aussprechen: Wir können das gleichseitig hyperbolische Paraboloid als eine Schraubenfläche auffassen, welche entsteht, wenn eine Gerade $g_{\mathfrak{x}}$ sich rechtwinklig zu einer Leitlinie l^0 an derselben so verschiebt, dafs die Tangente des Winkels gegen eine Anfangslage g^0 der Entfernung von dieser Anfangslage proportional ist.

Die Potenz der Punktinvolution auf $g_{\mathfrak{x}}$ wird:

$$-\frac{\mu^2}{\cos^2 w} \quad \text{oder} \quad -\frac{\delta^2}{\sin^2 w}\,.$$

Um die Potenz der Punktinvolution auf g^0 zu ermitteln, suchen wir eine solche Erzeugende g_1 auf, welche gegen g^0 unter 45° geneigt ist, dann wird $w = 45°$ also $\mu^2 = \delta^2$; es ist also der Abstand dieser besonderen Erzeugenden g_1 von $\mathfrak{S}$ zu ermitteln; da die Ebene $[g_1 l^0]$ unter 45° geneigt ist gegen die Ebene $[g^0 l^0]$, und die Ebene $[l^0 g^\infty]$ auf $[g^0 l^0]$ rechtwinklig steht, so ist $[g_1 l^0]$ eine Halbierungsebene zwischen den beiden Ebenen $[l^0 g^0]$ und $[l^0 g^\infty]$; ferner ist eine Halbierungsebene des Neigungswinkels zwischen $[l^0 g^\infty]$ und $[g^0 l^\infty]$ eine Hauptebene; es sei die der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ca}$. In dem von den drei Ebenen $[l^0 g^0]$ $[l^0 g^\infty]$ $[g^0 l^\infty]$ gebildeten rechtwinkligen Dreiflach (Oktant) wird also derjenige Strahl, dessen Punkte von den drei Seitenflächen (also auch von den drei Kanten) gleich weit abstehen, von dem Scheitel $\mathfrak{S}$ nach dem Punkte $\mathfrak{x}_1$ der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ca}$ hingehen, in welchem die gesuchte Erzeugende g_1 der Ebene der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ca}$ begegnet.

Da nun der Abstand des Punktes $\mathfrak{x}_1$ von einer der drei Ebenen des rechtwinkligen Dreikants zu seinem Abstande von einer der drei Kanten sich verhalten mufs, wie $1 : \sqrt{2}$, so wird $\mathfrak{x}_1$ ein solcher Punkt auf der Parabel $\mathfrak{P}_{ca}^{(2)}$ sein, dafs sein Abstand von der Parabelaxe zum Abstande von der Scheiteltangente der Parabel sich verhält, wie $\sqrt{2} : 1$; dieser Punkt ist aber leicht zu ermitteln; sei $\mathfrak{f}$ der Brennpunkt der Parabel $\mathfrak{P}_{ca}^{(2)}$, so mufs der gesuchte Punkt $\mathfrak{x}_1$ doppelt so weit von der Scheiteltangente der Parabel abstehen, wie der Brennpunkt $\mathfrak{f}$. Hieraus folgt, dafs der Abstand der gesuchten Erzeugenden g_1 von $\mathfrak{S}$ ebenfalls gleich $2 \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}$ sein wird, oder wenn wir mit $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ die Brennpunkte der beiden Parabeln in den Hauptebenen des Paraboloids bezeichnen, so ist die Potenz der elliptischen Punktinvolution auf dem Strahle l^0 (oder g^0)

$$= -(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)^2.$$

Wir können also dem Obigen noch folgendes Resultat hinzufügen:

Die Paare rechtwinkliger Erzeugender $(g_{\mathfrak{x}} g_{\mathfrak{y}})$ aus einer Regelschar eines gleichseitig hyperbolischen Paraboloids treffen diejenige Erzeugende l^0 der andern Regelschar, welche durch den Scheitel $\mathfrak{S}$ des Paraboloids geht, in Punktepaaren einer elliptischen Punktinvolution, deren Mittelpunkt der Scheitel $\mathfrak{S}$ des Paraboloids ist, und deren Potenz den Wert hat $-(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)^2$, wenn $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1$ die Brennpunkte der beiden Parabeln in den Hauptebenen des Paraboloids sind.

§ 31. Die Raumkurve dritter Ordnung als Erzeugnis dreier projektivischen Ebenenbüschel.*)

Wir haben bisher von den Gebilden erster Stufe, der geraden Punktreihe, dem ebenen Strahlenbüschel und dem

*) Von den diesen Gegenstand betreffenden Originalarbeiten, deren Resultate im Folgenden enthalten sind, haben wir u. A. folgende zu erwähnen: Möbius: Der barycentrische Calcul. 1827. S. 120. M. Chasles: Aperçu historique, seconde édition. 1874. Note XXXIII, p. 403, M. Chas-

Ebenenbüschel immer nur zwei in projektivische Beziehung zu einander gesetzt und die daraus hervorgehenden Erzeugnisse untersucht. Es können aber auch drei Gebilde dieser Stufe, in projektivische Beziehung gesetzt, zu einem Erzeugnis führen, und wir wollen an erster Stelle das Erzeugnis dreier projektivischen Ebenenbüschel untersuchen, d. h.:

Drei projektivische Ebenenbüschel in allgemeinster Lage:

$$l_1\,[\alpha_1\,\beta_1\,.\,.\,\xi_1\,.\,.],\quad l_2\,[\alpha_2\,\beta_2\,.\,.\,\xi_2\,.\,.],\quad l_3\,[\alpha_3\,\beta_3\,.\,.\,\xi_3\,.\,.]$$

sind gegeben, es wird nach dem Orte des Schnittpunkts je dreier entsprechenden Ebenen:

$$(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3) = \mathfrak{x}$$

gefragt.

In dem Punkte $\mathfrak{x} = (\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ schneiden sich die drei Schnittlinien:

$$|\xi_1\,\xi_2| = g_{12} \quad |\xi_1\,\xi_3| = g_{13} \quad |\xi_2\xi_3| = g_{23}$$

und da $\xi_1\,\xi_2$ zwei projektivische Ebenenbüschel beschreiben, so wird g_{12} eine Regelschar eines Hyperboloids $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ durchlaufen; die andere Regelschar desselben, welcher die Axen l_1 und l_2 der Ebenenbüschel angehören, habe zu Erzeugenden l_{12}. In gleicher Weise durchläuft g_{13} eine Regelschar eines zweiten Hyperboloids $\mathfrak{H}_{13}^{(2)}$, dessen andere Regelschar von der Geraden l_{13} beschrieben werde, und endlich wird g_{23} eine Regelschar eines dritten Hyperboloids $\mathfrak{H}_{23}^{(2)}$ durchlaufen, dessen andere Regelschar von der Geraden l_{23} beschrieben werde. Die Hyperboloide $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_{13}^{(2)}$ haben die Erzeugende l_1, die

---

les: Comptes rendus, tome XLV, p. 189, 10 août 1857. Seidewitz: Archiv der Mathematik und Physik v. Grunert. B. X, S. 208. O. Hesse: Crelle's Journal. Bd. XXVI, S. 147. H. Schröter: Crelle-Borchardt's Journal. Bd. 56. S. 27. L. Cremona, Crelle-Borchardt's Journal. Bd. 58, S. 138. Bd. 60, S. 188. Bd. 63, S. 141. L. Cremona: Nouvelles Annales de mathématiques p. Terquem et Gerono. Deuxième série t. I, p. 287 et 366 et 436. K. G. C. v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage, § 33. Th. Reye: Die Geometrie der Lage (2. Auflage 1880). Abt. II, S. 68 ff. R. Sturm: Crelle-Borchardt's Journal. Bd. 79, S. 99. Bd. 80, S. 128. H. Müller: Mathematische Annalen von Clebsch und Neumann. Bd. I, S. 407.

Hyperboloide $\mathfrak{H}_{13}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_{23}^{(2)}$ die Erzeugende l_3 und endlich die Hyperboloide $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_{23}^{(2)}$ die Erzeugende l_2 gemeinschaftlich; alle drei Hyperboloide haben aber aufserdem den gesuchten Ort des Punktes $\mathfrak{x}$ gemeinschaftlich, und dieser ist durch zwei derselben bereits bestimmt, also:

Der gesuchte Ort des Punktes $\mathfrak{x}$ ist die übrige Durchschnittskurve zweier einfachen Hyperboloide, welche eine Erzeugende gemeinschaftlich haben.

Wir nennen diesen Ort eine Raumkurve dritter Ordnung $C^{(3)}$, weil eine beliebige Ebene ihr im allgemeinen höchstens in drei Punkten begegnen kann; denn diese schneidet die beiden Hyperboloide $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_{13}^{(2)}$ in zwei Kegelschnitten, die im allgemeinen vier gemeinschaftliche Punkte haben, von denen aber einer der Durchschnittspunkt mit l_1 sein mufs; es bleiben also für $C^{(3)}$ nur drei gemeinschaftliche Punkte der beiden Kegelschnitte übrig, von denen einer immer reell sein mufs, während die beiden andern auch konjugiert imaginär sein können (Th. d. K. § 57) und auf einer reellen Geraden liegen.

Jede der drei Geraden $g_{12}\, g_{13}\, g_{23}$ enthält nur den einzigen Punkt der Raumkurve $C^{(3)}$, in welchem sie sich schneiden, während die Erzeugenden $l_{12}\, l_{13}\, l_{23}$ der Raumkurve in je zwei Punkten begegnen müssen, die auch imaginär sein können; denn g_{12} wird als Schnittlinie $|\xi_1 \xi_2|$ von der einzigen Ebene ξ_3 in einem Punkte geschnitten, welcher der $C^{(3)}$ angehört; da aber g_{12} und l_{12} immer in einer Ebene liegen (Berührungsebene des Hyperboloids $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$) und das Linienpaar (Kegelschnitt) bilden, welches diese Ebene mit dem Hyperboloide $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ gemein hat, da ferner diese Ebene der $C^{(3)}$ nur in drei Punkten begegnen kann, so mufs l_{12} ihr in zwei (reellen oder imaginären) Punkten begegnen. Dies läfst sich auch auf folgende Art erkennen:

Die beiden entsprechenden Ebenen ξ_1 und ξ_2 der projektivischen Ebenenbüschel l_1 und l_2 schneiden auf der Geraden l_{12}, welche mit l_1 und l_2 derselben Regelschar des $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ angehört, eine und dieselbe Punktreihe aus, nämlich die-

jenige, in welcher sämtliche Erzeugende der andern Regelschar g_{12} ihr begegnen, und die entsprechende Ebene ξ_3 des dritten Ebenenbüschels l_3 schneidet auf l_{12} eine zweite mit der ersten projektivische Punktreihe aus; die beiden auf einander liegenden projektivischen Punktreihen haben aber im allgemeinen zwei (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte, und diese sind die beiden Punkte, in denen l_{12} der $C^{(3)}$ begegnet. Wir haben also das Resultat:

Die auf einem einfachen Hyperboloid $(\mathfrak{H}_{12}^{(2)})$ verlaufende Raumkurve dritter Ordnung $(C^{(3)})$ begegnet allemal sämtlichen Erzeugenden (g_{12}) der einen Regelschar in je einem (reellen) Punkte und sämtlichen Erzeugenden der andern Regelschar (l_{12}) in je zwei (reellen oder imaginären) Punkten.

Durch den Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ je dreier entsprechenden Ebenen $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ der gegebenen drei projektivischen Ebenenbüschel $l_1\ l_2\ l_3$ gehen die drei Schnittlinien $|\xi_1\xi_2|\ |\xi_1\xi_3|\ |\xi_2\xi_3|$, welche wir jetzt bezeichnen wollen durch:

$$g_{12}^{\mathfrak{x}}\quad g_{13}^{\mathfrak{x}}\quad g_{23}^{\mathfrak{x}}$$

und außerdem die drei der jedesmaligen andern Regelschar in jedem der drei Hyperboloide angehörigen Erzeugenden:

$$l_{12}^{\mathfrak{x}}\quad l_{13}^{\mathfrak{x}}\quad l_{23}^{\mathfrak{x}}.$$

Nehmen wir einen beliebigen zweiten Punkt $\mathfrak{a}$ der Raumkurve $C^{(3)}$, und schneiden sich in demselben die drei entsprechenden Ebenen $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, so haben wir in gleicher Weise auf den drei Hyperboloiden die sechs Erzeugenden aus je zwei Regelscharen:

$$g_{12}^{\mathfrak{a}}\ l_{12}^{\mathfrak{a}}\quad g_{13}^{\mathfrak{a}}\ l_{13}^{\mathfrak{a}}\quad g_{23}^{\mathfrak{a}}\ l_{23}^{\mathfrak{a}},$$

welche sämtlich durch den Punkt $\mathfrak{a}$ gehen.

Nun liegen aber auch die beiden Erzeugenden $g_{12}^{\mathfrak{x}}$ und $l_{12}^{\mathfrak{a}}$ des Hyperboloids $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ in einer Ebene, welche offenbar durch die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{a}$ geht, und es wird das Hyperboloid $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ auch erzeugt werden können durch zwei Ebenenbüschel, deren Axen l_1 und $l_{12}^{\mathfrak{a}}$, sind und deren entsprechende Ebenen in der veränderlichen Erzeugenden $g_{12}^{\mathfrak{x}}$ sich schneiden;

ebenso wird das Hyperboloid $\mathfrak{H}_{13}^{(2)}$ auch erzeugt werden können durch zwei Ebenenbüschel, deren Axen l_1 und $l_{13}^{\mathfrak{a}}$ sind, und deren entsprechende Ebenen in der veränderlichen Erzeugenden $g_{13}^{\mathfrak{x}}$ sich schneiden; da nun die Ebenen $[l_1 g_{12}^{\mathfrak{x}}]$ und $[l_1 g_{13}^{\mathfrak{x}}]$ identisch sind mit der Ebene $[l_1 \mathfrak{x}]$, so müssen die Ebenen:

$$[l_{12}^{\mathfrak{a}} g_{12}^{\mathfrak{x}}] \quad \text{und} \quad [l_{13}^{\mathfrak{a}} g_{13}^{\mathfrak{x}}]$$

mit der Bewegung von $\mathfrak{x}$ auf $C^{(3)}$ zwei projektivische Ebenenbüschel beschreiben, d. h. ihr Schnittstrahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ beschreibt einen Kegel zweiter Ordnung. Wir haben also den Satz:

Wird ein fester Punkt ($\mathfrak{a}$) einer Raumkurve dritter Ordnung ($C^{(3)}$) mit einem veränderlichen Punkte ($\mathfrak{x}$) derselben verbunden, so beschreibt der Verbindungsstrahl einen Kegel zweiter Ordnung.

Hieraus folgt:

Die Raumkurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ erscheint als die übrige Durchschnittskurve zweier Kegel zweiter Ordnung, welche in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte einen gemeinschaftlichen Kegelstrahl haben, und die Raumkurve geht selbst durch die beiden Mittelpunkte der Kegel.

Denn sobald wir zwei Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Raumkurve mit sämtlichen $\mathfrak{x}$ verbinden, erhalten wir zwei solche Kegel.

Hieraus folgt weiter: Wenn wir irgend drei Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ der Raumkurve nehmen und einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ auf ihr bewegen, so müssen die Ebenen:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}] \quad [\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{x}]$$

zwei projektivische Ebenenbüschel beschreiben, weil ihr Erzeugnis der Kegel zweiter Ordnung ist, welchen der veränderliche Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ beschreibt. Nehmen wir einen beliebigen vierten Punkt $\mathfrak{d}$ der Raumkurve hinzu, so müssen auch die Ebenen:

$$[\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{x}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{x}]$$

zwei projektivische Ebenenbüschel beschreiben, folglich werden auch die Ebenenbüschel:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|\,[\mathfrak{x}] \quad \text{und} \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|\,[\mathfrak{x}]$$

projektivisch sein und ein neues Hyperboloid erzeugen, welches durch die gegebene Raumkurve geht.

Nennen wir eine Gerade, welche der Raumkurve in zwei Punkten begegnet, eine Sekante derselben, so haben wir folgenden Satz:

Wenn man irgend zwei feste Sekanten einer Raumkurve 3. O. zu Axen zweier Ebenenbüschel macht, deren entsprechende Ebenen nach einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve gehen, so sind die beiden Ebenenbüschel allemal projektivisch und erzeugen ein einfaches Hyperboloid, auf welchem die Raumkurve ganz enthalten ist.

Hierdurch verlieren die ursprünglichen Axen $l_1 l_2 l_3$ der erzeugenden Ebenenbüschel ihre Eigentümlichkeit; sie sind nämlich auch nichts anderes, als drei beliebige Sekanten der Raumkurve; denn auf l_1 schneiden die beiden projektivischen Ebenenbüschel $l_2[\xi_2]$ und $l_3[\xi_2]$ zwei zusammenliegende projektivische Punktreihen aus, deren Doppelpunkte der Raumkurve angehören müssen. Sind die Doppelpunkte reell, so ist l_1 eine Sekante der Raumkurve; allerdings bleibt l_1 auch bestehen, wenn die Schnittpunkte mit $C^{(3)}$ imaginär sind. Wir können diese nicht in reellen Punkten schneidenden Sekanten der Raumkurve mit umfassen, wenn wir den vorigen Satz so aussprechen:

Durch irgend zwei Sekanten einer Raumkurve 3. O. und durch diese selbst läſst sich immer ein und nur ein einfaches Hyperboloid legen; sämtliche Erzeugenden der Regelschar, welcher die beiden Sekanten angehören, sind als Sekanten der Raumkurve aufzufassen, und verändern wir das Hyperboloid, so erhalten wir das ganze System sämtlicher Sekanten der Raumkurve.

Dieselbe Raumkurve 3. O. läſst sich also in mannigfachster Weise durch drei projektivische Ebenenbüschel erzeugen; wir haben nur nötig, irgend drei Sekanten der Raumkurve als Axen zu wählen — eine Eigenschaft, welche schon hier eine merkwürdige Analogie der Raumkurve 3. O. mit dem Kegelschnitt hervortreten läſst. Wir können das gewonnene Resultat auch anders aussprechen: Nehmen wir zwei beliebige Sekanten l und l' der Raumkurve und vier

Punkte derselben $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3\ \mathfrak{a}_4$, so müssen die Doppelverhältnisse der Ebenenbüschel:

$$l[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4] \quad \text{und} \quad l'[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4] \text{ gleich sein;}$$

halten wir l fest und lassen l' das ganze System der Sekanten der Raumkurve durchlaufen, so behält das Doppelverhältnis immer denselben konstanten Wert, d. h:

Werden vier beliebige feste Punkte einer Raumkurve dritter Ordnung mit irgend einer veränderlichen Sekante derselben durch vier Ebenen verbunden, so behält das Doppelverhältnis dieser vier Ebenen einen unveränderlichen Wert. Oder:

Die Axen aller solchen Büschel von je vier Ebenen, die durch vier gegebene feste Punkte gehen und ein konstantes Doppelverhältnis haben, sind die sämtlichen Sekanten einer Raumkurve dritter Ordnung.

Nehmen wir jetzt eine Gerade g, welche der Raumkurve $C^{(3)}$ nur in einem Punkte begegnet, so wird jede durch g gelegte Ebene die Raumkurve im allgemeinen in zwei (reellen oder imaginären) Punkten treffen, d. h. eine Sekante der Raumkurve enthalten; nehmen wir zwei solcher Sekanten l_1 und l_2 und legen nach dem Vorigen das Hyperboloid, welches durch $l_1 l_2$ und $C^{(3)}$ geht, so mufs dasselbe offenbar g enthalten, und alle übrigen zu derselben Regelschar wie l_1 und l_2 gehörenden Erzeugenden dieses Hyperboloids müssen g treffen, d. h. mit g in einer Ebene liegen, und zugleich Sekanten der Raumkurve $C^{(3)}$ sein, also mit andern Worten diejenigen Sekanten der Raumkurve sein, welche in den durch g gelegten Ebenen enthalten sind. Wir haben also den Satz:

Durch eine Gerade (g), welche der Raumkurve nur in einem Punkte begegnet und durch die Raumkurve läfst sich allemal ein und nur ein Hyperboloid legen. Sämtliche durch g gelegten Ebenen schneiden die Raumkurve in Punktepaaren, deren Verbindungslinien derjenigen Regelschar dieses Hyperboloids angehören, zu der g nicht gehört.

Nehmen wir endlich einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ im Raume, der nicht auf der Raumkurve liegt und verbinden ihn mit irgend einem Punkte $\mathfrak{p}$ derselben, so wird durch die Gerade

$|\mathfrak{o}\mathfrak{p}| = g$ und die Raumkurve ein Hyperboloid gelegt werden können, wie wir eben gesehen haben, und durch den Punkt $\mathfrak{o}$ dieses Hyperboloids geht eine einzige Erzeugende l, welche Sekante der Raumkurve sein mufs. Verändern wir den Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Raumkurve, so kann die Gerade l ihre Lage dadurch nicht ändern, was schon unmittelbar daraus hervorgeht, dafs, wenn es eine zweite Gerade l' durch $\mathfrak{o}$ gäbe, die Ebene $[ll']$ mit der Raumkurve vier Punkte gemein haben würde, was widersinnig ist. Also:

Durch einen beliebigen Punkt ($\mathfrak{o}$) im Raume, der nicht auf der Raumkurve liegt, giebt es nur eine (immer reelle) Sekante derselben, d. h. eine solche Gerade, welche ihr in zwei (reellen oder imaginären) Punkten begegnet.

Die Konstruktion dieser Sekante ist im Vorigen gegeben; man verbinde nämlich $\mathfrak{o}$ mit irgend einem Punkte $\mathfrak{a}$ der Raumkurve durch eine Gerade g, lege durch g ein Büschel von Ebenen, deren jede aus der Raumkurve eine Sekante (eigentliche oder uneigentliche) ausschneidet; alle diese Sekanten bilden eine Regelschar eines Hyperboloids, auf welchem auch g, der andern Regelschar angehörig, liegt; die einzige durch $\mathfrak{o}$ gehende Erzeugende der ersten Regelschar dieses Hyperboloids ist die gesuchte Sekante. Man braucht also nur durch $\mathfrak{o}$ zwei Ebenen zu legen, die zugleich durch irgend zwei Erzeugende der andern Regelschar jenes Hyperboloids gehen, um als deren Schnittlinie die gesuchte Sekante zu erhalten. Hieraus folgt, dafs die Projektion der Raumkurve $C^{(3)}$ auf eine beliebige Ebene allemal ein ebene Kurve 3. O. mit einem Doppelpunkt sein mufs, oder dafs ein Kegel, welchen man erhält, wenn man einen beliebigen nicht auf der Raumkurve liegenden festen Punkt mit allen Punkten derselben durch Strahlen verbindet, ein Kegel dritter Ordnung mit einem Doppelstrahl sein mufs.

Man kann die Punktepaare, in welchen die Erzeugenden der einen Regelschar eines Hyperboloids, auf welchem eine Raumkurve 3. O. verläuft, von dieser getroffen werden, involutorisch ordnen und erhält dadurch ein Mittel, diejenigen, welche Sekanten mit reellen Schnittpunkten sind, zu trennen

von denjenigen, welche der Raumkurve in konjugiert-imaginären Punkten begegnen.

Wenn man nämlich irgend ein Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ durch die Raumkurve legt und diejenige Regelschar l^x des Hyperboloids ins Auge faſst, deren Erzeugende der Raumkurve in je zwei Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ begegnen, und man durch sämtliche l^x und irgend einen festen Punkt $\mathfrak{a}$ der Raumkurve Ebenen legt, so müssen dieselben sämtlich durch eine feste Gerade g^a gehen, d. h. ein Ebenenbüschel bilden; denn es giebt durch $\mathfrak{a}$ nur eine einzige Erzeugende g^a der andern Regelschar unseres Hyperboloids, und g^a muſs mit jeder Erzeugenden l^x in einer Ebene liegen. Verbindet man aber $\mathfrak{a}$ mit sämtlichen Punkten $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$, so erhält man nach dem Obigen einen Kegel 2. O., und das Ebenenbüschel durch g^a schneidet den Kegel in dem Strahlenpaar $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}'|$. Irgend ein anderer Kegelstrahl l^0 mit dem Strahlenpaare $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{a}\mathfrak{x}'|$ verbunden, liefert aber bekanntlich (Th. d. K. §. 31) eine Ebeneninvolution, deren Axe eine Sehne der Raumkurve ist. Wir haben also den Satz:

Wenn man durch eine Raumkurve dritter Ordnung ein Hyperboloid legt und diejenige Regelschar l^x desselben betrachtet, deren Erzeugende der Raumkurve in je zwei Punkten $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ begegnen, wenn man alsdann irgend eine Sekante $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ der Raumkurve mit $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ durch Ebenenpaare verbindet, so bilden diese eine Ebeneninvolution.

Diese Ebeneninvolution wird hyperbolisch oder elliptisch sein, je nachdem der Strahl g^a auſserhalb oder innerhalb des Kegels liegt, welchen der Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ beschreibt, eines Kegels, der allein von der Lage des Punktes $\mathfrak{a}$ abhängt, und den wir mit $\mathfrak{a}^{(2)}$ bezeichnen wollen. Ist die Ebeneninvolution elliptisch, so schneiden sämtliche durch g^a gelegten Ebenen den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ in reellen Linienpaaren $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}'|$, d. h. sämtliche Erzeugenden l^x werden von der Raumkurve $C^{(3)}$ in reellen Punktepaaren $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ getroffen. Ist die Ebeneninvolution dagegen hyperbolisch, so gehen zwei Berührungsebenen durch g^a an den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$; diese schneiden zwei solche Erzeugende l^x aus dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, welche von der Raumkurve $C^{(3)}$ berührt werden. Die beiden Berührungsebenen durch g^a an den

Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ trennen die Ebenen des ganzen durch $g^{\mathfrak{a}}$ gelegten Büschels in zwei Gruppen; die eine Gruppe von Ebenen schneidet den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ in reellen Paaren von Kegelstrahlen, die andere nicht; also zerfallen die Erzeugenden l^x des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ in diesem hyperbolischen Fall in zwei Gruppen, von denen die eine Gruppe sämtliche l^x enthält, die der $C^{(3)}$ in reellen Punktepaaren $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}')$ begegnen, während die andere Gruppe alle Erzeugenden l^x enthält, welche von der $C^{(3)}$ nicht getroffen werden. Beide Gruppen werden von einander getrennt durch zwei besondere Erzeugende l, welche die Raumkurve $C^{(3)}$ berühren.

Ist die Raumkurve $C^{(3)}$ und das durch dieselbe gelegte Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ gegeben, so wird das Verhalten ihrer Regelschar l^x zu der Raumkurve unabhängig sein von der Wahl des Punktes $\mathfrak{a}$ auf der Raumkurve; die vorige Ebeneninvolution bleibt also entweder immer elliptisch oder immer hyperbolisch, wo wir auch $\mathfrak{a}$ auf $C^{(3)}$ wählen mögen; wir können also folgenden Satz aussprechen:

Wird durch eine Raumkurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ ein einfaches Hyperboloid $(\mathfrak{H}^{(2)})$ gelegt und betrachtet man diejenige Regelschar desselben, deren Erzeugende l^x der Raumkurve im allgemeinen in Punktepaaren begegnen, so können zwei Fälle eintreten, entweder 1) begegnen sämtliche Erzeugende l^x der Raumkurve in reellen Punktepaaren $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}')$ oder 2) die Erzeugenden l^x zerfallen in zwei Gruppen, deren eine der $C^{(3)}$ in reellen Punktepaaren begegnet, die andere nicht. Diese beiden Gruppen werden von einander getrennt durch zwei besondere Erzeugende l^x, welche von der Raumkurve berührt werden. Um letztere zu finden, legt man durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$ der Raumkurve den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$, welcher durch die Raumkurve geht, und diejenige Erzeugende $g^{\mathfrak{a}}$ der andern Regelschar des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$, welche durch $\mathfrak{a}$ geht. Liegt $g^{\mathfrak{a}}$ innerhalb des Kegels $\mathfrak{a}^{(2)}$, so tritt der erste Fall ein; liegt dagegen $g^{\mathfrak{a}}$ aufserhalb des Kegels $\mathfrak{a}^{(2)}$, so tritt der zweite Fall ein; es giebt alsdann zwei reelle Berührungsebenen durch $g^{\mathfrak{a}}$ an den Kegel

$\mathfrak{a}^{(2)}$; dieselben schneiden aus dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ jene zwei besonderen Erzeugenden l^x aus, welche $C^{(3)}$ berühren. Die Konstruktion derselben ist unabhängig von der Wahl des Punktes $\mathfrak{a}$ auf der Raumkurve.

Endlich können wir die vorige Eigenschaft auch umkehren:

Nehmen wir irgend eine Sekante $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ der Raumkurve $C^{(3)}$ als Axe einer Ebeneninvolution, so schneiden die Ebenenpaare derselben den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$, welcher von $\mathfrak{a}$ aus als Mittelpunkt durch die Raumkurve gelegt werden kann, in Linienpaaren, deren Verbindungsebene durch eine feste Gerade $g^{\mathfrak{a}}$ laufen mufs. Legen wir durch $g^{\mathfrak{a}}$ und $C^{(3)}$ das einzig mögliche Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, so werden die Erzeugenden l^x der andern Regelschar dieses Hyperboloids, welcher $g^{\mathfrak{a}}$ nicht angehört, in solchen Punktepaaren $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}')$ der Raumkurve begegnen, in welchen die Ebenenpaare der Ebeneninvolution sie treffen, also:

Legt man durch eine beliebige Sekante $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ einer Raumkurve dritter Ordnung als Axe eine Involution von Ebenenpaaren, so begegnet jedes Ebenenpaar der Raumkurve noch in zwei Punkten $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, deren Verbindungslinie einer Regelschar l^x eines einfachen Hyperboloids angehört. Denken wir uns durch eine Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$ ein Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ gelegt und nehmen die durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$ der $C^{(3)}$ gehenden Erzeugenden $g^{\mathfrak{a}}$ und $l^{\mathfrak{a}}$ des Hyperboloids, deren eine $g^{\mathfrak{a}}$ den einzigen Punkt $\mathfrak{a}$, die andere noch einen zweiten Punkt $\mathfrak{a}'$ mit der $C^{(3)}$ gemein haben wird, legen wir endlich durch $g^{\mathfrak{a}}$ eine beliebige Ebene, so schneidet dieselbe immer eine Sekante aus der $C^{(3)}$, welche der Regelschar l^x des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ angehört, wie oben gezeigt ist. Denken wir uns nun durch dieselbe Raumkurve $C^{(3)}$ ein zweites Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ gelegt und nehmen die durch den vorigen Punkt $\mathfrak{a}$ gehenden Erzeugenden $g_1^{\mathfrak{a}}$ und $l_1^{\mathfrak{a}}$ dieses neuen Hyperboloids, so gilt für jede durch $g_1^{\mathfrak{a}}$ gelegte Ebene dasselbe, wie vorhin. Die Ebene, welche durch $g^{\mathfrak{a}}$ und $g_1^{\mathfrak{a}}$ gleichzeitig geht, mufs also aus der $C^{(3)}$ eine Sekante ausschneiden, welche gleichzeitig Erzeugende in

beiden Hyperboloiden $\mathfrak{H}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ ist. Wir haben also folgenden Satz:

Wenn durch eine Raumkurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ zwei Hyperboloide $\mathfrak{H}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ gehen, so haben dieselben allemal noch eine Erzeugende l gemeinschaftlich, welche Sekante der Raumkurve sein, d. h. derselben in zwei (reellen oder imaginären) Punkten begegnen mufs. Diese gemeinschaftliche Erzeugende kann so gefunden werden: Man ziehe durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ diejenige Erzeugende $g^{\mathfrak{a}}$ des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$, welche keinen Punkt weiter mit der $C^{(3)}$ gemein hat und ebenso diejenige Erzeugende $g_1^{\mathfrak{a}}$ des Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ durch den Punkt $\mathfrak{a}$, welche der $C^{(3)}$ nicht weiter begegnet; sucht man für einen beliebigen zweiten Punkt $\mathfrak{b}$ die einzigen in derselben Weise bestimmten Erzeugenden $g^{\mathfrak{b}}$ und $g_1^{\mathfrak{b}}$ der beiden Hyperboloide, so schneiden sich die beiden Ebenen:

$$[g^{\mathfrak{a}} g_1^{\mathfrak{a}}] \text{ und } [g^{\mathfrak{b}} g_1^{\mathfrak{b}}]$$

in der gesuchten gemeinschaftlichen Geraden l, die aufser der Raumkurve $C^{(3)}$ beiden Hyperboloiden $\mathfrak{H}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ angehört.

Legt man insbesondere die Ebenen $[g^{\mathfrak{a}} l^{\mathfrak{a}}]$, d. h. die Berührungsebene des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ im Punkte $\mathfrak{a}$, so begegnet dieselbe der Raumkurve $C^{(3)}$ in den beiden Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ (auf $l^{\mathfrak{a}}$), und es fragt sich, wo der dritte Schnittpunkt bleibt? Denken wir uns um $g^{\mathfrak{a}}$ eine veränderliche Ebene $\mathfrak{x}$ gedreht, welche aus der $C^{(3)}$ eine Sekante $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}'| = l^{\mathfrak{x}}$ ausschneidet, die der zweiten Regelschar des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ angehört, so wird insbesondere, wenn die Ebene $\mathfrak{x}$ mit $[g^{\mathfrak{a}} l^{\mathfrak{a}}]$ zusammenfällt, $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}'|$ auf $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}'|$ fallen, also die Sehne $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ wird in die Tangente der Raumkurve $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{a}$ übergehen, also die Tangente in einem Punkte $\mathfrak{a}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ liegt notwendig in der Berührungsebene irgend eines durch die $C^{(3)}$ gelegten Hyperboloids im Punkte $\mathfrak{a}$. Die Tangente selbst ist also die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$[g^{\mathfrak{a}} l^{\mathfrak{a}}] \text{ und } [g_1^{\mathfrak{a}} l_1^{\mathfrak{a}}],$$

und der gesuchte dritte Schnittpunkt ist der dem $\mathfrak{a}$ unendlich nahe liegende Punkt dieser Schnittlinie. Oder: Legt man

durch eine Raumkurve $C^{(3)}$ beliebig viele Hyperboloide und an jedem derselben die Berührungsebene in einem festen Punkte $\mathfrak{a}$ der $C^{(3)}$, so gehen dieselben sämtlich durch die Tangente der Raumkurve im Punkte $\mathfrak{a}$.

Sei diese Tangente $t_\mathfrak{a}$; verbindet man $\mathfrak{a}$ mit sämtlichen Punkten $\mathfrak{x}$ der Raumkurve, so bilden die Strahlen $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ einen Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ 2. O., wie wir gesehen haben, der offenbar auch $t^\mathfrak{a}$ als Kegelstrahl hat. Legt man durch $t_\mathfrak{a}$ die Berührungsebene dieses Kegels, so ist dies eine solche Ebene, deren drei Schnittpunkte mit $C^{(3)}$ in den einzigen Punkt $\mathfrak{a}$ hineinfallen, die Schmiegungsebene der $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{a}$. Wir werden später auf Tangenten und Schmiegungsebenen der Raumkurve $C^{(3)}$ näher eingehen.

§ 32. Konstruktion der Raumkurve durch gegebene Punkte derselben.

Die Raumkurve 3. Ordnung ist durch sechs beliebige Punkte im Raume (von denen keine vier in einer Ebene liegen) vollständig und eindeutig bestimmt. Bezeichnen wir dieselben durch 1 2 3 4 5 6, so brauchen wir nur einen Kegel zu legen, dessen Mittelpunkt 1 ist, und welcher durch die fünf Strahlen |12|, |13|, |14|, |15|, |16| bestimmt wird, und einen zweiten Kegel, dessen Mittelpunkt 2 ist, und der durch die fünf Strahlen |21|, |23|, |24|, |25|, |26| bestimmt wird, dann haben diese beiden Kegel die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte |12| = |21| als gemeinschaftlichen Kegelstrahl und der übrige Durchschnitt derselben ist eine Raumkurve 3. O., welche durch die sechs Punkte 1 2 3 4 5 6 hindurchgeht.

Da die Raumkurve durch sechs Punkte eben bestimmt ist, so müssen 7 Punkte im Raume, die auf einer $C^{(3)}$ liegen, einer gewissen Bedingung unterworfen sein; diese Bedingung läſst sich in geometrischer Form aussprechen mittels des Pascalschen Satzes, der die ganz analoge Bedingung dafür, daſs sechs Punkte einer Ebene auf einem Kegelschnitt liegen, in die bekannte geometrische Form kleidet.

Nehmen wir sieben Punkte 1 2 3 4 5 6 7 auf einer $C^{(3)}$ an, so muſs jeder derselben, mit den sechs übrigen durch

Strahlen verbunden, der Mittelpunkt eines Kegels 2. O. sein, auf dem diese sechs Strahlen liegen, und für diese sechs Kegelstrahlen gilt die aus der Perspektive des Pascalschen Satzes hervorgehende Eigenschaft, dafs die gegenüberliegenden Seitenflächen dieses Sechskants sich in drei Strahlen schneiden, welche in einer Ebene liegen. Nehmen wir 3 als Mittelpunkt und

$$|32|, |34|, |35|, |36|, |37|, |31|$$

als Kegelstrahlen, so müssen die drei Schnittlinien:

$$|[324], [367]| \quad |[345], [371]| \quad |[356], [312]|$$

in einer durch 3 gehenden Ebene liegen, d. h. die drei Punkte:

$$([123], |56|) \quad ([234], |67|) \quad ([345], |71|)$$

müssen in einer durch 3 gehenden Ebene liegen; dies läfst sich auch anders aussprechen: Die 7 Punkte der Raumkurve 1 2 3 4 5 6 7 bilden in dieser Reihenfolge verbunden ein räumliches Siebeneck, dessen Seiten je zwei auf einander folgende Punkte mit einander verbinden und 7 wieder mit 1; je zwei einander folgende Seiten dieses räumlichen Siebenecks liegen also in einer Ebene, und wir können das räumliche Siebeneck in diesem Sinne auch als räumliches Siebenflach auffassen, dessen einander folgende Flächen sind:

$$[123], [234], [345], [456], [567], [671], [712].$$

Dann liegt jeder Fläche dieses Siebenflachs eine bestimmte Seite des Siebenecks gegenüber, nämlich da jede Fläche zwei Seiten verbindet, also fünf übrig bleiben, die mittlere von diesen, also

der Fläche [123] liegt gegenüber die Seite |56|
" " [234] " " " " |67|
" " [345] " " " " |71| u. s. f.

und wir können nunmehr den Satz aussprechen:

Wenn man irgend sieben Punkte einer Raumkurve dritter Ordnung zu einem räumlichen Siebeneck verbindet und durch je zwei einander folgende Seiten eine Ebene legt, so liegt jeder dieser sieben Ebenen eine bestimmte Seite des Siebenecks gegenüber. Drei auf einander folgende Ebenen haben eine Ecke gemeinsam, welche allemal mit den drei

Punkten, in denen diese Ebenen von den gegenüberliegenden Seiten des Siebenecks getroffen werden, in einer Ebene liegt.

Diese Bedingung zwischen 7 Punkten einer Raumkurve 3. O., welche sich allerdings nicht mehr einer so grofsen Einfachheit erfreut, wie der Pascalsche Satz, gestattet doch, wie jener, die Konstruktion eines beliebigen siebenten Punktes, sobald sechs Punkte im Raume, welche zur Bestimmung der Raumkurve dienen, gegeben sind. Bezeichnen wir die gegebenen sechs Punkte, welche zur Bestimmung einer Raumkurve 3. O. notwendig und hinreichend sind, durch

$$1\,2\,3\,4\,5\,6$$

und nennen wir einen beliebigen siebenten Punkt derselben

$$\mathfrak{x},$$

so können wir uns folgendes räumliche Siebeneck der Raumkurve einbeschrieben denken:

$$1\,\mathfrak{x}\,2\,3\,4\,5\,6;$$

bezeichnen wir sodann die Schnittpunkte:

$$(|1\mathfrak{x}|,\ [345]) = \mathfrak{y}$$
$$(|\mathfrak{x}2|,\ [456]) = \mathfrak{z}$$
$$(|23|,\ [561]) = \mathfrak{a}$$
$$(|34|,\ [61\mathfrak{x}]) = \mathfrak{t}$$
$$(|45|,\ [1\mathfrak{x}2]) = \mathfrak{u}$$
$$(|56|,\ [\mathfrak{x}23]) = \mathfrak{v}$$
$$(|61|,\ [234]) = \mathfrak{b},$$

von denen die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ direkt gegeben, die übrigen von dem noch unbekannten Punkte $\mathfrak{x}$ abhängen, dann sind nach dem oben bewiesenen Satze die vier Punkte:

$\mathfrak{b}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,4$ in einer Ebene gelegen
$\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{a}\,5$ „ „ „ „
$\mathfrak{z}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{t}\,6$ „ „ „ „
$\mathfrak{a}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}\,1$ „ „ „ „
$\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{x}$ „ „ „ „
$\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{b}\,2$ „ „ „ „
$\mathfrak{v}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{y}\,3$ „ „ „ „

Legen wir nun durch die Punkte 12 eine beliebige Ebene $\mathfrak{x}$ und bezeichnen mit $\mathfrak{x}$ denjenigen Punkt, in welchem diese Ebene $\mathfrak{x}$ der Raumkurve zum dritten Mal begegnet, so läfst sich nach den in dem obigen Schema enthaltenen Lagenverhältnissen der Punkt $\mathfrak{x}$ auf zweierlei Art linear konstruieren:

1) Die willkürlich durch $|12|$ gelegte Ebene

$$\mathfrak{x} = [12\mathfrak{x}]$$

und die Ebene $[345]$ schneiden sich in einer Geraden

$$y = |\mathfrak{x}, [345]|,$$

welche den Punkt $\mathfrak{y}$ enthalten mufs, die Ebenen $\mathfrak{x}$ und $[456]$ schneiden sich in einer Geraden

$$z = |\mathfrak{x}, [456]|,$$

welche den Punkt $\mathfrak{z}$ enthalten mufs; die Gerade $|\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$ liegt also in der Ebene $\mathfrak{x}$, da nun die vier Punkte $\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{b}\,4$ in einer Ebene liegen, so geht $|\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$ durch den Schnittpunkt

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{x}, |\mathfrak{b}4|),$$

und da die vier Punkte $\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{a}\,5$ ebenfalls in einer Ebene liegen, so geht $|\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$ auch durch den Schnittpunkt

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{x}, |\mathfrak{a}5|),$$

also ist $|\mathfrak{y}\mathfrak{z}| = |\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$ bekannt, folglich auch die Punkte

$$(|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|, y) = \mathfrak{y} \quad \text{und} \quad (|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|, z) = \mathfrak{z},$$

und aus diesen beiden Punkten ergiebt sich der Schnittpunkt

$$(|1\mathfrak{y}|, |2\mathfrak{z}|) = \mathfrak{x},$$

der gesuchte Punkt der Raumkurve in der Ebene $\mathfrak{x}$. Die Konstruktion gestaltet sich also folgendermafsen:

Man lege durch $|12|$ eine beliebige Ebene $\mathfrak{x}$, bestimme die Schnittlinien:

$$|\mathfrak{x}, [345]| = y \qquad |\mathfrak{x}, [456]| = z,$$

und die Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{x}, |\mathfrak{b}4|) = \mathfrak{p} \qquad (\mathfrak{x}, |\mathfrak{a}5|) = \mathfrak{q}$$

[wo $\mathfrak{a} = (|23|, [561])$ und $\mathfrak{b} = (|61|, [234])$ bedeuten]; bestimmt man sodann die Schnittpunkte:

$$(|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|, y) = \mathfrak{y} \qquad (|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|, z) = \mathfrak{z},$$

so ist der Punkt:

$$(|1\mathfrak{y}|, |2\mathfrak{z}|) = \mathfrak{x}$$

ein Punkt der Raumkurve.

Wir erkennen leicht, daſs mit der Drehung der Ebene $\mathfrak{x}$ um die feste Axe $|12|$ der veränderliche Punkt $\mathfrak{x}$ die ganze Raumkurve 3. O. durchläuft. Denn das von der Ebene $\mathfrak{x}$ beschriebene Ebenenbüschel schneidet die beiden Geraden $|\mathfrak{b}4|$ und $|\mathfrak{a}5|$ in projektivischen Punktreihen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, also beschreibt $|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$ eine Regelschar eines Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$, auf welchem auch die Gerade $|12|$ als Erzeugende der andern Regelschar liegt, weil $|12|$ sämtlichen Erzeugenden $|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$ begegnet. Der Punkt $\mathfrak{y}$ in der festen Ebene [345] durchläuft also einen Kegelschnitt, die Durchschnittskurve dieser Ebene mit dem Hyperboloid. Der Strahl $|1\mathfrak{y}|$ beschreibt daher einen Kegel, von welchem $|12|$ ein Kegelstrahl ist; aus gleichen Gründen beschreibt der Strahl $|2\mathfrak{z}|$ einen Kegel, dessen Mittelpunkt 2 ist, und von dem $|21|$ ein Kegelstrahl wird. Der Punkt $\mathfrak{x}$ beschreibt folglich die Durchdringungskurve zweier Kegel 1 und 2, welche in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte einen gemeinschaftlichen Kegelstrahl haben, d. h. eine Raumkurve 3. O. Dieselbe geht durch die Mittelpunkte 1 2 der beiden Kegel, ferner durch die Punkte 4 5, weil diese Punkte auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ und auf der Schnittlinie der Ebenen [345] und [456] liegen, endlich auch durch die Punkte 3 und 6, wie wir leicht aus dem Konstruktionsschema ablesen können, wenn wir der Ebene $\mathfrak{x}$ einmal die besondere Lage [123] und das andere Mal die besondere Lage [126] geben.

2) Wir können aber noch auf eine zweite Art den unbekannten siebenten Punkt $\mathfrak{x}$ unserer Raumkurve ermitteln. Die willkürlich durch $|12|$ gelegte Ebene:

$$\mathfrak{x} = [12\mathfrak{x}]$$

enthält den Punkt $\mathfrak{u}$, der auſserdem auf der Geraden $|45|$ liegt, also ist $\mathfrak{u} = (\mathfrak{x}, |45|)$ bekannt; da aber $\mathfrak{a}\ \mathfrak{t}\ \mathfrak{u}\ 1$ in einer Ebene liegen, von der wir drei Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{u}\ 1$ kennen, und $\mathfrak{t}$ gleichzeitig in $|34|$ liegt, so ist auch $\mathfrak{t}$ bekannt; da in gleicher Weise $\mathfrak{u}\ \mathfrak{v}\ \mathfrak{b}\ 2$ in einer Ebene liegen, von der wir drei Punkte $\mathfrak{u}\ \mathfrak{b}\ 2$ kennen, und $\mathfrak{v}$ gleichzeitig in $|56|$ liegt, so ist auch $\mathfrak{v}$ bekannt. Die drei Ebenen:

$$[12\mathfrak{u}],\quad [61\mathfrak{t}],\quad [23\mathfrak{v}]$$

schneiden sich aber nach dem obigen Schema in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{x}$.

Die Konstruktion gestaltet sich also folgendermafsen:

Man lege durch $|12|$ eine beliebige Ebene ξ, bestimme den Schnittpunkt:

$$\mathfrak{u} = (\xi, |45|),$$

ferner die Ebenen:

$$[1\mathfrak{a}\mathfrak{u}] = \eta \qquad [2\mathfrak{b}\mathfrak{u}] = \zeta$$

[wo $\mathfrak{a} = (|23|, [561])$ und $\mathfrak{b} = (|61|, [234])$ bedeuten]; ermittelt man sodann die Schnittpunkte:

$$(\eta, |34|) = \mathfrak{t} \qquad (\zeta, |56|) = \mathfrak{v},$$

so schneiden sich die drei Ebenen:

$$[61\mathfrak{t}] \qquad [12\mathfrak{u}] \qquad [23\mathfrak{v}]$$

in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve, welcher in der Ebene ξ aufser 12 noch enthalten ist.

Wir erkennen leicht, dafs mit der Drehung der Ebene ξ um die feste Axe $|12|$ der veränderliche Punkt $\mathfrak{x}$ die ganze Raumkurve 3. O. durchläuft. Denn das von der Ebene ξ beschriebene Ebenenbüschel schneidet auf der Geraden $|45|$ eine Punktreihe $\mathfrak{u}$ aus, mit welcher die von den Ebenen η und ζ um die festen Axen $|1\mathfrak{a}|$ und $|2\mathfrak{b}|$ beschriebenen Ebenenbüschel perspektivisch liegen; die von den Punkten $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{v}$ auf den geraden Trägern $|34|$ und $|56|$ beschriebenen Punktreihen sind daher auch mit der von $\mathfrak{u}$ beschriebenen Punktreihe projektivisch, und die drei Ebenen:

$$[61\mathfrak{t}] \qquad [12\mathfrak{u}] \qquad [23\mathfrak{v}]$$

beschreiben daher drei projektivische Ebenenbüschel, deren Erzeugnis die Raumkurve 3. O. ist; denn die beiden ersten Ebenenbüschel erzeugen einen Kegel, dessen Mittelpunkt 1, und von dem $|12|$ ein Kegelstrahl ist; die beiden letzten Ebenenbüschel erzeugen einen Kegel, dessen Mittelpunkt 2 und von dem ein Kegelstrahl $|21|$ ist; folglich ist das Erzeugnis aller drei Ebenenbüschel die Durchdringungskurve zweier Kegel 1 und 2, welche in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte einen gemeinsamen Kegelstrahl haben, d. h. eine Raumkurve 3. O. Dieselbe geht durch die sechs gegebenen

Punkte, nämlich durch die Mittelpunkte 12 der beiden Kegel und durch die vier übrigen Punkte 3 4 5 6, wie wir leicht aus dem obigen Konstruktionsschema ablesen können, wenn wir insbesondere die veränderliche Ebene $\mathfrak{x}$ die Lage von [123], [124], [125] und [126] annehmen lassen.

Eine andere in ihrer vollständigen Ausführung zwar nicht einfachere, aber in ihrer Aussprache bequemere Konstruktion eines beliebigen siebenten Punktes der durch sechs gegebene Punkte bestimmten Raumkurve 3. O. ergiebt sich folgendermafsen:

Denken wir uns die willkürlich durch |12| gelegte Ebene

$$\mathfrak{x} = [1\,2\,\mathfrak{x}],$$

in welcher der dritte Punkt $\mathfrak{x}$ gesucht wird, von dem Kegel geschnitten, dessen Mittelpunkt 3 ist und der durch die Raumkurve gelegt werden kann, also die Kegelstrahlen hat |31|, |32|, |34|, |35|, |36|, so werden dem Durchschnittskegelschnitt zwei Dreiecke einbeschrieben sein, nämlich das Dreieck $1\,2\,\mathfrak{x}$ und das Dreieck, dessen Ecken sind:

$$(\mathfrak{x}, |34|) \quad (\mathfrak{x}, |35|) \quad (\mathfrak{x}, |36|),$$

da aber bekanntlich die sechs Seiten zweier Dreiecke, deren Ecken auf einem Kegelschnitt liegen, selbst einen neuen Kegelschnitt berühren (Th. d. K. S. 129), so werden die sechs Geraden:

$$|12|, \; |1\mathfrak{x}|, \; |2\mathfrak{x}|, \qquad |\mathfrak{x}, [345]| \; |\mathfrak{x}, [346]| \; |\mathfrak{x}, [356]|$$

Tangenten eines Kegelschnitts sein.

Vertauschen wir aber die Punkte 3 und 4 mit einander, was für die Betrachtung der Raumkurve und ihrer Durchschnittsebene $\mathfrak{x}$ irrelevant ist, so sehen wir, dafs auch die sechs Schnittlinien:

$$|12|, \; |1\mathfrak{x}|, \; |2\mathfrak{x}|, \qquad |\mathfrak{x}, [435]| \; |\mathfrak{x}, [436]| \; |\mathfrak{x}, [456]|$$

Tangenten eines Kegelschnitts sein müssen, welcher offenbar mit dem vorigen identisch ist, weil er mit demselben fünf Tangenten gemein hat. Hieraus folgt also, dafs dieser Kegelschnitt die fünf Tangenten hat:

$$|12| \quad |\mathfrak{x}, [345]| \quad |\mathfrak{x}, [346]| \quad |\mathfrak{x}, [356]| \quad |\mathfrak{x}, [456]|$$

und durch diese 5 Tangenten eben bestimmt wird; die beiden übrigen aus den Punkten 1 und 2 der Tangente |12| an den

Kegelschnitt gelegten Tangenten schneiden sich in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{x}$, und wir haben daher folgende Konstruktion:*)

Man lege durch $|12|$ eine beliebige Ebene $\mathfrak{x}$, welche von den vier Ebenen:

$$[345] \quad [346] \quad [356] \quad [456],$$

welche die übrigen vier gegebenen Punkte 3 4 5 6 der Raumkurve verbinden, in vier geraden Linien geschnitten wird. Diese vier Geraden und die Verbindungslinie $|12|$ bestimmen als Tangenten einen Kegelschnitt; aus den beiden Punkten 1 und 2 gehen an diesen Kegelschnitt noch zwei Tangenten aufser $|12|$ und der Schnittpunkt derselben ($|1\mathfrak{x}|$, $|2\mathfrak{x}|$) ist der gesuchte dritte Punkt der Raumkurve in der Ebene $\mathfrak{x}$.

Wenn sechs Punkte 1 2 3 4 5 6 einer $C^{(3)}$ mit einem beliebigen Punkte $\mathfrak{x}$ derselben verbunden werden, so gehören die 6 Strahlen:

$$\mathfrak{x}\,|1, 2, 3, 4, 5, 6|$$

einem Kegel 2. O. $\mathfrak{x}^{(2)}$ an und bilden ein demselben einbeschriebenes Sechskant, für welches der auf den Kegel ausgedehnte Pascalsche Satz gilt, wonach die drei Schnittlinien der Ebenen:

$$[\mathfrak{x}12] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{x}45]$$
$$[\mathfrak{x}23] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{x}56]$$
$$[\mathfrak{x}34] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{x}61]$$

in einer durch $\mathfrak{x}$ gehenden Ebene ε liegen müssen. Halten wir die zur Bestimmung der $C^{(3)}$ notwendigen und hinreichenden Punkte 123456 fest, verändern aber den Punkt $\mathfrak{x}$ auf $C^{(3)}$, so verändert sich mit ihm auch die Ebene ε. Da nun nach S. 232 die Schnittlinie der beiden Ebenen $[\mathfrak{x}12]$ und $[\mathfrak{x}45]$ ein Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ beschreibt, auf welchem $C^{(3)}$ liegt, und die Schnittlinie der Ebenen $[\mathfrak{x}23]$ und $[\mathfrak{x}56]$ ein zweites Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ beschreibt, auf welchem auch $C^{(3)}$ liegt, so müssen diese beiden Hyperboloide eine Erzeugende l gemein haben, deren Konstruktion oben (S. 238) angegeben ist. Diese

*) Chasles l. c.

Konstruktion sagt aber geradezu aus, dass l in der Ebene ε liegt; also auch umgekehrt ε durch die feste Gerade l gehen mufs. Wir erhalten also folgenden Satz:

Ist einer Raumkurve $C^{(3)}$ ein Sechseck 1 2 3 4 5 6 einbeschrieben und verbindet man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ der $C^{(3)}$ mit den gegenüber liegenden Seiten des Sechsecks $|12|$, $|34|$; $|23|$, $|45|$; $|34|$, $|56|$ durch Ebenenpaare, so liegen die drei Schnittlinien derselben in einer Ebene ε. Bei der Veränderung von $\mathfrak{x}$ auf der Raumkurve $C^{(3)}$ dreht sich die Ebene ε um eine feste Gerade, weche Sekante der Raumkurve $C^{(3)}$ ist. (Cremona l. c.)

Ist ein einfaches Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ gegeben, auf welchem ein Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$ gezeichnet werden soll, so darf man nur fünf Punkte 1 2 3 4 5 desselben willkürlich annehmen, durch die $C^{(3)}$ gehen soll; denn nimmt man zwei beliebige Erzeugende $l_1\, l_2$ einer Regelschar und setzt drei Ebenenbüschel, deren Axen $l_1\, l_2$ und $|45|$ sind, in solche projektivische Beziehung, dafs

$$l_1\,[1, 2, 3] \;\overline{\wedge}\; l_2\,[1, 2, 3] \;\overline{\wedge}\; |45|\,[1, 2, 3],$$

d. h. die Ebenen nach 1, 2, 3, entsprechende sind, dann erzeugen diese drei projektivischen Ebenenbüschel eine $C^{(3)}$, welche auf dem gegebenen Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ liegt, vorausgesetzt, dafs die Verbindungslinie $|45|$ selbst keine Erzeugende des Hyperboloids ist. In gleicher Weise kann man an Stelle von $l_1\, l_2$ zwei Erzeugende $g_1\, g_2$ der andern Regelschar wählen und erhält dadurch eine zweite Raumkurve $C_1^{(3)}$ auf demselben Hyperboloid, welche durch die fünf gegebenen Punkte geht; die eine Raumkurve begegnet der Regelschar l^x in je zwei, der Regelschar g^x nur in je einem Punkte, die andere Raumkurve umgekehrt der Regelschar g^x in je zwei, der Regelschar l^x nur in je einem Punkte. Also:

Durch fünf Punkte eines einfachen Hyperboloids lassen sich zwei Raumkurven dritter Ordnung legen, welche demselben ganz angehören. Dieselbe Regelschar des Hyperboloids trifft allemal die eine Raumkurve in je zwei, die andere in je einem Punkte.

Stellen wir uns die umgekehrte Frage:

Auf einem gegebenen Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ liegen zwei Raumkurven dritter Ordnung $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$; wie viel gemeinschaftliche Punkte können dieselben im allgemeinen haben?
so können hierbei zwei wesentlich verschiedene Fälle eintreten, entweder

I. die Raumkurve $C^{(3)}$ begegnet allen Erzeugenden l^x der einen Regelschar des Hyperboloids in je zwei Punkten, allen Erzeugenden g^x also nur in je einem Punkte, und die Raumkurve $C_1^{(3)}$ begegnet umgekehrt allen Erzeugenden l^x nur in je einem Punkte, dagegen allen Erzeugenden g^x in je zwei Punkten, oder

II. die Raumkurve $C^{(3)}$ begegnet allen Erzeugenden l^x in je zwei Punkten und daher allen Erzeugenden g^x nur in je einem Punkte, und die Raumkurve $C_1^{(3)}$ begegnet ebenfalls allen l^x in je zwei, allen g^x in je einem Punkte.

Der erste Fall ist derjenige, welcher vorhin auftrat. Nehmen wir nun, um die vorgelegte Frage zu beantworten, einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ der Raumkurve $C^{(3)}$, so gehen durch ihn zwei Erzeugende l^0 und g^0 des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$. Verbinden wir $\mathfrak{o}$ mit allen Punkten der Raumkurve $C^{(3)}$ durch Strahlen, so erhalten wir einen Kegel 2. O. $\mathfrak{K}^{(2)}$; verbinden wir $\mathfrak{o}$ mit allen Punkten der Raumkurve $C_1^{(3)}$, so erhalten wir (S. 234) einen Kegel $\mathfrak{K}_1^{(3)}$ dritten Grades mit einem Doppelstrahl; derselbe ist im Falle I. der Strahl g^0, im Falle II. der Strahl l^0. Betrachten wir nun zuerst den Fall I., so haben die beiden Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(3)}$ den gemeinschaftlichen Strahl l^0, welcher der $C^{(3)}$ in zwei, der $C_1^{(3)}$ nur in einem Punkte begegnet; außerdem haben diese beiden konzentrischen Kegel zweiten und dritten Grades also noch 5 gemeinschaftliche Strahlen, und diese müssen durch die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Raumkurven $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$ hindurchgehen; denn träfe ein solcher Strahl, welcher beiden Raumkurven begegnen muſs, dieselben in zwei verschiedenen Punkten, so enthielte er drei Punkte des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$, müſste also eine Erzeugende

sein, was nicht der Fall ist. Also schneiden sich im Falle I. die beiden Raumkurven im allgemeinen in fünf Punkten. Dagegen haben im Falle II. die beiden Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(3)}$ ebenfalls den gemeinschaftlichen Strahl l^0, dieser ist aber für den Kegel $\mathfrak{K}_1^{(3)}$ Doppelstrahl, folglich können dieselben außerdem nur noch vier gemeinschaftliche Strahlen haben, welche durch die gemeinschaftlichen Punkte der Kurven $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$ hindurchgehen müssen, wie wir eben gesehen haben. Also schneiden sich im Falle II. die beiden Raumkurven nur in vier Punkten. Wir haben also folgendes Resultat:

Liegen auf einem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ zwei Raumkurven $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$, und begegnet die eine Raumkurve $C^{(3)}$ den Erzeugenden l^x der einen Regelschar in je zwei Punkten, dagegen $C_1^{(3)}$ den Erzeugenden l^x nur in je einem Punkte, so haben die Raumkurven im allgemeinen fünf gemeinschaftliche Punkte. Wenn dagegen beide Raumkurven $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$ derselben Regelschar l^x in je zwei Punkten begegnen, so haben die Raumkurven im allgemeinen nur vier gemeinschaftliche Punkte.

Dies Resultat läßt sich noch anders auffassen, wenn wir nämlich von dem Hyperboloid noch zwei Erzeugende hinzunehmen, entweder l und l_1, die derselben Regelschar, oder l und g_1, die verschiedenen Regelscharen angehören. Begegnen sich nämlich die beiden Raumkurven $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$ nur in vier Punkten auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, so können wir $C^{(3)}$ und l als eine Raumkurve 4. O. $C^{(4)}$ auffassen, die in eine Gerade und eine Raumkurve 3. O. zerfallen ist, ebenso das Ensemble von $C_1^{(3)}$ und l_1; da nun $C^{(3)}$ auch l_1 in zwei Punkten begegnet und $C_1^{(3)}$ auch l in zwei Punkten trifft, so folgt, daſs die beiden Raumkurven 4. O.:

$$C^{(3)} \text{ und } l, \qquad C_1^{(3)} \text{ und } l_1$$

auf demselben Hyperboloid acht Punkte gemein haben.

Dasselbe folgt auch im zweiten Falle, wenn $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$

fünf Punkte gemeinschaftlich haben; wir müssen aber dann für die beiden zerfallenden Raumkurven 4. O.:

$$C^{(3)} \text{ und } l, \qquad C_1^{(3)} \text{ und } g_1$$

nehmen, dann schneiden sich nämlich $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$ in fünf Punkten, $C^{(3)}$ und g_1 in einem, $C_1^{(3)}$ und l in einem, und l und g_1 in einem Punkte, was zusammen ebenfalls acht gemeinschaftliche Punkte ausmacht.

Umgekehrt können wir schliefsen, dafs **durch zwei Raumkurven dritter Ordnung** $C^{(3)}$ **und** $C_1^{(3)}$, **die fünf Punkte gemeinschaftlich haben, immer ein Hyperboloid gelegt werden kann.** Denn nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ der ersten Raumkurve, so können wir durch $\mathfrak{p}$ die einzige Sekante g_1 der anderen Raumkurve $C_1^{(3)}$ (S. 234) ziehen und durch diese Sekante g_1 und die Raumkurve $C^{(3)}$ das einzige Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ legen, welches gleichzeitig durch die Raumkurve $C_1^{(3)}$ gehen mufs, weil dieselbe sieben Punkte mit dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ gemein hat (wie aus einer sogleich folgenden Bemerkung hervorgeht). Die Gerade g_1 kann nicht gleichzeitig Sekante der ersten Raumkurve $C^{(3)}$ sein, denn sonst könnten auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ die beiden Raumkurven $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$ nicht fünf, sondern nur vier Punkte gemein haben.

Wir können uns nun leicht zwei Raumkurven $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$ herstellen, die fünf Punkte gemeinschaftlich haben, wenn wir nämlich im Raume sieben von einander unabhängige Punkte

$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7$$

willkürlich annehmen und einmal durch die Punkte 123456 eine Raumkurve $C^{(3)}$ legen, die dadurch vollkommen bestimmt wird, und sodann durch 7 die einzige Sekante derselben ziehen, die Gerade l, zweitens aber durch die Punkte 123457 eine Raumkurve $C_1^{(3)}$ legen, die ebenfalls dadurch gerade bestimmt ist, und durch den Punkt 6 die einzige Sekante g_1 derselben. Dann wissen wir, dafs beide Raumkurven auf demselben Hyperboloid liegen, auf welchem auch die Geraden l und g_1 sich befinden müssen, weil sie je drei Punkte dieses Hyper-

boloids enthalten, und gleichfalls wissen wir aus dem Obigen, dafs l und g_1 verschiedenen Regelscharen angehören, folglich sich treffen müssen; wir erhalten daher den bemerkenwerten Satz:

Wenn 7 beliebige Punkte willkürlich im Raume gegeben sind:

1 2 3 4 5 6 7

und man 1) durch die Punkte 123456 die Raumkurve $C^{(3)}$ und durch 7 die einzige Sekante l derselben, 2) durch die Punkte 123457 die Raumkurve $C_1^{(3)}$ und durch 6 die einzige Sekante g_1 derselben legt, dann müssen sich die beiden Geraden l und g_1 notwendig in einem achten Punkte treffen.*)

Das vorige Ergebnis beantwortet zugleich eine Frage, die sich auch sonst noch darbietet (§ 71):

Es sind vier projektivische Ebenenbüschel im Raume beliebig gegeben, deren Axen $l_1 l_2 l_3 l_4$ sich nicht treffen. Wie oft kommt es vor, dafs vier entsprechende Ebenen sich in einem Punkte schneiden?

Die drei projektivischen Ebenenbüschel $l_1[\xi_1]$, $l_2[\xi_2]$, $l_3[\xi_3]$ erzeugen eine Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$, die drei projektivischen Ebenenbüschel $l_1[\xi_1]$, $l_2[\xi_2]$, $l_4[\xi_4]$ erzeugen eine zweite Raumkurve 3. O. $C_1^{(3)}$; beide liegen auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, welches die beiden projektivischen Ebenenbüschel $l_1[\xi_1]$ und $l_2[\xi_2]$ erzeugen, und beide begegnen den Erzeugenden l_1 und l_2 in je zwei Punkten, folglich können $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$ nach dem vorigen Satze nur vier gemeinschaftliche Punkte haben, also kommt es im allgemeinen nur viermal vor, dafs vier entsprechende Ebenen von vier projektivischen Ebenenbüscheln durch einen und denselben Punkt gehen.

Schliefslich bemerken wir noch, dafs eine Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$ mit einem beliebig angenommenen Hyperbo-

---

*) Vergl. Hesse: Über die lineäre Konstruktion des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen 2. O., wenn sieben Schnittpunkte derselben gegeben sind, Crelle's Journal f. r. u. a. Mathematik. Bd. XXVI, S. 147.

loid $\mathfrak{H}^{(2)}$ im allgemeinen höchstens sechs Punkte gemein haben kann, ohne ganz auf dem Hyperboloid zu liegen, und umgekehrt: Wenn eine Raumkurve $C^{(3)}$ mit einem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ sieben Punkte gemeinschaftlich hat, so liegt sie ganz auf demselben. Denn seien sieben Punkte 1 2 3 4 5 6 7 einer Raumkurve $C^{(3)}$ auf einem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ gelegen, so gehen durch den Punkt 1 zwei Erzeugende g_1 und l_1 des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$. Begegnet nun 1) eine derselben z. B. l_1 der $C^{(3)}$ noch in einem zweiten Punkte, so lassen sich durch l_1 und $C^{(3)}$ unendlich viele Hyperboloide legen (S. 232); sei eines derselben $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ dann haben die beiden Hyperboloide $\mathfrak{H}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ eine Erzeugende l_1 gemein, schneiden sich daher noch in einer Raumkurve 3. O., welche mit $C^{(3)}$ identisch sein mufs, weil sie durch die sechs Punkte 2 3 4 5 6 7 geht, durch welche nur eine Raumkurve $C^{(3)}$ gehen kann, die dadurch eben bestimmt wird; folglich liegt $C^{(3)}$ ganz auf $\mathfrak{H}^{(2)}$ und begegnet der l_1 in zwei Punkten. Begegnet aber 2) keine der Erzeugenden g_1 und l_1 der Raumkurve $C^{(3)}$ in einem zweiten Punkte, und nehmen wir eine derselben g_1, so läfst sich, wie wir wissen (S. 233) durch g_1 und $C^{(3)}$ nur ein einziges bestimmtes Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ legen. Dieses mufs identisch sein mit $\mathfrak{H}^{(2)}$; denn wären $\mathfrak{H}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ von einander verschieden, so müfsten sie sich aufser in g_1 noch in einer Raumkurve 3. O. schneiden, welche mit $C^{(3)}$ zusammenfallen müfste, weil sie durch die sechs Punkte 2 3 4 5 6 7, welche sie enthalten soll, gerade bestimmt wird. Diese Raumkurve $C^{(3)}$ müfste aber der g_1 in zwei Punkten begegnen (S. 238), was gegen unsere Voraussetzung ist. Also kann $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ mit $\mathfrak{H}^{(2)}$ nur identisch sein, folglich mufs $C^{(3)}$ ganz auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ liegen und wird daher der l_1 noch in einem zweiten Punkte begegnen.

§ 33. Einige Konstruktionen der Raumkurve vermittelst gegebener Punkte und Sekanten derselben.

Man kann als Bestimmungsstücke zur Konstruktion einer Raumkurve dritter Ordnung aufser Punkten derselben auch

Sekanten, d. h. solche Gerade wählen, welche ihr in zwei (reellen oder konjugiert-imaginären) Punkten begegnen, oder welche auf sämtlichen durch die Raumkurve gelegten Hyperboloiden jedesmal diejenige Regelschar bilden, deren Erzeugende der Raumkurve in je zwei Punkten begegnen.

Während die Konstruktion der Raumkurve $C^{(3)}$ durch sechs gegebene Punkte $\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3\, \mathfrak{a}_4\, \mathfrak{a}_5\, \mathfrak{a}_6$ zurückkommt auf die Ermittelung je dreier entsprechenden Ebenen in drei projektivischen Ebenenbüscheln:

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|\,[\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6\mathfrak{x}]\;\overline{\wedge}\;|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3|\,[\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6\mathfrak{x}]\;\overline{\wedge}\;|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3|\,[\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6\mathfrak{x}],$$

deren projektivische Beziehung allemal durch drei Paare entsprechender Ebenen bestimmt wird, bietet sich uns jetzt als erste Aufgabe folgende dar:

Es sind eine Gerade l_1 und fünf Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ beliebig im Raume gegeben; es soll eine Raumkurve 3. O. konstruiert werden, welche durch die gegebenen Punkte geht und die gegebene Gerade l_1 zur Sekante hat.

Da es darauf ankommt, zwei solche Hyperboloide zu ermitteln, welche eine Erzeugende gemeinschaftlich haben, und deren übriger Schnitt durch die gegebenen Punkte geht, so werden wir einmal die Ebenenbüschel projektivisch setzen:

$$l_1\,[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]\;\overline{\wedge}\;|\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5|\,[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3],$$

deren entsprechende Elementenpaare die Projektivität gerade bestimmen; dieselben erzeugen ein Hyperboloid $\mathfrak{H}_{45}^{(2)}$, welches l_1 und $|45|$ zu Erzeugenden hat und durch die Punkte $\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3$ geht. Zweitens werden wir die Ebenenbüschel projektivisch setzen:

$$l_1\,[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4]\;\overline{\wedge}\;|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5|\,[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4];$$

dieselben erzeugen ein Hyperboloid $\mathfrak{H}_{35}^{(2)}$, welches l_1 und $|35|$ zu Erzeugenden hat und durch die Punkte $\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_4$ geht. Diese beiden Hyperboloide haben außer der gemeinschaftlichen Erzeugenden l_1 noch eine Raumkurve 3. O. gemein, welche offenbar durch die fünf Punkte $\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3\, \mathfrak{a}_4\, \mathfrak{a}_5$ gehen muß und die Erzeugende l_1 zur Sekante hat, folglich den Anforderungen der Aufgabe genügt. Durch die beiden bekannten Hyperboloide ist die Raumkurve $C^{(3)}$ nach S. 228

linear zu konstruieren, indem wir um l_1 eine veränderliche Ebene drehen und die beiden ihr entsprechenden Ebenen aus den oben bestimmten projektivischen Büscheln ermitteln, wodurch als Schnittpunkt solcher drei entsprechenden Ebenen der veränderliche dritte Punkt der Raumkurve in der durch l_1 gelegten Ebene hervorgeht.

Wir können uns aber zur Lösung der vorgelegten Aufgabe auch der andern auf S. 246 gegebenen Konstruktion bedienen und so verfahren:

Man lege durch l_1 eine beliebige Ebene ε, welche von den Ebenen [123] [124] [134] [234] in vier Geraden geschnitten wird, welche mit l_1 als fünf Tangenten eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ aufgefafst, denselben eindeutig bestimmen. Die Ebene ε wird andererseits von den vier Ebenen [123] [125] [135] [235] in vier Geraden geschnitten, welche mit l_1 zusammen einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ umhüllen, der durch diese fünf Tangenten vollständig bestimmt wird. Beide Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ haben l_1 und die Schnittlinie von ε mit [123] als zwei gemeinschaftliche Tangenten, mithin noch zwei andere gemeinschaftliche Tangenten, deren Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ der einzige in der durch l_1 gelegten Ebene ε enthaltene Punkt der $C^{(3)}$ ist. Dieser Punkt $\mathfrak{x}$ ist auf bekannte Weise linear zu konstruieren, und demgemäfs durch Drehung der Ebene ε um die Axe l_1 die ganze Raumkurve $C^{(3)}$.

Stellt man sich als zweite Aufgabe diese: Eine Raumkurve $C^{(3)}$ zu konstruieren, welche zwei gegebene Gerade l_1 l_2 zu Sekanten haben und durch vier Punkte $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_2$ $\mathfrak{a}_3$ $\mathfrak{a}_4$ gehen soll, so ist diese Aufgabe überbestimmt, denn es müfste sich ein Hyperboloid durch die beiden Erzeugenden l_1 und l_2 und die vier Punkte $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_2$ $\mathfrak{a}_3$ $\mathfrak{a}_4$ legen lassen, was eine Bedingung zwischen den gegebenen Elementen erfordert, da das Hyperboloid durch $l_1\,l_2$ und $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_2$ $\mathfrak{a}_3$ schon bestimmt wird, also der Punkt $\mathfrak{a}_4$ nicht mehr frei gewählt werden kann (S. 106). Ist aber diese Bedingung erfüllt, dafs $l_1\,l_2$ Erzeugende eines Hyperboloids sind, welches durch $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$ geht, dann giebt es unendlich viele Raumkurven $C^{(3)}$, welche den Forderungen der Aufgabe genügen, nämlich ein ganzes Büschel von Raumkurven $C^{(3)}$, welche durch dieselben vier

Punkte $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3\ \mathfrak{a}_4$ gehen und auf demselben Hyperboloid liegen. Durch jeden beliebigen fünften Punkt des Hyperboloids geht nämlich allemal eine und nur eine Raumkurve $C^{(3)}$ dieses Büschels, welche den Erzeugenden l_1 und l_2 und der ganzen zu ihnen gehörenden Regelschar in je zwei Punkten begegnet.

Die dritte Aufgabe, welche sich uns darbietet, ist die einfachste, nämlich: Eine Raumkurve $C^{(3)}$ zu konstruieren, welche drei gegebene Gerade $l_1\ l_2\ l_3$ zu Sekanten hat und aufserdem durch drei gegebene Punkte $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3$ hindurchgeht.

Zur Lösung derselben braucht man nur drei Ebenenbüschel in projektivische Beziehung zu setzen:

$$l_1\,[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3] \;\overline{\wedge}\; l_2\,[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3] \;\overline{\wedge}\; l_3\,[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3];$$

durch drei Paare entsprechender Elemente ist die projektivische Beziehung gerade bestimmt, ist diese also hergestellt, so schneiden sich immer drei entsprechende Ebenen der projektivischen Büschel in einem Punkte der gesuchten $C^{(3)}$.

Die vierte Aufgabe ist nunmehr folgende:

Es soll eine Raumkurve $C^{(3)}$ konstruiert werden, von welcher vier Sekanten $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ und zwei Punkte $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2$ gegeben sind.

Wir suchen zwei Hyperboloide zu ermitteln, von denen eines die Erzeugenden l_1 und l_2, das andere die Erzeugenden l_3 und l_4 hat, die beide durch die gegebenen Punkte $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2$ gehen und aufserdem eine gemeinschaftliche Erzeugende haben, die zu derselben Regelschar wie l_1 und l_2 in dem einen, l_3 und l_4 in dem andern Hyperboloid gehört und ebenso wie jene der Raumkurve $C^{(3)}$, in welcher sich die beiden Hyperboloide aufserdem schneiden, in zwei Punkten begegnet.

Um diesen Forderungen zu genügen, ziehen wir durch $\mathfrak{a}_1$ diejenige Gerade a_1, welche den beiden Geraden l_1 und l_2 begegnet, und ebenso diejenige Gerade b_1, welche den beiden Geraden l_3 und l_4 begegnet; also wir bestimmen die Schnittlinien:

$$|[l_1\mathfrak{a}_1],\ [l_2\mathfrak{a}_1]| = a_1 \qquad |[l_3\mathfrak{a}_1],\ [l_4\mathfrak{a}_1]| = b_1;$$

a_1 mufs eine Erzeugende des ersten, b_1 eine Erzeugende des zweiten Hyperboloids sein.

In gleicher Weise ermitteln wir die Schnittlinien:

$$|[l_1 \mathfrak{a}_2], [l_2 \mathfrak{a}_2]| = a_2 \qquad |[l_3 \mathfrak{a}_2], [l_4 \mathfrak{a}_2]| = b_2,$$

dann mufs ebenso a_2 eine Erzeugende des ersten, b_2 eine Erzeugende des zweiten Hyperboloids sein.

Nun liegen $a_1 b_1$ in einer Ebene, weil beide durch $\mathfrak{a}_1$ gehen, ebenso liegen $a_2 b_2$ in einer Ebene, weil beide durch $\mathfrak{a}_2$ gehen. Wir bestimmen die Schnittlinie:

$$|[a_1 b_1], [a_2 b_2]| = l,$$

dann wird die Gerade l offenbar allen vier Geraden $a_1\ b_1\ a_2 b_2$ gleichzeitig begegnen.

Legen wir jetzt durch die drei Geraden:

$$l_1\ l_2\ l \text{ ein Hyperboloid } \mathfrak{H}_{12}^{(2)}$$

und durch

$$l_3\ l_4\ l \text{ ein Hyperboloid } \mathfrak{H}_{34}^{(2)},$$

so haben beide Hyperboloide aufser der gemeinschaftlichen Erzeugenden l eine Raumkurve $C^{(3)}$ gemein, welche die gesuchte sein wird; denn das Hyperboloid $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ enthält die Gerade a_1, weil dieselbe $l_1\ l_2\ l$ gleichzeitig begegnet, ebenso a_2; das zweite Hyperboloid $\mathfrak{H}_{34}^{(2)}$ enthält die Erzeugenden b_1 und b_2; weil aber a_1 und b_1 den Punkt $\mathfrak{a}_1$ gemein haben, so liegt derselbe und ebenso $\mathfrak{a}_2$ auf beiden Hyperboloiden, also auf $C^{(3)}$. Dafs aber $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ Sekanten der Raumkurve $C^{(3)}$ sind, geht daraus hervor, dafs sie mit l zu derselben Regelschar gehören, und l die gemeinschaftliche Erzeugende beider Hyperboloide ist. Die Raumkurve $C^{(3)}$ genügt also den Forderungen der Aufgabe und kann, wie wir sehen, linear konstruiert werden.

Um beliebig viele Punkte von ihr zu erhalten, braucht man nur um die einmal konstruierte Gerade l eine veränderliche Ebene $\mathfrak{x}$ zu drehen, welche den Geraden $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ in den Punkten $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{x}_2\ \mathfrak{x}_3\ \mathfrak{x}_4$ begegnet, dann ist der Schnittpunkt

$$(|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2|, |\mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_4|)$$

ein Punkt der gesuchten Raumkurve $C^{(3)}$, weil er gleichzeitig auf beiden Hyperboloiden $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_{34}^{(2)}$ liegt.

Die nächste Aufgabe stellt die Forderung:

Eine Raumkurve $C^{(3)}$ zu konstruieren, welche fünf gegebene Sekanten $l_1\, l_2\, l_3\, l_4\, l_5$ hat und durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{a}_1$ geht.

Wir suchen diese Aufgabe dadurch zu lösen, dafs wir in der Konstruktion der vorigen Aufgabe den einen der beiden gegebenen Punkte $\mathfrak{a}_2$ auf der fünften gegebenen Geraden l_5 verändern und nachsehen, ob der Fall eintritt, dafs die in der vorigen Aufgabe konstruierte Gerade l zweimal dieselbe Lage annimmt, dann müfste offenbar l_5 zweimal der Raumkurve begegnen, also eine Sekante sein für diejenige $C^{(3)}$, welche gemäfs der vorigen Aufgabe allen übrigen Bedingungen genügt.

Aus dem Anblick der vorigen Konstruktion ergiebt sich zunächst, dafs, während der Punkt $\mathfrak{a}_2$ die Gerade l_5 durchläuft, die Strahlen a_1 und b_1, also auch die Ebene $[a_1 b_1]$ fest bleiben, dagegen a_2 und b_2 zwei Regelscharen beschreiben, und die Gerade l in der Ebene $[a_1 b_1]$ einen gewissen Ort umhüllt, von dem zu ermitteln ist, ob l zweimal dieselbe Lage annimmt. Die Gerade l können wir bestimmen durch diejenigen beiden Punkte, in welchen a_2 und b_2 die feste Ebene $\varepsilon = [a_1 b_1]$ durchstofsen. Nennen wir die Treffpunkte:

$$(\varepsilon,\, a_2) = \mathfrak{A} \quad (\varepsilon,\, b_2) = \mathfrak{B},$$

so ist $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = l$, und bei der Bewegung, welche wir uns denken, wird $\mathfrak{A}$ einen bestimmten Kegelschnitt und $\mathfrak{B}$ einen andern Kegelschnitt in Ebene ε beschreiben, nämlich die Durchschnittsfiguren der Ebene ε mit den Hyperboloiden, welche a_2 und b_2 beschreiben. Auf diesen beiden Kegelschnitten durchlaufen die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ projektivische krumme Punktreihen, denn die vier Ebenenbüschel $[l_1 \mathfrak{a}_2]$ $[l_2 \mathfrak{a}_2]$ $[l_3 \mathfrak{a}_2]$ $[l_4 \mathfrak{a}_2]$ liegen mit der Punktreihe, welche $\mathfrak{a}_2$ auf l_5 durchläuft, perspektivisch. Ferner ist von vornherein ersichtlich, dafs einmal zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammenfallen müssen, nämlich in demjenigen Punkte, in welchem die Gerade l_5 die Ebene ε durchbohrt. Dieser Punkt ist offenbar beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich und vereinigt zwei Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; nennen wir ihn $\mathfrak{D}$, so wird derselbe noch nicht zur Lösung der Aufgabe führen. Denn die Raumkurve $C^{(3)}$, welche nach der vorigen Aufgabe

eindeutig bestimmt ist durch die Sekanten $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ und die Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{O}$, braucht noch nicht die willkürlich durch $\mathfrak{O}$ anzunehmende Gerade l_5 zur Sekante zu haben. Verbinden wir aber $\mathfrak{O}$ mit den veränderlichen Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so erhalten wir in $\mathfrak{O}$ zwei konzentrische projektivische Strahlenbüschel, welche im allgemeinen zwei Doppelstrahlen haben; ein solcher Doppelstrahl verbindet zwar zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ und geht zugleich durch den Punkt $\mathfrak{O}$, in welchem zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ vereinigt sind; allein dieser Doppelstrahl als Gerade l in dem Sinne der vorigen Aufgabe gewählt bestimmt eine Raumkurve $C^{(3)}$, welche der Geraden l zweimal begegnet, folglich der Geraden l_5, die mit l den Punkt $\mathfrak{O}$ allein gemein hat, nur in einem Punkte begegnen kann.

Wir müssen also nachsehen, ob bei der Bewegung von $\mathfrak{a}_2$ auf l_5 aufserdem eine Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, die nicht durch $\mathfrak{O}$ geht, mit einer andern Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ zweier zusammengehörigen Punkte koinzidiert. Bezeichnen wir die beiden Kegelschnitte in der Ebene ε, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beschreiben, durch $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ und die Punktreihen auf ihnen durch:

$$(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 \ldots \mathfrak{A}_x \ldots), \quad (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 \ldots \mathfrak{B}_x \ldots);$$

halten wir zwei dieser Punkte $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{B}_m$ fest, und verbinden wir sie mit allen übrigen $\mathfrak{A}_x\ \mathfrak{B}_x$, so erhalten wir zwei projektivische Strahlenbüschel, die einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_m^{(2)}$ erzeugen; halten wir zwei andere Punkte $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{B}_n$ fest und verbinden sie ebenfalls mit allen übrigen $\mathfrak{A}_x$ und $\mathfrak{B}_x$ durch Strahlenpaare, so erhalten wir einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_n^{(2)}$. Diese beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_m^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_n^{(2)}$ haben offenbar zwei gemeinschaftliche Punkte, nämlich $\mathfrak{O}$ und den Schnittpunkt $(|\mathfrak{A}_m \mathfrak{A}_n|, |\mathfrak{B}_m \mathfrak{B}_n|)$, folglich noch eine immer reelle gemeinschaftliche Sekante l, welche die vorgelegte Aufgabe löst. Denn die beiden übrigen gemeinschaftlichen Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ der Kegelschnitte $\mathfrak{K}_m^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_n^{(2)}$ auf der gemeinschaftlichen Sekante l bleiben unverändert dieselben, wie wir auch die willkürlich gewählten Paare $\mathfrak{A}_m \mathfrak{B}_m$ und $\mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_n$ verändern mögen. In der That, nehmen wir einen dieser beiden Punkte, $\mathfrak{x}$, so schneiden sich in ihm wegen des ersten Kegelschnitts zwei Strahlen $|\mathfrak{A}_m \mathfrak{A}_{m_1}|$ und $|\mathfrak{B}_m \mathfrak{B}_{m_1}|$ und gleich-

zeitig wegen des zweiten Kegelschnitts $|\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_{n_1}|$ und $|\mathfrak{B}_n \mathfrak{B}_{n_1}|$. Da nun alle Sehnen, die durch $\mathfrak{x}$ gezogen werden, auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ Punktepaare ausschneiden, die mit $\mathfrak{O}$ verbunden eine Strahleninvolution liefern, und wegen der Projektivität der Strahlenbüschel $\mathfrak{O}|\mathfrak{A}_x|$ und $\mathfrak{O}|\mathfrak{B}_x|$, die entsprechenden Punktepaare auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{B}^{(2)}$ mit $\mathfrak{O}$ verbunden, auch eine Strahleninvolution liefern, also ihre Sehnen auch durch einen und denselben Punkt laufen müssen, dieser Punkt aber durch die beiden Sehnen $|\mathfrak{B}_m \mathfrak{B}_{m_1}|$ und $|\mathfrak{B}_n \mathfrak{B}_{n_1}|$ schon bestimmt wird und derselbe Punkt $\mathfrak{x}$ ist, so erkennen wir, dafs alle durch $\mathfrak{x}$ gezogenen Sehnen des Kegelschnitts $\mathfrak{A}^{(2)}$ zu entsprechenden Sehnen des Kegelschnitts $\mathfrak{B}^{(2)}$ solche haben, die ebenfalls durch $\mathfrak{x}$ laufen. Dasselbe gilt für den Punkt $\mathfrak{y}$. Nun giebt es aber nur eine Sehne $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ in dem Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, deren entsprechende Sehne im Kegelschnitte $\mathfrak{B}^{(2)}$ sowohl durch $\mathfrak{x}$ als auch durch $\mathfrak{y}$ gehen mufs, also schneidet $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ die Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ gleichzeitig in zwei Paaren von entsprechenden Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.*) Diese Gerade l erfüllt also die geforderte Bedingung und geht nicht durch $\mathfrak{O}$. Legen wir daher durch l_1 l_2 und l ein Hyperboloid $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$, durch l_3 l_4 l ein zweites Hyperboloid $\mathfrak{H}_{34}^{(2)}$, so ist die aufser l ihnen gemeinschaftliche Raumkurve $C^{(3)}$ die gesuchte; sie wird durch $\mathfrak{a}_1$ gehen und sowohl l_1 l_2 l_3 l_4, als auch l_5 zur Sekanten haben.

Wir bemerken noch, dafs diese Konstruktion linear ist, denn sie erfordert schliefslich für zwei durch Punkte gegebene Kegelschnitte $\mathfrak{K}_m^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_n^{(2)}$), von denen zwei gemeinschaftliche Punkte gegeben sind, die übrige gemeinschaftliche Sekante zu konstruieren, was auf bekannte Weise durch das Lineal allein ausführbar ist.

Es bliebe jetzt noch die Aufgabe übrig: Eine Raumkurve $C^{(3)}$ zu konstruieren, welche sechs gegebene Gerade zu Sekanten hat; allein diese Aufgabe unterscheidet sich von den vorigen wesentlich dadurch, dafs sie nicht mehr eindeutig ist, sondern im allgemeinen sechs Lösungen zuläfst. Da ein Eingehen auf diese Untersuchung zu weit abführen würde, so müssen wir auf die oben an-

*) Siehe Crelle-Borchardt's Journal f. r. u. a. Mathem. Bd. 54, S. 44.

geführten Abhandlungen von L. Cremona und R. Sturm verweisen.

Schliefslich wollen wir aber noch auf das Zerfallen der Raumkurve dritter Ordnung aufmerksam machen. Wenn nämlich die drei zur Erzeugung derselben gegebenen projektivischen Ebenenbüschel mit den Axen l_1 l_2 l_3 sich in der besonderen Lage befinden, dafs einmal drei entsprechende Ebenen sich nicht, wie im allgemeinen, in einem Punkte, sondern in einer und derselben Geraden schneiden, dann sind alle Punkte dieser Geraden g dem Orte $C^{(3)}$ angehörig und von demselben löst sich diese Gerade ab; verbinden wir von dem übrigen Orte irgend drei Punkte durch eine Ebene, so schneidet dieselbe das Hyperboloid $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ in einem Kegelschnitt, welchem diese drei Punkte und aufserdem ihr Schnittpunkt mit g und ihr Schnittpunkt mit l_1 angehört, also fünf Punkte, durch welche ihr Kegelschnitt gerade bestimmt wird. Dieselbe Ebene schneidet aber auch das Hyperboloid $\mathfrak{H}_{13}^{(2)}$ in einem Kegelschnitt, dem dieselben fünf Punkte angehören müssen, also fallen beide Kegelschnitte identisch zusammen und bilden den andern Teil der Raumkurve $C^{(3)}$; da die Gerade g dem Kegelschnitte nur in einem Punkte begegnet, so schliefsen wir:

Eine Raumkurve $C^{(3)}$ kann zerfallen in eine gerade Linie und einen Kegelschnitt, welcher von der geraden Linie in einem Punkte getroffen wird.

Insbesondere kann auch dieser Kegelschnitt noch in ein Linienpaar zerfallen, wenn nämlich die beiden Hyperboloide $\mathfrak{H}_{12}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_{13}^{(2)}$ ein windschiefes Vierseit gemein haben, also:

Eine Raumkurve $C^{(3)}$ kann zerfallen in drei gerade Linien, von denen eine den beiden andern begegnen mufs.

§ 34. Die Tangenten und Schmiegungsebenen der Raumkurve 3. Ordnung.

Obwohl wir bereits beiläufig auf S. 239 eine Konstruktion der Tangente und der Schmiegungsebene in einem beliebigen Punkte der Raumkurve $C^{(3)}$ gegeben haben, so wollen wir doch jetzt näher auf diese Elemente der Kurve eingehen.

Die Tangente in einem Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ gehört zu dem System der gesamten Sekanten derselben und ist eine solche besondere Sekante, deren beide Schnittpunkte mit $C^{(3)}$ zusammenfallen. Denken wir uns dieselbe $t_{\mathfrak{x}}$ gezogen und legen von irgend einem Punkte $\mathfrak{a}$ der $C^{(3)}$ den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$, welcher $\mathfrak{a}$ mit sämtlichen Punkten der Raumkurve verbindet, so wird $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ ein Kegelstrahl sein, und die Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{a}^{(2)}$ längs dieses Kegelstrahls wird durch die Tangente $t_{\mathfrak{x}}$ gehen müssen, weil sie der $C^{(3)}$ in zwei zusammenfallenden Punkten begegnen muſs. Konstruieren wir also noch von einem beliebigen zweiten Punkte $\mathfrak{b}$ der Raumkurve den Kegel $\mathfrak{b}^{(2)}$, welcher durch dieselbe geht und die Berührungsebene desselben längs des Kegelstrahls $|\mathfrak{b}\mathfrak{x}|$, so schneidet diese Berührungsebene die vorige in der gesuchten Tangente $t_{\mathfrak{x}}$ im Punkte $\mathfrak{x}$ der $C^{(3)}$.

Die Konstruktion der Tangente für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ der $C^{(3)}$ gestaltet sich also folgendermaſsen:

Man wähle zwei beliebige Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der gegebenen Raumkurve $C^{(3)}$ und konstruiere, indem man dieselben mit allen übrigen Punkten derselben durch Strahlen verbindet, diejenigen beiden Kegel

$$\mathfrak{a}^{(2)} \text{ und } \mathfrak{b}^{(2)},$$

als deren übriger Durchschnitt (auſser der Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$) die $C^{(3)}$ erscheint. Legt man längs der Kegelstrahlen $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{x}|$ die Berührungsebenen beider Kegel, so ist die Schnittlinie derselben die Tangente $t_{\mathfrak{x}}$ im Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve.

Um die Tangenten der $C^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ selbst zu finden, bemerken wir, daſs diese selbst Kegelstrahlen von $\mathfrak{a}^{(2)}$ und $\mathfrak{b}^{(2)}$ sein müssen, und da die Tangente in $\mathfrak{b}$ in der Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{a}^{(2)}$ längs des Strahles $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ liegen muſs, so ist sie diejenige Gerade, in welcher der Kegel $\mathfrak{b}^{(2)}$ von der Berührungsebene am Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ längs des Kegelstrahles $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ zum andern Male geschnitten wird; d. h.:

Ziehen wir den gemeinschaftlichen Kegelstrahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ der beiden Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ und $\mathfrak{b}^{(2)}$ und legen durch denselben die Berührungsebenen α und β beider Kegel, so schneiden dieselben den jedesmaligen andern Kegel ($\mathfrak{b}^{(2)}$ und $\mathfrak{a}^{(2)}$) längs derjenigen Kegelstrahlen, welche die Tangenten in den Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ der $C^{(3)}$ sind.

Hiernach können wir die Tangente an irgend einem Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ auch dadurch finden, daſs wir den Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$ selbst konstruieren, dessen Strahlen $\mathfrak{x}$ mit sämtlichen Punkten der $C^{(3)}$ verbinden und auſserdem einen beliebigen andern Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ von irgend einem Punkte $\mathfrak{a}$ der Raumkurve aus durch dieselbe legen. Durch den Kegelstrahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ des Kegels $\mathfrak{a}^{(2)}$ legen wir die Berührungsebene an letzterem, dann wird dieselbe den Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$ nur noch in einem zweiten Strahle (auſser $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$) schneiden, welcher die gesuchte Tangente $t_{\mathfrak{x}}$ ist.

Denken wir uns die Ebene, welche den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ längs des Kegelstrahles $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ berührt und notwendig durch die Tangente $t_{\mathfrak{x}}$ im Punkte $\mathfrak{x}$ der $C^{(3)}$ gehen muſs, verändert, indem wir $\mathfrak{x}$, also auch $t_{\mathfrak{x}}$ festhalten, und $\mathfrak{a}$ auf der $C^{(3)}$ fortbewegen, so erhalten wir ein Ebenenbüschel mit der festen Axe $t_{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{a}$ als jedesmaligen dritten Schnittpunkt der veränderlichen Ebene des Büschels mit der $C^{(3)}$. Die Gerade $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ durchläuft dabei die Strahlen des Kegels $\mathfrak{x}^{(2)}$, und sobald dieser veränderliche Kegelstrahl mit dem festen Kegelstrahle $t_{\mathfrak{x}}$ zusammenfällt, rückt auch der dritte Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{x}$, d. h. diejenige Ebene, welche den Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$ längs des Kegelstrahles $t_{\mathfrak{x}}$ berührt, hat in $\mathfrak{x}$ drei zusammenfallende Punkte mit der Raumkurve gemein. Eine solche Ebene nennt man bekanntlich Schmiegungsebene der Raumkurve.

Wir erhalten somit folgende Konstruktion der Schmiegungsebene in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{x}$ der $C^{(3)}$:

Man lege von $\mathfrak{x}$ aus denjenigen Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$, dessen Strahlen durch $C^{(3)}$ gehen und konstruiere nach dem Obigen denjenigen besonderen Kegelstrahl $t_{\mathfrak{x}}$, welcher $C^{(3)}$ in $\mathfrak{x}$ berührt. Die Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{x}^{(2)}$ längs dieses Kegelstrahls $t_{\mathfrak{x}}$ ist die gesuchte Schmiegungsebene der Raumkurve $C^{(3)}$ am Punkte $\mathfrak{x}$.

Aus dieser Konstruktion der Schmiegungsebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ in $\mathfrak{x}$ geht zugleich hervor, daſs sie auſser durch die festgehaltene Tangente $t_{\mathfrak{x}}$ zugleich durch die unendlich nahe Tangente gehen muſs, in welche die Sekante $|\mathfrak{x}\mathfrak{a}|$ bei der Fortsetzung der Bewegung bis zur Grenzlage übergeht. Die Schmiegungsebene verbindet also zwei unmittelbar einander folgende Tan-

genten der Raumkurve, wie die Tangente selbst zwei unmittelbar einander folgende Punkte der Kurve verbindet.

Nehmen wir die Tangenten $t_{\mathfrak{a}}$ und $t_{\mathfrak{b}}$ in zwei Punkten der Raumkurve als Axen zweier Ebenenbüschel, welche nach sämtlichen Punkten $\mathfrak{x}$ der $C^{(3)}$ hingehen, so erzeugen sie ein Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, welches durch die Raumkurve hindurchgeht; der Ebene $[t_{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}]$ entspricht im Ebenenbüschel $t_{\mathfrak{a}}$ offenbar die Schmiegungsebene $\tau_{\mathfrak{a}}$ im Punkte $\mathfrak{a}$ der Raumkurve und der Ebene $[t_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}]$ entspricht die Schmiegungsebene $\tau_{\mathfrak{b}}$; die beiden Strahlen:

$$|[\mathfrak{a}t_{\mathfrak{b}}],\ \tau_{\mathfrak{a}}| = g \quad \text{und} \quad |[\mathfrak{b}t_{\mathfrak{a}}],\ \tau_{\mathfrak{b}}| = g'$$

sind zwei Erzeugende des Hyperboloids und gehören derjenigen Regelschar desselben an, welche der Raumkurve $C^{(3)}$ nur in je einem Punkte begegnet, während alle Erzeugenden der andern Regelschar, zu welcher $t_{\mathfrak{a}}$ und $t_{\mathfrak{b}}$ gehören, der Raumkurve in je zwei Punkten begegnen, d. h. Sekanten derselben sind. Da nun jede Erzeugende der einen Regelschar eines Hyperboloids allen Erzeugenden der andern Regelschar begegnen mufs, so erhalten wir den Satz:

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Punkte einer Raumkurve $C^{(3)}$, $t_{\mathfrak{a}}$ und $t_{\mathfrak{b}}$ die Tangenten in denselben und $\tau_{\mathfrak{a}}$ und $\tau_{\mathfrak{b}}$ die Schmiegungsebenen und schneidet die Ebene $[\mathfrak{a}t_{\mathfrak{b}}]$ die Schmiegungsebene $\tau_{\mathfrak{a}}$ in der Geraden g, die Ebene $[\mathfrak{b}t_{\mathfrak{a}}]$ die Schmiegungsebene $\tau_{\mathfrak{b}}$ in g', so besitzen die Geraden g und g' die Eigenschaft, dafs jede Sekante der $C^{(3)}$, welche g trifft, auch g' treffen mufs, d. h. eine Gerade, welche durch irgend einen Punkt $\mathfrak{x}$ der Raumkurve so gezogen wird, dafs sie g und g' trifft, eine Sekante der Raumkurve sein mufs, also ihr noch in einem zweiten Punkte $\mathfrak{x}'$ begegnet.

Auch ist unmittelbar ersichtlich, dafs, wenn wir die Schnittpunkte dieser Sekante mit den Geraden g und g' durch $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ bezeichnen, die beiden Punktepaare $\mathfrak{g}\mathfrak{g}'$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}')$ einander harmonisch trennen; denn sobald wir eine Sekante $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ der Raumkurve mit allen Punktepaaren auf der Erzeugenden derjenigen Regelschar eines durch $C^{(3)}$ gelegten Hyperboloids, welche der $C^{(3)}$ in je zwei Punkten

begegnen, durch Ebenenpaare verbinden, so erhalten wir eine Ebeneninvolution (S. 235). Unter dieser Regelschar kommen nun auf unserem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ die Tangenten $t_\mathfrak{a}$ und $t_\mathfrak{b}$ vor; die Ebenen $[t_\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ und $[t_\mathfrak{b}\mathfrak{a}]$ sind also Doppelebenen der hyperbolischen Ebeneninvolution und trennen daher jedes Paar konjugierter Ebenen $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}]$ und $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}']$ harmonisch. Die Ebenen $[t_\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ und $[t_\mathfrak{b}\mathfrak{a}]$ gehen aber durch $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$, folglich werden $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ harmonisch getrennt.

Denken wir uns sämtliche Tangenten der Raumkurve $C^{(3)}$ konstruiert, so bilden dieselben eine geradlinige Fläche, welche abwickelbar ist, weil je zwei auf einander folgende Lagen der bewegten geraden Linie (Tangente) in einer Ebene (der Schmiegungsebene) liegen. Um den Grad dieser geradlinigen abwickelbaren Fläche, deren „Rückkehrkante“ (arête de rebroussement) die Raumkurve genannt zu werden pflegt, zu ermitteln, beantworten wir folgende Frage:

Wie viele Tangenten einer $C^{(3)}$ können im allgemeinen (höchstens) einer beliebig im Raume angenommenen Geraden g begegnen?

Um diese Frage zu beantworten, denken wir uns $C^{(3)}$ als den Schnitt zweier Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ und $\mathfrak{b}^{(2)}$, welche den Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ als gemeinsamen Kegelstrahl haben; irgend eine durch $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ gelegte Ebene schneidet dann die Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ und $\mathfrak{b}^{(2)}$ in den übrigen Kegelstrahlen x und y (welche sich in einem Punkte $\mathfrak{x}$ der $C^{(3)}$ treffen), und die beiden Berührungsebenen längs der Kegelstrahlen x und y an den Kegeln $\mathfrak{a}^{(2)}$ und $\mathfrak{b}^{(2)}$ schneiden sich in einer Tangente $t_\mathfrak{x}$ der Raumkurve.

Denken wir uns nun auf der gegebenen Geraden g einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{p}$ und legen durch den Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{p}|$ die beiden Berührungsebenen an den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$, welche denselben in dem Strahlenpaar x und x' berühren, so ist $[xx']$ die Polarebene von $|\mathfrak{a}\mathfrak{p}|$ in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$, und bei der Bewegung von $\mathfrak{p}$ auf g wird bekanntlich die Polarebene des Strahls $|\mathfrak{a}\mathfrak{p}|$ durch einen festen Strahl laufen; folglich mufs das Strahlenpaar xx' mit dem festen Kegelstrahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ verbunden, Ebenenpaare einer Involution liefern, und die Ebenenpaare dieser Involution schneiden wiederum aus dem Kegel $\mathfrak{b}^{(2)}$ Strahlenpaare yy' aus, deren Verbindungsebene darum auch durch einen festen Strahl läuft; sodann folgt aus bekannten Eigenschaften

des Kegels (oder Kegelschnitts), dafs die Punktreihe, welche $\mathfrak{p}$ durchläuft, mit dem Ebenenbüschel, welches die Ebene $[xx']$ beschreibt, und auch mit dem Ebenenbüschel, welches die Ebene $[yy']$ beschreibt, projektivisch ist.

Legen wir nun andererseits durch den Strahl $|\mathfrak{b}\mathfrak{p}|$ das Berührungsebenenpaar an den Kegel $\mathfrak{b}^{(2)}$, und seien die Berührungsstrahlen desselben $y_1\,y_1'$, so wird bei der Bewegung von $\mathfrak{p}$ auf g auch die Ebene $[y_1y_1']$, die Polarebene des Strahles $|\mathfrak{b}\mathfrak{p}|$ in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{b}^{(2)}$, sich um einen festen Strahl drehen und ein Ebenenbüschel beschreiben, welches mit der von $\mathfrak{p}$ durchlaufenen Punktreihe projektivisch ist. Die beiden Ebenen $[yy']$ und $[y_1y_1']$ beschreiben also auch zwei projektivische Ebenenbüschel und erzeugen daher einen Kegel $\mathfrak{b}_1^{(2)}$, welcher den Punkt $\mathfrak{b}$ zum Mittelpunkt hat. Wenn es nun einmal vorkäme, dafs ein y mit einem y_1 koinzidierte, so müfsten die beiden Berührungsebenen längs der Strahlen x und y der Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ und $\mathfrak{b}^{(2)}$ sich in einer Geraden schneiden, welche durch denselben Punkt $\mathfrak{p}$ der Geraden g ginge, also eine Tangente der $C^{(3)}$ träfe g, was zu ermitteln verlangt wurde. Jenes Koinzidieren tritt aber notwendig ein, sobald zwei entsprechende Ebenen $[yy']$ und $[y_1y_1']$ sich in einem Strahle des Kegels $\mathfrak{b}^{(2)}$ schneiden, d. h. in den gemeinschaftlichen Strahlen der beiden konzentrischen Kegel $\mathfrak{b}^{(2)}$ und $\mathfrak{b}_1^{(2)}$, also bekanntlich im allgemeinen viermal; wir haben also folgendes Resultat:

Eine beliebige Gerade g im Raume wird im allgemeinen (höchstens) von vier Tangenten einer Raumkurve $C^{(3)}$ getroffen, oder: Die geradlinige abwickelbare Fläche, welche von sämtlichen Tangenten einer Raumkurve $C^{(3)}$ gebildet wird, ist vom vierten Grade.

Um das Gesetz, welchem sämtliche Schmiegungsebenen einer Raumkurve $C^{(3)}$ unterworfen sind, näher zu erforschen, müssen wir die Frage beantworten:

Wieviel Schmiegungsebenen einer $C^{(3)}$ können im allgemeinen (höchstens) durch einen beliebig gegebenen Punkt $\mathfrak{o}$ im Raume gehen?

Zur Beantwortung dieser Frage führt folgende Betrachtung:

Seien $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ drei beliebige Punkte einer Raumkurve $C^{(3)}$ und $\mathfrak{a}^{(2)}$ $\mathfrak{b}^{(2)}$ $\mathfrak{c}^{(2)}$ die drei Kegel zweiten Grades, deren Strahlen jeden der drei Punkte mit allen übrigen Punkten der Raumkurve verbinden, dann werden $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$, die drei Seiten des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ gemeinschaftliche Strahlen je zweier Kegel sein, welche sich aufserdem alle drei in der gegebenen Raumkurve $C^{(3)}$ schneiden. Die Berührungsebenen dieser drei Kegel längs der gemeinschaftlichen Strahlen mögen so bezeichnet werden:

Berührungsebene am Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ längs $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ heifse $\alpha_{\mathfrak{b}}$
" " " $\mathfrak{a}^{(2)}$ " $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ " $\alpha_{\mathfrak{c}}$
" " " $\mathfrak{b}^{(2)}$ " $|\mathfrak{b}\mathfrak{a}|$ " $\beta_{\mathfrak{a}}$
" " " $\mathfrak{b}^{(2)}$ " $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ " $\beta_{\mathfrak{c}}$
" " " $\mathfrak{c}^{(2)}$ " $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$ " $\gamma_{\mathfrak{a}}$
" " " $\mathfrak{c}^{(2)}$ " $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|$ " $\gamma_{\mathfrak{b}}$.

Die drei Schmiegungsebenen in den Punkten $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ mögen bezeichnet werden durch

$$\tau_{\mathfrak{a}} \quad \tau_{\mathfrak{b}} \quad \tau_{\mathfrak{c}},$$

die Tangenten in den drei Punkten $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ durch

$$t_{\mathfrak{a}} \quad t_{\mathfrak{b}} \quad t_{\mathfrak{c}},$$

dann ist nach der obigen Konstruktion die Tangente:

$$t_{\mathfrak{a}} = |\beta_{\mathfrak{a}}, \gamma_{\mathfrak{a}}| \quad t_{\mathfrak{b}} = |\gamma_{\mathfrak{b}}, \alpha_{\mathfrak{b}}| \quad t_{\mathfrak{c}} = |\alpha_{\mathfrak{c}}, \beta_{\mathfrak{c}}|,$$

und da die Schmiegungsebene im Punkte $\mathfrak{a}$ durch die Tangente $t_{\mathfrak{a}}$ gehen mufs, so schneiden sich:

$\beta_{\mathfrak{a}}$ $\gamma_{\mathfrak{a}}$ $\tau_{\mathfrak{a}}$ in der Geraden $t_{\mathfrak{a}}$
$\gamma_{\mathfrak{b}}$ $\alpha_{\mathfrak{b}}$ $\tau_{\mathfrak{b}}$ " " " $t_{\mathfrak{b}}$
$\alpha_{\mathfrak{c}}$ $\beta_{\mathfrak{c}}$ $\tau_{\mathfrak{c}}$ " " " $t_{\mathfrak{c}}$.

Wir können dies auch etwas anders aussprechen: Wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ zwei Punkte der Raumkurve, $\mathfrak{x}^{(2)}$ der von $\mathfrak{x}$ aus durch dieselbe gelegte Kegel und $\xi_{\mathfrak{a}}$ die Berührungsebene desselben längs des Kegelstrahls $|\mathfrak{x}\mathfrak{a}|$, wenn ferner $t_{\mathfrak{a}}$ die Tangente im Punkte der Raumkurve, so liegt $t_{\mathfrak{a}}$ in der Ebene $\xi_{\mathfrak{a}}$; halten wir $\mathfrak{a}$ fest und bewegen $\mathfrak{x}$ längs der Raumkurve fort, so erhalten wir folgenden Satz:

Zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ gehört ein bestimmter Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$, welcher von $\mathfrak{x}$ aus per-

spektivisch durch die Raumkurve gelegt werden kann. Verbinden wir den veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ mit einem festen Punkt $\mathfrak{a}$ der Raumkurve und konstruieren für sämtliche Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$ die Berührungsebenen längs der Kegelstrahlen $|\mathfrak{x}\mathfrak{a}|$, so laufen dieselben durch eine feste Gerade $t_{\mathfrak{a}}$, die Tangente der Raumkurve in dem festgehaltenen Punkte $\mathfrak{a}$, und beschreiben also ein Ebenenbüschel.

Nehmen wir einen zweiten festen Punkt $\mathfrak{b}$ der Raumkurve, so erhalten wir ein zweites Ebenenbüschel, dessen Axe $t_{\mathfrak{b}}$ ist, die Tangente im Punkte $\mathfrak{b}$ der Raumkurve. Die beiden Ebenenbüschel $t_{\mathfrak{a}}[\mathfrak{x}]$ und $t_{\mathfrak{b}}[\mathfrak{x}]$ müssen projektivisch sein, nach der Definition der Raumkurve (S. 232) durch projektivische Ebenenbüschel; also die Schnittlinie von $[t_{\mathfrak{a}}\mathfrak{x}]$ und $[t_{\mathfrak{b}}\mathfrak{x}]$ durchläuft eine Regelschar eines Hyperboloids, auf dem die Raumkurve liegt; diese Schnittlinie ist der Polarstrahl der Ebene $[\mathfrak{x}\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$, denn er ist der Schnittstrahl der beiden Berührungsebenen dieses Kegels längs der Kegelstrahlen $|\mathfrak{x}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{x}\mathfrak{b}|$. Also gilt folgender Satz:

Wenn man um eine feste Sekante $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ einer Raumkurve $C^{(3)}$ eine veränderliche Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}]$ dreht, welche derselben in einem dritten Punkte $\mathfrak{x}$ begegnet, so ist $\mathfrak{x}$ der Mittelpunkt eines durch die Raumkurve gehenden Kegels $\mathfrak{x}^{(2)}$; konstruiert man den Polarstrahl zu dieser veränderlichen Ebene in Bezug auf den veränderlichen Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$, so beschreibt der Polarstrahl eine Regelschar eines Hyperboloids, welches durch die Raumkurve geht und die beiden Tagenten $t_{\mathfrak{a}}$ und $t_{\mathfrak{b}}$ in den festen Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Raumkurve zu Erzeugenden hat.

Dieser Satz gilt auch für eine Sekante, welche der Raumkurve in zwei konjugiert-imaginären Punkten begegnet; kehren wir jedoch zur ursprünglichen Betrachtung zurück.

Wir haben als Schmiegungebene $\tau_{\mathfrak{a}}$ diejenige gefunden, welche den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $t_{\mathfrak{a}}$ berührt; folglich haben wir auf dem Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ drei Strahlen:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{c}| \quad t_{\mathfrak{a}}$$

und die Berührungsebenen längs derselben

$$\alpha_{\mathfrak{b}} \quad \alpha_{\mathfrak{c}} \quad \tau_{\mathfrak{a}}.$$

Eine solche räumliche Figur ist die Perspektive eines Kegelschnitts, von dem drei Punkte und die Tangenten in denselben bekannt sind; nach bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte folgt, dafs die drei Seitenflächen unseres Dreikants die gegenüberliegenden Berührungsebenen in drei Geraden einer Ebene schneiden müssen.

Nun ist, wie wir aus der obigen Bezeichnung ersehen, die Verbindungslinie $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ identisch mit der Schnittlinie $|\alpha_{\mathfrak{b}}\beta_{\mathfrak{a}}|$ und die Verbindungslinie $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ identisch mit der Schnittlinie $|\alpha_{\mathfrak{c}}\gamma_{\mathfrak{a}}|$, die Tangente $t_{\mathfrak{a}}$ identisch mit der Schnittlinie $|\gamma_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{a}}|$.

Wir können daher die vorigen drei Kegelstrahlen des Kegels $\mathfrak{a}^{(2)}$ und die Berührungsebenen längs derselben auch so ausdrücken:

$$|\alpha_{\mathfrak{b}}\beta_{\mathfrak{a}}| \quad |\alpha_{\mathfrak{c}}\gamma_{\mathfrak{a}}| \quad |\gamma_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{a}}|$$

und

$$\alpha_{\mathfrak{b}} \quad \alpha_{\mathfrak{c}} \quad \tau_{\mathfrak{a}}.$$

Der vorige Satz zeigt also, wenn wir $\varepsilon = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ bezeichnen, dafs die drei Schnittlinien:

1) $$|\beta_{\mathfrak{a}}\alpha_{\mathfrak{c}}| \quad |\gamma_{\mathfrak{a}}\alpha_{\mathfrak{b}}| \quad |\varepsilon\tau_{\mathfrak{a}}|$$

in einer Ebene ε_1 liegen müssen; in gleicher Weise erkennen wir, dafs die drei Schnittlinien:

2) $$|\gamma_{\mathfrak{b}}\beta_{\mathfrak{a}}| \quad |\alpha_{\mathfrak{b}}\beta_{\mathfrak{c}}| \quad |\varepsilon\tau_{\mathfrak{b}}|$$

in einer andern Ebene ε_2 liegen, und endlich, dafs die Schnittlinien:

3) $$|\alpha_{\mathfrak{c}}\gamma_{\mathfrak{b}}| \quad |\beta_{\mathfrak{c}}\gamma_{\mathfrak{a}}| \quad |\varepsilon\tau_{\mathfrak{c}}|$$

in einer dritten Ebene ε_3 liegen müssen.

Nun schneiden sich aber die drei Ebenen:

$$\alpha_{\mathfrak{c}} \quad \beta_{\mathfrak{a}} \quad \gamma_{\mathfrak{b}} \quad \text{in einem Punkte } \mathfrak{p},$$

die drei Ebenen:

$$\alpha_{\mathfrak{b}} \quad \beta_{\mathfrak{c}} \quad \gamma_{\mathfrak{a}} \quad \text{in einem Punkte } \mathfrak{p}_1,$$

und es ist unmittelbar ersichtlich, dafs der Punkt $\mathfrak{p}$ sowohl in der Ebene ε_1, als auch in ε_2 und in ε_3 liegt, und ebenso, dafs $\mathfrak{p}_1$ in jeder dieser drei Ebenen liegt; daraus folgt, dafs

sie sich in einer Geraden schneiden, weil sie alle drei zwei Punkte gemeinschaftlich haben; und da sich also $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ in einer Geraden schneiden, welche der Ebene ε in einem Punkte $\mathfrak{o}$ begegnet, durch welchen, wie wir sehen, $\tau_\mathfrak{a}\ \tau_\mathfrak{b}\ \tau_\mathfrak{c}$ gehen müssen, so folgt der Hauptsatz: (Chasles l. c.)

Die Schmiegungsebenen in drei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ einer Raumkurve $C^{(3)}$ schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{o}$ der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$.

Hieraus folgt sofort die Antwort auf die oben vorgelegte Frage. Denn da sich drei Ebenen immer in einem Punkte schneiden, so müssen durch einen Punkt $\mathfrak{o}$ im Raume mindestens drei Schmiegungsebenen einer $C^{(3)}$ gehen; es können aber auch nicht mehr als drei Schmiegungsebenen durch ihn gehen, denn ginge noch eine vierte Schmiegungsebene durch ihn hindurch, so müfste die Ebene, welche $\mathfrak{o}$ mit den Berührungspunkten der beiden ersten Schmiegungsebenen verbindet, sowohl den Berührungspunkt der dritten, als auch der vierten Schmiegungsebene enthalten, also überhaupt vier Punkte der Raumkurve enthalten, was unmöglich ist, weil dieselbe nur vom dritten Grade ist, also:

Durch einen beliebigen Punkt im Raume gehen im allgemeinen (höchstens) drei Schmiegungsebenen einer Raumkurve dritter Ordnung.

§ 35. Identität der Raumkurve dritter Ordnung und der Raumkurve dritter Klasse.

Das zuletzt gewonnene Resultat gestattet wichtige Folgerungen:

Nehmen wir drei Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{x}$ einer Raumkurve $C^{(3)}$ und die drei Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}\ \tau_\mathfrak{b}\ \tau_\mathfrak{x}$ in ihnen, so sagt der obige Satz aus, dafs der Schnittpunkt der letzteren in der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}]$ liegen mufs. Halten wir aber die beiden Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}$ fest und verändern den dritten, $\mathfrak{x}$, auf der Raumkurve $C^{(3)}$, so bleiben auch die beiden Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}$ und $\tau_\mathfrak{b}$ fest, und der Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen verändert sich auf der festen Geraden $|\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{b}|$; nennen wir diesen Schnittpunkt $\mathfrak{o}$, so können wir sagen, dafs $\mathfrak{o}$ eine gerade Punktreihe durchläuft, die mit dem Ebenenbüschel, welches die

Ebene [$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}$] um die feste Axe |$\mathfrak{a}\mathfrak{b}$| beschreibt, perspektivisch liegt, also projektivisch ist. Wir können nunmehr folgenden Satz aussprechen:

Sind in zwei festen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ einer $C^{(3)}$ die Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}$ und $\tau_\mathfrak{b}$ konstruiert und dreht man um |$\mathfrak{a}\mathfrak{b}$| eine veränderliche Ebene, welche der Raumkurve in dem dritten Punkte $\mathfrak{x}$ begegnet, so wird die Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{x}$ im Punkte $\mathfrak{x}$ der Schnittlinie |$\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{b}$| in einer Punktreihe begegnen, welche mit dem von der veränderlichen Ebene beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch ist und perspektivisch liegt.

Nehmen wir jetzt drei feste Punkte $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ und verbinden einen vierten veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ derselben mit den vorigen durch die Ebenen:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}] \text{ und } [\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{x}],$$

so beschreibt die Schnittlinie derselben |$\mathfrak{a}\mathfrak{x}$| einen Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$, auf welchem $C^{(3)}$ liegt; die Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}$ $\tau_\mathfrak{b}$ $\tau_\mathfrak{c}$ $\tau_\mathfrak{x}$ liefern die beiden festen Schnittlinien:

$$|\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{b}| \text{ und } |\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{c}|,$$

auf welchen die veränderliche Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{x}$ zwei Punktreihen ausschneidet, welche mit den Ebenenbüscheln |$\mathfrak{a}\mathfrak{b}$|[$\mathfrak{x}$] und |$\mathfrak{a}\mathfrak{c}$|[$\mathfrak{x}$] perspektivisch liegen; da diese aber projektivisch sind, so müssen auch jene projektivisch sein, also wird die Schnittlinie

$$|\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{x}|$$

in der festen Ebene $\tau_\mathfrak{a}$ einen Kegelschnitt umhüllen, der zugleich die beiden Schnittlinien |$\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{b}$| und |$\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{c}$|, die Träger der projektivischen Punktreihen, berührt. Wir erhalten somit den Satz:*)

Die sämtlichen Schmiegungsebenen einer Raumkurve $C^{(3)}$ scheiden auf einer beliebigen festgehaltenen Schmiegungsebene derselben gerade Linien aus, welche einen Kegelschnitt umhüllen.

Nehmen wir nun die drei Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}$ $\tau_\mathfrak{b}$ $\tau_\mathfrak{c}$ in den Punkten $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ der Raumkurve $C^{(3)}$, so erhalten wir

*) Möbius: Der barycentrische Calcul. S. 120.

nach dem vorigen Satze in jeder derselben einen bestimmten Kegelschnitt:

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}^{(2)} \quad \mathfrak{K}_{\mathfrak{b}}^{(2)} \quad \mathfrak{K}_{\mathfrak{c}}^{(2)}.$$

Diese Kegelschnitte müssen so liegen, daſs je zwei die Schnittlinie ihrer Ebenen gleichzeitig als gemeinsame Tangente haben. Nehmen wir aber eine beliebige Tangente $l_{\mathfrak{a}}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}^{(2)}$, eine beliebige Tangente $l_{\mathfrak{b}}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}_{\mathfrak{b}}^{(2)}$ und eine beliebige Tangente $l_{\mathfrak{c}}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}_{\mathfrak{c}}^{(2)}$. Da bekanntlich eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts zwei feste Tangenten desselben allemal in zwei projektivischen Punktreihen schneidet, so wird für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}^{(2)}$ eine veränderliche Schmiegungsebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ die Gerade $l_{\mathfrak{a}}$ und die Schnittlinie $|\tau_{\mathfrak{a}}\tau_{\mathfrak{b}}|$ in zwei projektivischen Punktreihen schneiden; ferner wird für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{b}}^{(2)}$ die Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ auch die Gerade $l_{\mathfrak{b}}$ und die Schnittlinie $|\tau_{\mathfrak{a}}\tau_{\mathfrak{b}}|$ sowie die Schnittlinie $|\tau_{\mathfrak{b}}\tau_{\mathfrak{c}}|$ in projektivischen Punktreihen schneiden, und endlich wird $\tau_{\mathfrak{x}}$ die Schnittlinie $|\tau_{\mathfrak{b}}\tau_{\mathfrak{c}}|$ und die Gerade $l_{\mathfrak{c}}$ in projektivischen Punktreihen schneiden, also schlieſslich wird $\tau_{\mathfrak{x}}$ alle drei Gerade $l_{\mathfrak{a}}\, l_{\mathfrak{b}}\, l_{\mathfrak{c}}$ in drei projektivischen Punktreihen schneiden.

Wir können hiernach die Gesamtheit der Schmiegungsebenen einer Raumkurve $C^{(3)}$ auffassen als die Gesamtheit solcher Ebenen, welche je drei entsprechende Punkte dreier projektivischen geraden Punktreihen $(l_{\mathfrak{a}}\, l_{\mathfrak{b}}\, l_{\mathfrak{c}})$ verbinden, d. h. als das Erzeugnis dreier projektivischer Punktreihen, welches dual gegenübersteht dem Erzeugnis dreier projektivischen Ebenenbüschel, von dessen Betrachtung wir ausgingen (S. 228). Dieselbe Raumkurve $C^{(3)}$ erscheint also, je nachdem wir ihre Punkte oder ihre Schmiegungsebenen auffassen als Erzeugnis dreier projektivischen Ebenenbüschel und als Erzeugnis dreier projektivischen Punktreihen.

Ebenso wie durch die kontinuierliche Bewegung eines Punktes im Raume ein Ort erzeugt wird, welchen man eine Raumkurve n^{ter} Ordnung nennt, sobald eine beliebige Ebene im allgemeinen (höchstens) n Punkte dieses Ortes enthalten kann, ebenso kann man den durch die kontinuierliche Bewegung einer Ebene im Raume erzeugten Ort eine Raumkurve n^{ter} Klasse nennen, sobald durch einen beliebigen

Punkt im allgemeinen (höchstens) n Ebenen des Ortes gehen können. Nach dieser Auffassung können wir den Satz aussprechen:

Die Raumkurve dritter Ordnung ist zugleich Raumkurve dritter Klasse und umgekehrt.

Diese wichtige Eigenschaft entspricht durchaus der Grundeigenschaft des ebenen Kegelschnitts, wenn man einerseits seine Punkte und andererseits seine Tangenten auffaſst und nachweist, daſs er gleichzeitig zweiter Ordnung und zweiter Klasse ist, d. h. daſs in einer Geraden im allgemeinen zwei Punkte des Kegelschnitts liegen, und durch einen Punkt zwei Tangenten des Kegelschnitts gehen. Dieselbe Eigenschaft bleibt auch noch bestehen bei den Oberflächen zweiter Ordnung und Klasse, und mit der gleichen Grundeigenschaft tritt hier zu beiden Gebilden die Raumkurve $C^{(3)}$.

Es bietet sich uns nunmehr ein zweiter Weg dar, welcher dem von uns eingeschlagenen dual gegenübersteht und ohne alle Schwierigkeit nach dem gegebenen Vorgange verfolgt werden kann. Indem wir von der Definition der Raumkurve dritter Klasse als des Erzeugnisses dreier projektivischen Punktreihen ausgehen, können wir die Raumkurve dritter Klasse so konstruieren:

Zwei Hyperboloide, die eine gemeinschaftliche Erzeugende l haben, seien gegeben; durch einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ der Geraden l geht allemal eine Erzeugende g^x des ersten und eine Erzeugende g_1^x des zweiten Hyperboloids aus den beiden Regelscharen der Hyperboloide, zu welchen l nicht gehört; die durch g^x und g_1^x gelegte Ebene beschreibt eine Raumkurve dritter Klasse.

Oder insbesondere:

Haben zwei Kegelschnitte in verschiedenen Ebenen die Schnittlinie derselben zu einer gemeinschaftlichen Tangente t, und legt man aus einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{x}$ der Tangente t allemal die zweite mögliche Tangente an jeden der beiden Kegelschnitte, so beschreibt die sie verbindende Ebene eine Raumkurve dritter Klasse.

Die Konstruktion der Tangente, d. i. Schnittlinie zweier unendlich-nahe einander folgenden Schmiegungsebenen und die

Konstruktion des Berührungspunktes in jeder Schmiegungsebene (Schnittpunktes dreier unendlich-nahe einander folgenden Schmiegungsebenen) dürfen wir als durchaus analog den oben ausgeführten Konstruktionen hier übergehen. Jedoch empfehlen wir dem Leser die Untersuchung der verschiedenen Konstruktionen der Raumkurve $C^{(3)}$, wenn zu ihrer Bestimmung Elemente gegeben sind, welche aus Punkten, Tangenten und Schmiegungsebenen derselben zugleich bestehen.

Entsprechend dem gesamten Sekantensystem der Raumkurve dritter Ordnung erhalten wir ein System von Schnittlinien je zweier Schmiegungsebenen einer Raumkurve dritter Klasse. Irgend zwei solcher Schnittlinien werden von sämtlichen Schmiegungsebenen der Raumkurve allemal in zwei projektivischen Punktreihen geschnitten, deren Erzeugnis ein Hyperboloid ist, welches von den Schmiegungsebenen der Raumkurve berührt wird. Von den beiden Regelscharen dieses Hyperboloids enthält diejenige, welcher die ursprünglich angenommenen beiden Schnittlinien angehören, alle solche Gerade, durch welche je zwei Schmiegungsebenen der Raumkurve hindurchgehen, dagegen die andere Regelschar solche Gerade, durch welche nur eine Schmiegungsebene der Raumkurve geht. Jene Regelschar gehört also dem Systeme der Schnittlinien an. In einer beliebig angenommenen Ebene liegt allemal eine und nur eine solche Gerade, welche Schnittlinie zweier (reellen oder imaginären) Schmiegungsebenen der Raumkurve ist u. s. w. u. s. w.

Sowie die sämtlichen Sekanten mit reellen Schnittpunkten aus den Kegelstrahlen bestehen aller Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$, deren jeder irgend einen Punkt $\mathfrak{x}$ der Raumkurve mit den übrigen Punkten derselben verbindet, ebenso besteht das gesamte System der Schnittlinien je zweier reeller Schmiegungsebenen aus den Tangenten der sämtlichen Kegelschnitte $\mathfrak{x}^{(2)}$, deren jeder in irgend einer Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ durch alle übrigen ausgeschnitten wird. Die vollständigen Systeme dieser beiden dual gegenüberstehenden Gebilde werden aber erst erhalten, wie oben gezeigt ist, durch die beiden Scharen von Hyperboloiden, welche einerseits durch sämtliche Punkte der Raumkurve gehen, und andererseits von sämtlichen Schmiegungsebenen der Raumkurve berührt werden. Ein Übergang von dem

einen zum andern Systeme findet statt durch die Tangenten der Raumkurve, indem jede Tangente sowohl dem Sekantensystem angehört (als Verbindungslinie zweier unendlich-nahen Punkte der Raumkurve), als auch dem System der Schnittlinien je zweier Schmiegungsebenen (sobald dieselben unendlich nahe auf einander folgen); außerdem kann niemals eine Gerade beiden Systemen gleichzeitig angehören. Wohl aber besteht zwischen den beiden dual gegenüberstehenden Gruppen von Hyperboloiden ein gewisser Zusammenhang.

Wählt man zum Beispiel $t_{\mathfrak{a}}$ und $t_{\mathfrak{b}}$, die Tangenten der Raumkurve $C^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, zu Axen zweier projektivischen Ebenenbüschel $t_{\mathfrak{a}}[\mathfrak{x}]$ $t_{\mathfrak{b}}[\mathfrak{x}]$, wo der Punkt $\mathfrak{x}$ die Raumkurve durchläuft, so erzeugen die Büschel ein Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, welches durch die Raumkurve geht. Wählt man andererseits $t_{\mathfrak{a}}$ und $t_{\mathfrak{b}}$ zu Trägern zweier projektivischen Punktreihen, die von den sämtlichen Schmiegungsebenen $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ auf $t_{\mathfrak{a}}$ und $t_{\mathfrak{b}}$ ausgeschnitten werden, so erzeugen die beiden Punktreihen ein Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$, welches von sämtlichen Schmiegungsebenen der $C^{(3)}$ berührt wird. Die beiden Hyperboloide $\mathfrak{H}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ haben $t_{\mathfrak{a}}$ und $t_{\mathfrak{b}}$ als gemeinschaftliche Erzeugende; seien $\tau_{\mathfrak{a}}$ und $\tau_{\mathfrak{b}}$ die Schmiegungsebenen in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so entspricht in den beiden projektivischen Ebenenbüscheln:

der Ebene $[t_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}]$ die Schmiegungsebene $\tau_{\mathfrak{b}}$
" " $[t_{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}]$ " " $\tau_{\mathfrak{a}}$

in den beiden projektivischen Punktreihen:

dem Punkte $(t_{\mathfrak{a}}\tau_{\mathfrak{b}})$ der Punkt $\mathfrak{b}$
" " $(t_{\mathfrak{b}}\tau_{\mathfrak{a}})$ " " $\mathfrak{a}$,

folglich ist die Verbindungslinie von $\mathfrak{b}$ und $(t_{\mathfrak{a}}\tau_{\mathfrak{b}})$ eine Erzeugende des Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$; diese ist aber identisch mit der Schnittlinie der Ebenen $[t_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}]$ und $\tau_{\mathfrak{b}}$, also eine Erzeugende des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$; wir können mithin folgendes Resultat aussprechen:

Wenn man in zwei Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Raumkurve $C^{(3)}$

die Tangenten $t_{\mathfrak{a}}$ und $t_{\mathfrak{b}}$
und die Schmiegungsebenen $\tau_{\mathfrak{a}}$ und $\tau_{\mathfrak{b}}$

konstruiert und die Schnittpunkte:

$$(t_a \tau_b) = a_1 \qquad (t_b \tau_a) = b_1$$

bezeichnet, so haben die beiden obigen Hyperboloide $\mathfrak{H}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ das windschiefe Vierseit $a\,a_1\,b\,b_1$, dessen Seiten sind:

$$|a a_1| \quad |a_1 b| \quad |b b_1| \quad |b_1 a|$$

gemeinschaftlich.

Wir können die beiden gegenüberstehenden Fälle einer reellen oder ideellen Sekante, je nachdem die beiden Schnittpunkte derselben mit der Raumkurve reell sind oder nicht, zwischen denen der Fall einer Tangente (mit zusammenfallenden Schnittpunkten) in der Mitte steht, dadurch vereinigen, dafs wir die Sekante als den Träger einer hyperbolischen oder elliptischen Punktinvolution ermitteln, deren Doppelelemente auf $C^{(3)}$ liegen.

Ebenso können wir die analogen beiden Fälle für eine Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen, je nachdem dieselben reell sind oder nicht, vereinigen durch die Einführung einer hyperbolischen oder elliptischen Ebeneninvolution, deren Axe die betrachtete Schnittlinie ist. Die Konstruktion beider Involutionen ist ohne Schwierigkeit, und es ergeben sich dabei merkwürdige Beziehungen zwischen beiden Systemen von Geraden mit ihren Punkt- und Ebeneninvolutionen. Wir verweisen indessen hinsichtlich dieser Untersuchung auf die oben angeführten Abhandlungen von L. Cremona (l. c.) und kehren zu der auf S. 266 ausgeführten Konstruktion zurück, welche unmittelbar zu der gesuchten Punkt- und Ebeneninvolution hinführt.

Wir gingen von drei beliebigen Punkten $a\,b\,c$ einer Raumkurve $C^{(3)}$ aus, bezeichneten durch $a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}$ die drei Kegel zweiten Grades, deren Strahlen jeden der drei Punkte $a\,b\,c$ mit allen übrigen Punkten der Raumkurve verbinden, so dass $|bc|$, $|ca|$, $|ab|$ gemeinschaftliche Strahlen je zweier dieser Kegel sind und aufserdem alle drei sich in der gegebenen Raumkurve $C^{(3)}$ schneiden. Die Berührungsebenen dieser drei Kegel längs der gemeinschaftlichen Strahlen bezeichneten wir in folgender Weise:

Berührungsebene am Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ längs der Kante $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ sei $\alpha_\mathfrak{b}$
" " " $\mathfrak{a}^{(2)}$ " " " $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ " $\alpha_\mathfrak{c}$
" " " $\mathfrak{b}^{(2)}$ " " " $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ " $\beta_\mathfrak{c}$
" " " $\mathfrak{b}^{(2)}$ " " " $|\mathfrak{b}\mathfrak{a}|$ " $\beta_\mathfrak{a}$
" " " $\mathfrak{c}^{(2)}$ " " " $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$ " $\gamma_\mathfrak{a}$
" " " $\mathfrak{c}^{(2)}$ " " " $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|$ " $\gamma_\mathfrak{b}$.

Die Tangenten der Raumkurve in den drei Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ sind dann zufolge unserer früheren Konstruktion die Schnittlinien:

$$t_\mathfrak{a} = |\beta_\mathfrak{a}\gamma_\mathfrak{a}| \quad t_\mathfrak{b} = |\gamma_\mathfrak{b}\alpha_\mathfrak{b}| \quad t_\mathfrak{c} = |\alpha_\mathfrak{c}\beta_\mathfrak{c}|.$$

Die Dreiecksseiten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ lassen sich auch so ausdrücken:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| = |\alpha_\mathfrak{b}\beta_\mathfrak{a}| \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{c}| = |\alpha_\mathfrak{c}\gamma_\mathfrak{a}| \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{c}| = |\beta_\mathfrak{c}\gamma_\mathfrak{b}|.$$

Die drei Schmiegungsebenen der Raumkurve in den Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ wurden bezeichnet durch

$$\tau_\mathfrak{a} \quad \tau_\mathfrak{b} \quad \tau_\mathfrak{c}$$

und sind die Berührungsebenen der Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}\,\mathfrak{b}^{(2)}\,\mathfrak{c}^{(2)}$ längs der Kegelstrahlen $t_\mathfrak{a}\,t_\mathfrak{b}\,t_\mathfrak{c}$, so dafs also

$\beta_\mathfrak{a}\,\gamma_\mathfrak{a}\,\tau_\mathfrak{a}$ sich in $t_\mathfrak{a}$ schneiden,
$\gamma_\mathfrak{b}\,\alpha_\mathfrak{b}\,\tau_\mathfrak{b}$ " " $t_\mathfrak{b}$ "
$\alpha_\mathfrak{c}\,\beta_\mathfrak{c}\,\tau_\mathfrak{c}$ " " $t_\mathfrak{c}$ "

und endlich wurde die Ebene

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \varepsilon$$

bezeichnet.

Wir haben nunmehr für den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ drei Kegelstrahlen $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$, $t_\mathfrak{a}$ und die drei Berührungsebenen längs derselben $\alpha_\mathfrak{b}$, $\alpha_\mathfrak{c}$, $\tau_\mathfrak{a}$, die wir auch so ausdrücken können:

Kegelstrahlen: $|\alpha_\mathfrak{b}\beta_\mathfrak{a}| \quad |\alpha_\mathfrak{c}\gamma_\mathfrak{a}| \quad |\beta_\mathfrak{a}\gamma_\mathfrak{a}|$
Berührungsebenen: $\alpha_\mathfrak{b} \quad \alpha_\mathfrak{c} \quad \tau_\mathfrak{a}$

und wissen von einer solchen räumlichen Figur, dafs, wenn wir jede Berührungsebene mit der Verbindungsebene der beiden übrigen Kegelstrahlen zum Schnitt bringen, die dadurch erhaltenen drei neuen Strahlen in einer Ebene liegen müssen; hieraus folgt, dafs die drei Strahlen:

$$|\gamma_\mathfrak{a}\alpha_\mathfrak{b}| \quad |\beta_\mathfrak{a}\alpha_\mathfrak{c}| \quad |\varepsilon, \tau_\mathfrak{a}|$$

in einer Ebene ε_1 liegen müssen. Ferner ist ersichtlich,

wenn wir zur Abkürzung die Schnittlinie $|\alpha_{\mathfrak{b}}\,\alpha_{\mathfrak{c}}| = s_{\mathfrak{a}}$ bezeichnen (eine Gerade, die durch $\mathfrak{a}$ geht), daſs die vier durch $t_{\mathfrak{a}}$ gelegten Ebenen:

$$[t_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}] \quad [t_{\mathfrak{a}}\mathfrak{c}] \quad [t_{\mathfrak{a}}s_{\mathfrak{a}}] \quad \tau_{\mathfrak{a}}$$

offenbar harmonisch liegen; oder da die Ebene $[t_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}]$ identisch mit $\beta_{\mathfrak{a}}$ und die Ebene $[t_{\mathfrak{a}}\mathfrak{c}]$ identisch mit $\gamma_{\mathfrak{a}}$ ist, können wir auch sagen: $\tau_{\mathfrak{a}}$ ist die vierte harmonische Ebene zu

$$\beta_{\mathfrak{a}}\ \gamma_{\mathfrak{a}} \quad \text{und} \quad [t_{\mathfrak{a}}s_{\mathfrak{a}}],$$

der letzteren zugeordnet, wo $s_{\mathfrak{a}}$ die Schnittlinie $|\alpha_{\mathfrak{b}}\,\alpha_{\mathfrak{c}}|$ bedeutet.

Wir bemerken nun, daſs wir durch dieselbe Figur auch die beiden (reellen oder imaginären) Strahlen des Kegels $\mathfrak{a}^{(2)}$ ermitteln können, in welchen er von der Ebene ε_1 geschnitten wird, und zwar zeigt es sich, daſs dieselben immer **imaginär** sein müssen. Wenn wir nämlich die drei in der Ebene ε_1 ermittelten Strahlen, in welchen die Ebenen des dem Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ umschriebenen Dreiflachs von den gegenüberliegenden Seitenflächen des einbeschriebenen Dreikants geschnitten werden, durch $s_1\,s_1'\,s_1''$ bezeichnen und zu diesen drei Strahlen drei zugehörige Strahlen $t_1\,t_1'\,t_1''$ konstruieren, indem t_1 der vierte harmonische Strahl zu $s_1\,s_1'\,s_1''$, dem s_1 zugeordnet, t_1' der vierte harmonische Strahl zu $s_1'\,s_1''\,s_1$, dem s_1' zugeordnet, und t_1'' der vierte harmonische Strahl zu $s_1''\,s_1\,s_1'$, dem s_1'' zugeordnet, ist, dann sind $|s_1t_1|$, $|s_1't_1'|$, $|s_1''t_1''|$ allemal drei Strahlenpaare einer elliptischen Strahleninvolution, welche in der Ebene ε_1 dem Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ (S. 34) zugehört.*) Die Ebene ε_1 muſs also notwendig den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$

---

*) Wir können dies Verhalten am sichtbarsten am Kegelschnitt erkennen, dessen Perspektive von einem Punkte $\mathfrak{a}$ im Raume die analoge Eigenschaft des Kegels $\mathfrak{a}^{(2)}$ zeigt.

Denken wir uns einem Kegelschnitt ein Dreieck $\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2$ einbeschrieben; die Tangenten in diesen Punkten bilden ein dem Kegelschnitt umschriebenes Dreiseit, dessen Seiten den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$ in drei Punkten $\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2$ begegnen mögen (Fig. 10), die bekanntlich auf einer Geraden g liegen. Die Polare des Punktes $\mathfrak{r}$ ist nun leicht zu ermitteln; sie muſs durch den Punkt $\mathfrak{s}$ gehen und durch den Schnittpunkt der beiden Tangenten in $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$, also auch den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{t}$ zu $\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2$, welcher dem $\mathfrak{r}$ zugeordnet ist; $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{t}$ sind also konjugierte Punkte der Punktinvolution, welche der Geraden g in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört; konstruieren wir in gleicher Weise den Punkt $\mathfrak{t}_1$ als vierten

in einem imaginären Linienpaar schneiden, vertreten durch

---

harmonischen zu $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}$, dem $\mathfrak{r}_1$ zugeordnet, und endlich den Punkt $\mathfrak{t}_2$ als vierten harmonischen Punkt zu $\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r} \mathfrak{r}_1$, dem $\mathfrak{r}_2$ zugeordnet, so sind $(\mathfrak{r}\mathfrak{t})$, $(\mathfrak{r}_1\mathfrak{t}_1)$, $(\mathfrak{r}_2\mathfrak{t}_2)$ drei Punktepaare derjenigen Punktinvolution, welche der Geraden g in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört. Diese Punktinvolution ist aber immer eine elliptische (Th. d. K. S. 62), denn aus den drei Bedingungen:

$$(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}\ \mathfrak{t}) = -1$$
$$(\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}\ \mathfrak{r}_1 \mathfrak{t}_1) = -1$$
$$(\mathfrak{r}\ \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{t}_2) = -1$$

folgt nicht allein die Bedingung:

$$(\mathfrak{t}\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)(\mathfrak{t}_1\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r})(\mathfrak{t}_2\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) = -1,$$

welche zeigt, dafs die drei Punktepaare

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{t}),\ (\mathfrak{r}_1\mathfrak{t}_1),\ (\mathfrak{r}_2\mathfrak{t}_2)$$

einer Punktinvolution angehören (S. 18), sondern es ergeben sich auch die Werte:

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{t}\mathfrak{r}_1\mathfrak{t}_1) = (\mathfrak{r}\mathfrak{t}\mathfrak{r}_2\mathfrak{t}_2) = (\mathfrak{r}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{t}_2) = -3,$$

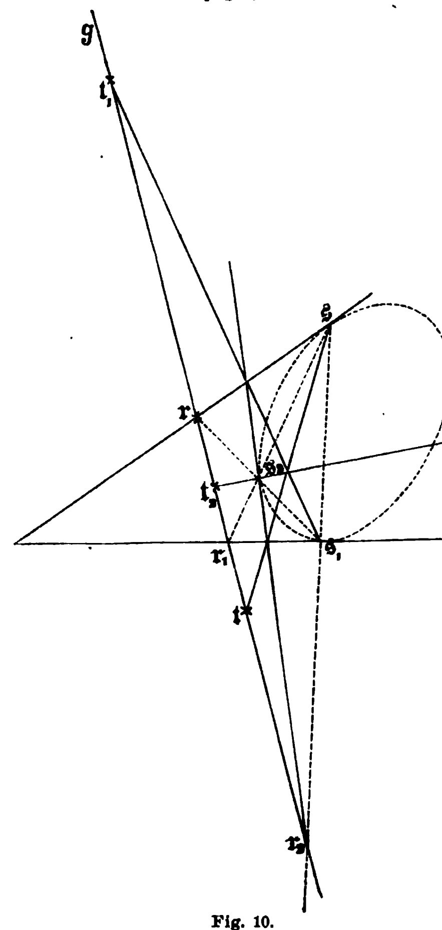


Fig. 10.

welche zeigen, dafs jedes Punktepaar durch das andere getrennt wird, also die Involution notwendig eine elliptische ist. Die Bestimmung der imaginären Doppelpunkte hängt, wie a. a. O. gezeigt ist, von den imaginären kubischen Wurzeln der negativen Einheit ab. Dafs die Involution eine elliptische ist, läfst sich auch unmittelbar aus der Lage harmonischer Punkte erkennen. Wir schliefsen also, dafs eine solche Gerade g dem Kegelschnitt niemals in zwei reellen Punkten begegnen kann. Nehmen wir dagegen an, dafs von dem,

diejenige elliptische Strahleninvolution, welche allein von den drei Schnittlinien:

$$|\gamma_a \alpha_b| = s_1 \quad |\alpha_c \beta_a| = s_1' \quad |\varepsilon, \tau_a| = s_1''$$

---

dem Kegelschnitt einbeschriebenen, Dreieck $\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2$ nur eine Ecke $\mathfrak{s}$ reell, die beiden andern $\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2$ konjugiert-imaginär sind und vertreten werden durch die elliptische Punktinvolution, welche der ideellen Sekante $|\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2| = l$ in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, so können wir die Gerade g, wie folgt, konstruieren:

Die Tangente t am Punkte $\mathfrak{s}$ des Kegelschnitts treffe die ideelle Sekante l im Punkte $\mathfrak{r}$; verbindet man $\mathfrak{r}$ mit dem Pole der Geraden l in Bezug auf den Kegelschnitt, nennt diese Verbindungslinie s und konstruiert zu den drei Strahlen $t\,s\,l$ den vierten harmonischen Strahl g, welcher dem l zugeordnet ist, dann ist g die gesuchte Gerade. Da von den vier durch $\mathfrak{r}$ gehenden Strahlen s und t durch g und l harmonisch getrennt werden, so liegt immer l in einem Paar Scheitelräume zwischen den Strahlen s und t, dagegen g in dem andern Paar Scheitelräume. Es können nun zwei Fälle eintreten:

1) l schneidet den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten $\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2$, dann kann, weil $\mathfrak{r}$ auf einer Tangente des Kegelschnitts liegt, der Strahl s, welcher $\mathfrak{r}$ mit dem Pol von l verbindet, den Kegelschnitt nicht treffen, und der ganze Kegelschnitt kann nur enthalten sein in einem Paar Scheitelräume zwischen s und t, und zwar in denjenigen Scheitelräumen, in welche der Strahl l hineinfällt; folglich kann der Strahl g den Kegelschnitt nicht treffen, wie oben behauptet wurde. Dagegen:

2) l begegnet dem Kegelschnitt nicht in reellen Punkten; dann mufs der Strahl s, welcher $\mathfrak{r}$ mit dem Pol von l verbindet, den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten treffen, und alle Strahlen in dem einen Paar Scheitelräume zwischen s und t müssen den Kegelschnitt in reellen Punktepaaren treffen, die Strahlen in dem andern Paar Scheitelräumen aber nicht alle in reellen Punktepaaren. Nun haben wir aber in dem letzteren Paar Scheitelräumen den Strahl l, welcher dem Kegelschnitt nicht begegnet, folglich mufs der Strahl g, welcher notwendig in dem andern Paar Scheitelräume liegt, den Kegelschnitt in einem reellen Punktepaar treffen. Wir schliefsen also:

Wenn von dem dem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreieck $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$ alle drei Ecken reell sind, so kann die Gerade g dem Kegelschnitt niemals in einem reellen Punktepaar begegnen, wenn dagegen von dem dem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreieck nur eine Ecke reell und die beiden andern konjugiert-imaginär sind, so mufs die Gerade g dem Kegelschnitt in einem reellen Punktepaare begegnen.

Die Perspektive dieses Satzes von einem beliebigen Raumpunkte aus giebt den analogen Satz für den Kegel und in ähnlicher Weise läfst sich das dual gegenüberstehende Resultat aussprechen.

abhängt und durch dieselben bestimmt wird, indem man immer zu einem und dem Paare der beiden übrigen den zugeordneten vierten harmonischen Strahl konstruiert. In gleicher Weise operieren wir nun bei dem Kegel $\mathfrak{b}^{(2)}$, für welchen die drei Kegelstrahlen $|\mathfrak{b}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$, $t_\mathfrak{b}$ die drei Berührungsebenen $\beta_\mathfrak{a}\ \beta_\mathfrak{c}\ \tau_\mathfrak{b}$ haben, oder anders ausgedrückt:

$$\text{die Kegelstrahlen: } |\beta_\mathfrak{a}\alpha_\mathfrak{b}| \quad |\beta_\mathfrak{c}\gamma_\mathfrak{b}| \quad |\gamma_\mathfrak{b}\alpha_\mathfrak{b}|$$
$$\text{die Berührungsebenen: } \beta_\mathfrak{a} \qquad \beta_\mathfrak{c} \qquad \tau_\mathfrak{b};$$

jede Berührungsebene schneidet die Verbindungsebene der beiden übrigen Kegelstrahlen in einem neuen Strahle, und die dadurch erhaltenen drei neuen Strahlen:

$$|\alpha_\mathfrak{b}\beta_\mathfrak{c}| = s_2 \quad |\beta_\mathfrak{a}\gamma_\mathfrak{b}| = s_2' \quad |\varepsilon, \tau_\mathfrak{b}| = s_2''$$

müssen in einer Ebene ε_2 liegen, welche den Kegel $\mathfrak{b}^{(2)}$ in einem imaginären Linienpaar schneidet, vertreten durch diejenige elliptische Strahleninvolution, welche allein von diesen drei Strahlen abhängt und durch dieselben bestimmt wird, indem man immer zu einem Strahl und dem Paare der beiden übrigen den zugeordneten vierten harmonischen Strahl konstruiert.

Endlich nehmen wir bei dem dritten Kegel $\mathfrak{c}^{(2)}$ die drei Kegelstrahlen $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|$, $t_\mathfrak{c}$ und längs derselben die drei Berührungsebenen $\gamma_\mathfrak{a}$, $\gamma_\mathfrak{b}$, $\tau_\mathfrak{c}$, oder anders ausgedrückt:

$$\text{die Kegelstrahlen: } |\gamma_\mathfrak{a}\alpha_\mathfrak{c}| \quad |\gamma_\mathfrak{b}\beta_\mathfrak{c}| \quad |\alpha_\mathfrak{c}\beta_\mathfrak{c}|$$
$$\text{mit den Berührungsebenen: } \gamma_\mathfrak{a} \qquad \gamma_\mathfrak{b} \qquad \tau_\mathfrak{c};$$

jede Berührungsebene schneidet die Verbindungsebene der beiden übrigen Kegelstrahlen in einem neuen Strahle und die dadurch erhaltenen drei neuen Strahlen:

$$|\beta_\mathfrak{c}\gamma_\mathfrak{a}| = s_3 \quad |\gamma_\mathfrak{b}\alpha_\mathfrak{c}| = s_3' \quad |\varepsilon, \tau_\mathfrak{c}| = s_3''$$

müssen in einer Ebene ε_3 liegen, welche den Kegel $\mathfrak{c}^{(2)}$ in einem imaginären Linienpaar schneidet, vertreten durch diejenige elliptische Strahleninvolution, welche allein von diesen drei Strahlen abhängt und durch dieselben bestimmt wird, indem man immer zu einem Strahl und dem Paare der beiden übrigen den zugeordneten vierten harmonischen Strahl konstruiert. Nun haben wir aber schon auf S. 268 bemerkt, dafs die drei Ebenen

$\alpha_\mathfrak{b}\ \beta_\mathfrak{c}\ \gamma_\mathfrak{a}$ sich in einem Punkt $\mathfrak{p}$ schneiden,

$\alpha_\mathfrak{c}\ \beta_\mathfrak{a}\ \gamma_\mathfrak{b}$ „ „ „ „ $\mathfrak{p}'$ „

und dafs der Punkt $\mathfrak{p}$ der Schnittpunkt der drei Strahlen $s_1\ s_2\ s_3$, der Punkt $\mathfrak{p}'$ der Schnittpunkt der drei Strahlen $s_1'\ s_2'\ s_3'$ ist. Da also wegen der ersten Eigenschaft der Punkt $\mathfrak{p}$ in den drei Ebenen $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ gleichzeitig liegt und wegen der zweiten Eigenschaft auch der Punkt $\mathfrak{p}'$ in allen drei Ebenen $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ gleichzeitig liegt, so müssen diese drei Ebenen, da sie zwei Punkte gemein haben, sich alle drei in der Verbindungslinie derselben schneiden, also durch die Gerade $g = |\mathfrak{p}\mathfrak{p}'|$ gehen; diese Gerade g schneidet aber die Ebene ε in einem Punkte $\mathfrak{p}''$, in dem sich die drei Strahlen $s_1''\ s_2''\ s_3''$ treffen, und durch welchen, wie wir sehen, die drei Schmiegungsebenen $\tau_{\mathfrak{a}}\ \tau_{\mathfrak{b}}\ \tau_{\mathfrak{c}}$ gehen müssen, und hieraus folgt der oben (S. 269) hervorgehobene Chaslessche Satz.

Aber die Gerade $g = |\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''|$ besitzt eine ebenfalls sehr bemerkenswerte Eigenschaft; sie wird nämlich von den drei in den Ebenen $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ ermittelten Strahleninvolutionen in einer und derselben Punktinvolution geschnitten, welche elliptisch ist und nur von den drei Punkten $\mathfrak{p}\ \mathfrak{p}'\ \mathfrak{p}''$ abhängt und durch dieselben bestimmt wird, indem man immer zu einem Punkte und dem Paare der beiden übrigen den vierten harmonischen Punkt konstruiert und dadurch drei Punktepaare einer elliptischen Punktinvolution erhält. Da die Gerade g der Träger einer und derselben Punktinvolution ist in Bezug auf alle drei Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}\ \mathfrak{b}^{(2)}\ \mathfrak{c}^{(2)}$, so gehören ihre imaginären Doppelpunkte allen drei Kegeln gleichzeitig d. h. der Raumkurve $C^{(3)}$ an; mithin ist g eine Sekante der Raumkurve und zwar eine ideelle, weil ihre Schnittpunkte mit $C^{(3)}$ imaginär sind. Wir haben aber zugleich auf dieser ideellen Sekante der Raumkurve die elliptische Punktinvolution konstruiert, welche die imaginären Schnittpunkte von g mit $C^{(3)}$ vertritt.

Wenn wir der besseren Übereinstimmung wegen den Punkt $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{e}$ bezeichnen, so läfst sich das gewonnene Resultat zunächst so aussprechen:

Wenn durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{e}$ im Raume an eine Raumkurve $C^{(3)}$ drei reelle Schmiegungsebenen gelegt werden können, so ist die durch den Punkt $\mathfrak{e}$ zu legende einzige Sekante g der Raum-

kurve allemal eine ideelle, d. h. ihre Schnittpunkte mit der Raumkurve sind konjugiert-imaginär.*)

Andererseits ergiebt sich das dual gegenüberstehende Resultat, wenn wir bei einer der vorigen ganz gleichlaufenden Betrachtung von drei reellen Schmiegungsebenen $\tau_a\ \tau_b\ \tau_c$ der Raumkurve ausgehen, die drei in denselben enthaltenen Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}\ \mathfrak{B}^{(2)}\ \mathfrak{C}^{(2)}$ auffassen, die drei Tangenten $t_a\ t_b\ t_c$ in den Schmiegungsebenen $\tau_a\ \tau_b\ \tau_c$ ermitteln und in analoger Weise zu einer Geraden g_1 gelangen, welche mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{e} = (\tau_a\ \tau_b\ \tau_c)$ verbunden die Ebene ε liefert, in welcher die drei Berührungspunkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ der Schmiegungsebenen $\tau_a\ \tau_b\ \tau_c$ liegen. In dieser Ebene ε ist g_1 die einzige in ihr enthaltene Gerade, durch welche zwei Schmiegungsebenen der Raumkurve gehen; und zwar sind diese immer imaginär und werden vertreten durch eine elliptische Ebeneninvolution, die in analoger Weise, wie oben die elliptische Punktinvolution, konstruiert wird. Also:

Wenn eine beliebige Ebene ε einer Raumkurve $C^{(3)}$ in drei reellen Punkten begegnet, so enthält sie eine einzige bestimmte Gerade g_1 als Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen der Raumkurve, die allemal konjugiert-imaginär sind.

Beide Resultate lassen sich auch anders aussprechen und ergänzen sich alsdann. Nehmen wir zwei reelle Schmiegungsebenen τ_a und τ_b der Raumkurve und legen durch die Schnittlinie $|\tau_a\ \tau_b|$ eine beliebige Ebene, so könnte dieselbe entweder in drei reellen Punkten oder in einem reellen und zwei imaginären Punkten der $C^{(3)}$ begegnen, wobei die reelle Verbindungslinie der letzteren eine ideelle Sekante ist. Der erstere Fall ist unmöglich, denn es würde diese Ebene drei reelle Sekanten enthalten, deren jede der Schnittlinie $|\tau_a\ \tau_b|$ begegnete, und durch einen solchen Schnittpunkt müfsten dann drei reelle Schmiegungsebenen $\tau_a\ \tau_b\ \tau_c$ gehen und eine reelle Sekante, was nach dem ersten Satze unmöglich ist, also:

Eine Ebene, welche durch die Schnittlinie zweier reellen Schmiegungsebenen einer Raumkurve $C^{(3)}$ geht, kann derselben nur in einem reellen

*) Joachimsthal, Borchardt's Journal f. Mathem. Bd. 56, S. 45.

Punkte begegnen; die beiden andern Schnittpunkte sind konjugiert-imaginär.

In gleicher Weise folgt:

Durch einen Punkt einer reellen Sekante der Raumkurve $C^{(3)}$ geht immer nur eine reelle Schmiegungsebene derselben, die beiden andern sind konjugiert-imaginär.

Denn gingen durch den Punkt drei reelle Schmiegungsebenen, so müfste die Sekante eine ideelle sein nach dem obigen Satze.

Die Konstruktion der Geraden g und g_1 ging wesentlich von der Voraussetzung aus, dafs die Ebene ε der $C^{(3)}$ in drei reellen Punkten $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ begegnet oder dafs von dem Punkte $\mathfrak{e}$ aus drei reelle Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}\ \tau_\mathfrak{b}\ \tau_\mathfrak{c}$ an $C^{(3)}$ sich legen lassen. Andererseits ist aber g die einzige immer vorhandene Sekante der $C^{(3)}$ durch den Punkt $\mathfrak{e}$ und g_1 die einzige immer vorhandene Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen in der Ebene ε; also sind diese Geraden immer reell vorhanden, wenn auch jene sie bestimmenden Elemente nicht sämtlich reell sind. Wir wollen daher die obigen Konstruktionen so abändern, dafs sie auch bestehen bleiben, wenn von den Punkten $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ nur einer reell und die beiden andern konjugiert-imaginär sind, oder von den Ebenen $\tau_\mathfrak{a}\ \tau_\mathfrak{b}\ \tau_\mathfrak{c}$ nur eine reell und die beiden andern konjugiert-imaginär sind.

Wiederholen wir die obigen Konstruktionen von g und g_1, so lassen sie sich kurz neben einander stellen in folgender Weise:

Eine Ebene ε begegnet der Raumkurve $C^{(3)}$ in drei Punkten $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$; die Tangenten der $C^{(3)}$ in diesen Punkten sind $t_\mathfrak{a}\ t_\mathfrak{b}\ t_\mathfrak{c}$, die Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}\ \tau_\mathfrak{b}\ \tau_\mathfrak{c}$, welche sich in einem Punkte $\mathfrak{e}$ der Ebene ε schneiden.

Die Ebenen:		Die Treffpunkte:	
$[t_\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \beta_\mathfrak{a}$ $[t_\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \gamma_\mathfrak{b}$ $[t_\mathfrak{c}\mathfrak{a}] = \alpha_\mathfrak{c}$	schneiden sich im Punkte $\mathfrak{p}'$.	$(t_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{b})$ $(t_\mathfrak{b}\tau_\mathfrak{c})$ $(t_\mathfrak{c}\tau_\mathfrak{a})$	bestimmen die Ebene π'.
Die Ebenen:		**Die Treffpunkte:**	
$[t_\mathfrak{a}\mathfrak{c}] = \gamma_\mathfrak{a}$ $[t_\mathfrak{b}\mathfrak{a}] = \alpha_\mathfrak{b}$ $[t_\mathfrak{c}\mathfrak{b}] = \beta_\mathfrak{c}$	schneiden sich im Punkte $\mathfrak{p}$.	$(t_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{c})$ $(t_\mathfrak{b}\tau_\mathfrak{a})$ $(t_\mathfrak{c}\tau_\mathfrak{b})$	bestimmen die Ebene π.

Die Verbindungslinie:	Die Schnittlinie:
$\|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\| = g$	$\|\pi\pi'\| = g_1$
ist die gesuchte, welche durch $\mathfrak{e}$ geht.	ist die gesuchte und liegt in der Ebene ε.

Wir können nun dasjenige Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ zu Hilfe nehmen, welches durch die drei Erzeugenden $t_{\mathfrak{a}}\,t_{\mathfrak{b}}\,t_{\mathfrak{c}}$ bestimmt wird, welche der einen Regelschar desselben angehören. Wenn wir von dem Punkte $\mathfrak{a}$ die Erzeugende der andern Regelschar ziehen, welche $t_{\mathfrak{b}}$ und $t_{\mathfrak{c}}$ treffen mufs, so sehen wir, dafs diese die Schnittlinie der Ebenen $[\mathfrak{a}t_{\mathfrak{b}}] = \alpha_{\mathfrak{b}}$ und $[\mathfrak{a}t_{\mathfrak{c}}] = \alpha_{\mathfrak{c}}$ ist; wir wollen diese Erzeugende $s_{\mathfrak{a}}$ nennen und demgemäfs

$$s_{\mathfrak{a}} = |[\mathfrak{a}t_{\mathfrak{b}}],\, [\mathfrak{a}t_{\mathfrak{c}}]| = |\alpha_{\mathfrak{b}}\,\alpha_{\mathfrak{c}}|$$
$$s_{\mathfrak{b}} = |[\mathfrak{b}t_{\mathfrak{c}}],\, [\mathfrak{b}t_{\mathfrak{a}}]| = |\beta_{\mathfrak{c}}\,\beta_{\mathfrak{a}}|$$
$$s_{\mathfrak{c}} = |[\mathfrak{c}t_{\mathfrak{a}}],\, [\mathfrak{c}t_{\mathfrak{b}}]| = |\gamma_{\mathfrak{a}}\,\gamma_{\mathfrak{b}}|,$$

dann haben wir auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ die drei Paare von Erzeugenden $t_{\mathfrak{a}}s_{\mathfrak{a}},\ t_{\mathfrak{b}}s_{\mathfrak{b}},\ t_{\mathfrak{c}}s_{\mathfrak{c}}$, welche von den Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ausgehend den beiden Regelscharen angehören.

Gleichzeitig haben wir auf demselben Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ drei andere Erzeugende der zweiten Regelschar, denn die durch $t_{\mathfrak{a}}$ gehende Ebene $\tau_{\mathfrak{a}}$ schneidet das Hyperboloid in einer zweiten Erzeugenden $s'_{\mathfrak{a}}$, welche $t_{\mathfrak{b}}$ und $t_{\mathfrak{c}}$ treffen mufs; also ist:

$$s'_{\mathfrak{a}} = |(\tau_{\mathfrak{a}}t_{\mathfrak{b}}),\ (\tau_{\mathfrak{a}}t_{\mathfrak{c}})|$$
$$s'_{\mathfrak{b}} = |(\tau_{\mathfrak{b}}t_{\mathfrak{c}}),\ (\tau_{\mathfrak{b}}t_{\mathfrak{a}})|$$
$$s'_{\mathfrak{c}} = |(\tau_{\mathfrak{c}}t_{\mathfrak{a}}),\ (\tau_{\mathfrak{c}}t_{\mathfrak{b}})|,$$

und die drei Paare von Erzeugenden $t_{\mathfrak{a}}s'_{\mathfrak{a}},\ t_{\mathfrak{b}}s'_{\mathfrak{b}},\ t_{\mathfrak{c}}s'_{\mathfrak{c}}$ aus den beiden Regelscharen des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ liegen in den drei Ebenen $\tau_{\mathfrak{a}}\,\tau_{\mathfrak{b}}\,\tau_{\mathfrak{c}}$.

Wir erinnern uns nunmehr der Beziehungen, welche wir früher (S. 119) bei einem auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ verlaufenden Sechsseit kennen gelernt haben, welches sich bilden läfst aus drei Erzeugenden der einen und drei Erzeugenden der andern Regelschar des Hyperboloids. Bei jedem solchen Sechseck schneiden sich die drei Hauptdiagonalen in einem Punkte, und wenn wir die drei Sechsecke:

$$t_{\mathfrak{a}}\ s_{\mathfrak{a}}\ t_{\mathfrak{b}}\ s_{\mathfrak{b}}\ t_{\mathfrak{c}}\ s_{\mathfrak{c}}$$
$$t_{\mathfrak{a}}\ s_{\mathfrak{b}}\ t_{\mathfrak{b}}\ s_{\mathfrak{c}}\ t_{\mathfrak{c}}\ s_{\mathfrak{a}}$$
$$t_{\mathfrak{a}}\ s_{\mathfrak{c}}\ t_{\mathfrak{b}}\ s_{\mathfrak{a}}\ t_{\mathfrak{c}}\ s_{\mathfrak{b}}$$

nehmen, so liegen die dadurch erhaltenen drei Punkte in einer Geraden; diese drei Punkte sind aber, wie wir S. 121 gesehen haben, die Schnittpunkte je dreier Ebenen, nämlich

$[t_\mathfrak{a} s_\mathfrak{b}]$ $[t_\mathfrak{b} s_\mathfrak{c}]$ $[t_\mathfrak{c} s_\mathfrak{a}]$, die sich in $\mathfrak{o}$ schneiden,
$[t_\mathfrak{a} s_\mathfrak{c}]$ $[t_\mathfrak{b} s_\mathfrak{a}]$ $[t_\mathfrak{c} s_\mathfrak{b}]$, „ „ „ $\mathfrak{o}'$ „
$[t_\mathfrak{a} s_\mathfrak{a}]$ $[t_\mathfrak{b} s_\mathfrak{b}]$ $[t_\mathfrak{c} s_\mathfrak{c}]$, „ „ „ $\mathfrak{o}''$ „

und die drei Punkte $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'\,\mathfrak{o}''$ liegen auf der obigen Geraden. Nun ist aber, wie wir sehen, der Punkt $\mathfrak{o}$ identisch mit unserem Punkte $\mathfrak{p}'$ und der Punkt $\mathfrak{o}'$ identisch mit unserem Punkte $\mathfrak{p}$, folglich enthält die Gerade:

$$|\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'| = |\mathfrak{p}'\mathfrak{p}| = g$$

auch den Punkt $\mathfrak{o}''$, in welchem sich die drei Ebenen $[t_\mathfrak{a} s_\mathfrak{a}]$ $[t_\mathfrak{b} s_\mathfrak{b}]$ $[t_\mathfrak{c} s_\mathfrak{c}]$ schneiden; diese drei Ebenen sind aber die Berührungsebenen des Hyperboloids in den Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, folglich ist $\mathfrak{o}''$ der Pol der Ebene ε in Bezug auf das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$. Wir können nun die Gerade g anstatt durch die beiden Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ auch bestimmen durch die beiden Punkte $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{o}''$, d. h. den Schnittpunkt $\mathfrak{e}$ der drei Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}\,\tau_\mathfrak{b}\,\tau_\mathfrak{c}$ und den Pol $\mathfrak{o}''$ der Ebene ε in Bezug auf das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$.

In analoger Weise können wir bei dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ die drei Erzeugenden $t_\mathfrak{a}\,t_\mathfrak{b}\,t_\mathfrak{c}$ zusammenstellen mit den drei Erzeugenden $s'_\mathfrak{a}\,s'_\mathfrak{b}\,s'_\mathfrak{c}$ zu anderen auf dem Hyperboloid verlaufenden Sechsseiten; in jedem solchem Sechsseit bestimmen zwei einander folgende Seiten eine Ebene und die drei Paare gegenüberliegender Ebenen schneiden sich in drei Geraden, die in einer Ebene liegen. Für die drei Sechsseite:

$$t_\mathfrak{a}\,s'_\mathfrak{a}\,t_\mathfrak{b}\,s'_\mathfrak{b}\,t_\mathfrak{c}\,s'_\mathfrak{c}$$
$$t_\mathfrak{a}\,s'_\mathfrak{b}\,t_\mathfrak{b}\,s'_\mathfrak{c}\,t_\mathfrak{c}\,s'_\mathfrak{a}$$
$$t_\mathfrak{a}\,s'_\mathfrak{c}\,t_\mathfrak{b}\,s'_\mathfrak{a}\,t_\mathfrak{c}\,s'_\mathfrak{b}$$

erhalten wir dadurch drei Ebenen $\pi\,\pi'\,\pi''$, die in einer Geraden sich schneiden (S. 120); diese Gerade ist identisch mit g_1 und liegt außer in der Ebene ε auch in der Ebene π'', in welcher die drei Punkte:

$$(\tau_\mathfrak{a}\,s'_\mathfrak{a})\quad(\tau_\mathfrak{b}\,s'_\mathfrak{b})\quad(\tau_\mathfrak{c}\,s'_\mathfrak{c})$$

liegen; diese drei Punkte sind aber die Berührungspunkte der Ebenen $\tau_\mathfrak{a}\,\tau_\mathfrak{b}\,\tau_\mathfrak{c}$ mit dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$; folglich ist π''

die Polarebene des Punktes $\mathfrak{e}$, in welchem sich $\tau_a \tau_b \tau_c$ scheiden, in Bezug auf das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$. Die Gerade g_1 können wir nunmehr anstatt durch die beiden Ebenen π und π' auch bestimmen durch die beiden Ebenen ε und π'', d. h. als Schnittlinie der Ebene ε, in welcher die drei Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ liegen, mit der Polarebene des Punktes $\mathfrak{e}$ in Bezug auf das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$.

Hieraus erkennen wir, dafs die Gerade $g = |\mathfrak{o}''\mathfrak{e}|$ und die Gerade $g_1 = |\varepsilon, \pi''|$ konjugierte Gerade in Bezug auf das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ sein müssen, weil sowohl $\mathfrak{o}''$ und ε, als auch $\mathfrak{e}$ und π'' Pol und Polarebene sind. Da nun g und g_1 konjugierte Gerade in Bezug auf das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ sind, so können wir nach S. 132 dieselben auch auf folgende Art finden:

Die drei Ebenen:

$[t_a s_a]$ $[t_b s_c]$ $[t_c s_b]$ schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{a}_1$
$[t_b s_b]$ $[t_c s_a]$ $[t_a s_c]$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{b}_1$
$[t_c s_c]$ $[t_a s_b]$ $[t_b s_a]$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{c}_1$.

Die drei Punkte $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ müssen in der Geraden g_1 liegen, die zu g konjugiert ist in Bezug auf das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$.

Nun ist aber die Ebene $[t_b s_c] = [t_b \mathfrak{c}] = \gamma_b$ und

$$[t_c s_b] = [t_c \mathfrak{b}] = \beta_c$$

und die Schnittlinie $|\gamma_b \beta_c| = |\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$; folglich sind die Punkte $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ diejenigen, in welchen die Ebenen $[t_a s_a]$ $[t_b s_b]$ $[t_c s_c]$ den Dreiecksseiten $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ begegnen. Diese Punkte $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ können noch einfacher bestimmt werden, wenn wir den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zu Hilfe nehmen, in welchem die Ebene $\varepsilon = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]$ das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ schneidet; da die Ebenen $[t_a s_a]$ $[t_b s_b]$ $[t_c s_c]$ die Berührungsebenen des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ in den Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ sind, so schneiden dieselben die Ebene ε in den Tangenten des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ in den Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, und diese Tangenten treffen die Gegenseiten des Dreiecks $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$ in den Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$.

Ferner haben wir oben gesehen, dafs die vier Ebenen:

$$[t_a \mathfrak{b}] \quad [t_a \mathfrak{c}] \quad [t_a s_a] \quad \tau_a$$

vier harmonisch gelegene Ebenen sind, die ersten beiden und

die letzten beiden zugeordnet. Diese vier Ebenen schneiden also die Ebene ε in vier harmonischen Strahlen; die Ebene $\tau_{\mathfrak{a}}$ schneidet ε in der Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{e}|$, folglich ist die Tangente in $\mathfrak{a}$ am Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ die vierte Harmonische zu $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{e}|$, letzterer zugeordnet; mithin sind $\mathfrak{e}$ und g_1 Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, und die Gerade g_1 ist die sogenannte „harmonische Polare" des Punktes $\mathfrak{e}$ in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$.*) Wir können also folgendes Resultat aussprechen:

---

*) Wenn man ein Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ hat und in der Ebene desselben einen Punkt $\mathfrak{e}$ und man zu den drei Strahlen $|\mathfrak{a}\mathfrak{e}|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{e}|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{e}|$ die vierten harmonischen Strahlen konstruiert mit je zwei Dreiecksseiten, welche als zugeordnet harmonische aufgefafst werden, so treffen diese drei vierten harmonischen Strahlen die Gegenseiten des Dreiecks in drei Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$, welche bekanntlich auf einer Geraden g_1 liegen. Diese heifst die „harmonische Polare" des Punktes $\mathfrak{e}$ in Bezug auf das Dreieck und sie ist die Polare des Punktes $\mathfrak{e}$ in Bezug auf denjenigen dem Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ umschriebenen Kegelschnitt, welcher $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1|$ zu Tangenten hat. Umgekehrt heifst $\mathfrak{e}$ der „harmonische Pol" der Geraden g_1 in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und wird in analoger Weise gefunden, sobald die Gerade g_1 gegeben ist.

Die zusammengehörigen Elemente $\mathfrak{e}$ und g_1 lassen sich nicht blofs in der angegebenen Weise konstruieren, sobald das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ durch seine drei reellen Eckpunkte gegeben ist, sondern auch dann noch, wenn von dem Dreieck nur eine Ecke $\mathfrak{a}$ reell und die beiden andern $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ konjugiert-imaginär gegeben sind durch eine elliptische Punktinvolution auf einem geraden Träger. Wie leicht zu erkennen ist, gestaltet sich die Konstruktion folgendermafsen:

Gegeben ist ein Punkt $\mathfrak{a}$ und eine Punktinvolution auf einem geraden Träger l, deren Doppelpunkte (reelle oder imaginäre) mit $\mathfrak{a}$ zusammen das gegebene Dreieck bilden; zu einem Punkte $\mathfrak{e}$ soll die harmonische Polare konstruiert werden. Der Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{e}|$ trifft den Träger l in einem Punkte $\mathfrak{a}'_1$, dessen konjugierter in der gegebenen Punktinvolution $\mathfrak{a}_1$ sei. Zu den drei Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'_1\,\mathfrak{e}$ konstruiert man den vierten harmonischen, zu $\mathfrak{e}$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{p}$, so dafs

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{a}'_1\mathfrak{e}\mathfrak{p}) = -1$$

ist, ferner zu den drei Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}'_1$ den vierten harmonischen, zu $\mathfrak{a}'_1$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{q}$, so dafs

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{a}'_1\mathfrak{q}) = -1$$

ist, dann ist $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}| = g_1$ die gesuchte harmonische Polare des Punktes $\mathfrak{e}$ in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, wo $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ die (reellen oder imaginä-

Wenn eine Ebene ε der Raumkurve $C^{(3)}$ in drei Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ begegnet, so schneiden sich die drei Schmiegungsebenen derselben in einem Punkte $\mathfrak{e}$ der Ebene ε. Wenn man von dem Punkte $\mathfrak{e}$ die harmonische Polare g_1 konstruiert in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, so ist g_1 die einzige in der Ebene ε enthaltene Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen der Raumkurve $C^{(3)}$.

In ganz analoger Weise folgt der dual gegenüberstehende Satz:

Wenn durch einen Punkt $\mathfrak{e}$ drei Schmiegungsebenen $\alpha\,\beta\,\gamma$ einer Raumkurve gehen, so liegen die drei Berührungspunkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ in einer Ebene ε, welche durch den Punkt $\mathfrak{e}$ geht. Wenn man von der Ebene ε in Bezug auf das Dreiflach $\alpha\beta\gamma$ die harmonische Polare g konstruiert, so ist g die einzige durch $\mathfrak{e}$ gehende Sekante der Raumkurve $C^{(3)}$. Die harmonische Polare einer Ebene ε, welche durch die Ecke eines Dreiflachs $\alpha\beta\gamma$ geht, wird so konstruiert: Durch die Schnittlinie $|\beta\gamma|$ und die Schnittlinie $|\alpha\varepsilon|$ legt man eine Ebene und konstruiert die vierte harmonische zugeordnete Ebene, indem $\beta\,\gamma$ das andere Paar zugeordneter Ebenen ist; die drei in solcher Weise konstruierten Ebenen schneiden sich in der gesuchten harmonischen Polare g; wie die Konstruktion auszuführen ist, wenn nur α reell, dagegen $\beta\,\gamma$ konjugiert-imaginär sind, geht aus der letzten Anmerkung hervor.

Vermittelst dieser Eigenschaften, welche wir von den Geraden g und g_1 kennen gelernt haben, lassen sich nun auch für den Fall, dafs eine Ebene ε nur in einem reellen Punkte $\mathfrak{a}$ und zwei konjugiert-imaginären Punkten der Raum-

---

ren) Doppelpunkte der auf l gegebenen Punktinvolution bedeuten. Umgekehrt läfst sich in ähnlicher Weise, sobald g_1 gegeben ist, der harmonische Pol $\mathfrak{e}$ konstruieren; denn durch g_1 wird der Punkt $\mathfrak{a}_1$ bestimmt, also auch sein konjugierter Punkt $\mathfrak{a}'_1$; aus $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'_1$ folgt $\mathfrak{q}$ und der Punkt $\mathfrak{p}$ durch die harmonische Beziehung, endlich aus $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'_1\,\mathfrak{p}$ der gesuchte Pol $\mathfrak{e}$ durch die harmonische Beziehung. Diese Konstruktionen sind unabhängig von der Realität der beiden Dreiecksecken $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$.

kurve $C^{(3)}$ begegnet, oder daſs aus einem Punkte $\mathfrak{e}$ nur eine reelle Schmiegungsebene und zwei konjugiert-imaginäre an die Raumkurve $C^{(3)}$ sich legen lassen, in welchem Falle die ursprünglichen Konstruktionen uns im Stiche lassen, die reellen Elemente der Figur ermitteln.

Nehmen wir also an, eine gegebene Ebene ε schneide die Raumkurve $C^{(3)}$ nur in einem reellen Punkte $\mathfrak{a}$ und in zwei konjugiert-imaginären Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, welche vertreten werden durch eine gegebene elliptische Punktinvolution auf einem geraden Träger l. (Diese Gerade l wird gegeben sein als eine gemeinschaftliche Sekante zweier Kegelschnitte, in denen die Ebene ε irgend zwei durch $C^{(3)}$ gelegte Kegel 2. O. schneidet.) Die Ebene ε enthält eine und nur eine bestimmte Gerade g_1, welche Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen der Raumkurve $C^{(3)}$ ist. Die Konstruktion der Geraden g_1 steht dual gegenüber der auf S. 234 ausgeführten. Konstruiert man (s. d. vorige Anmerkung) zu g_1 den harmonischen Pol in Bezug auf das nur teilweise reelle Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, so ist derselbe der Punkt $\mathfrak{e}$, in welchem sich die drei Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}\, \tau_\mathfrak{b}\, \tau_\mathfrak{c}$ in den Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ der Raumkurve schneiden. Natürlich sind von diesen drei Schmiegungsebenen nur eine $\tau_\mathfrak{a}$ reell, die beiden andern $\tau_\mathfrak{b}\, \tau_\mathfrak{c}$ konjugiert-imaginär. Durch den so gefundenen Punkt $\mathfrak{e}$ geht eine und nur eine Sekante der Raumkurve $C^{(3)}$, deren Konstruktion auf S. 234 angegeben ist. Dies ist die Gerade g. Geht man umgekehrt von einem Punkte $\mathfrak{e}$ aus, durch welchen nur eine reelle Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{a}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ geht, während die beiden andern $\tau_\mathfrak{b}\, \tau_\mathfrak{c}$ konjugiert-imaginär sind und vertreten werden durch eine elliptische Ebeneninvolution mit einer reellen Axe l_1 (diese elliptische Ebeneninvolution ist als gegeben anzusehen durch die gegebene Raumkurve $C^{(3)}$, als Raumkurve dritter Klasse aufgefasst), dann geht durch $\mathfrak{e}$ die einzige Sekante g der Raumkurve, und man konstruiere zu dem Strahl g in Bezug auf das nur teilweise reelle Dreiflach $\tau_\mathfrak{a}\, \tau_\mathfrak{b}\, \tau_\mathfrak{c}$ die harmonische Polarebene ε nach Analogie der oben angegebenen Konstruktion. Diese Ebene ε enthält dann die drei Berührungspunkte der Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}\, \tau_\mathfrak{b}\, \tau_\mathfrak{c}$, von denen natürlich nur einer reell ist. Die Ebene ε enthält die einzige Gerade g_1, welche Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen ist

und in der oben angegebenen Weise konstruiert werden kann. Wir gelangen durch diese Konstruktion also von dem einen Ausgangspunkte zu dem andern wieder zurück und schliefsen dadurch den Cyklus derselben.

Während nun aber in dem reellen Falle $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c} & \text{reell} \\ \tau_{\mathfrak{a}}\tau_{\mathfrak{b}}\ \tau_{\mathfrak{c}} & \end{matrix}\right\}$ die Gerade g als eine uneigentliche (ideelle) Sekante der Raumkurve und die Gerade g_1 als eine uneigentliche Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen gefunden wurde, indem diese selbst konjugiert-imaginär sind, zeigt sich in dem jetzt betrachteten Falle $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{a} & \text{reell} & \mathfrak{b}\ \mathfrak{c} & \text{konj.-imag.} \\ \tau_{\mathfrak{a}} & & \tau_{\mathfrak{b}}\ \tau_{\mathfrak{c}} & \end{matrix}\right\}$ gerade das Umgekehrte: g ist eine eigentliche Sekante der $C^{(3)}$, d. h. begegnet derselben in zwei reellen Punkten, und durch g_1 gehen zwei reelle Schmiegungsebenen der $C^{(3)}$. In der That können wir dies leicht in folgender Weise erkennen: Legen wir nämlich von dem einen immer reellen Punkte $\mathfrak{a}$ aus den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ durch die Raumkurve $C^{(3)}$, so haben wir in dem früher betrachteten Falle drei reelle Kegelstrahlen $t_{\mathfrak{a}}$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$, deren Berührungsebenen die gegenüberliegenden Seitenflächen des Dreikants $t_{\mathfrak{a}}$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ in drei Strahlen schneiden, welche eine Ebene ε_1 bestimmen; diese Ebene ε_1 schneidet den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ in einem imaginären Linienpaar, und die auf dem Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ verlaufende Raumkurve $C^{(3)}$ aufser in $\mathfrak{a}$ in einem imaginären Punktepaar, welches vertreten wird durch eine elliptische Punktinvolution auf einer Geraden g. Diese Punktinvolution auf der in der Ebene ε_1 liegenden Geraden g wird ausgeschnitten durch die Strahleninvolution, welche der Ebene ε_1 in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ zugehört. Dies war unsere obige Konstruktion. Wenn wir dagegen im zweiten Falle den Punkt $\mathfrak{a}$ und den Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ beibehalten, aber von dem einbeschriebenen Dreikant nur den Strahl $t_{\mathfrak{a}}$ und die Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \varepsilon$ reell annehmen, das Strahlenpaar $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ dagegen in der Ebene ε als konjugiert-imaginär vertreten lassen durch eine elliptische Strahleninvolution, die durch die gegebene Raumkurve $C^{(3)}$ mit gegeben ist; dann führt die in der obigen Anmerkung mitgeteilte Konstruktion zu der Ebene ε_1 in etwas anderer Weise und zeigt, dafs in diesem Falle die Ebene ε_1 notwendig in einem reellen Linienpaar den Kegel

$\mathfrak{a}^{(2)}$ schneiden mufs, folglich auch die in der Ebene ε_1 enthaltene Gerade g der Raumkurve in einem reellen Punktepaar begegnen mufs. In gleicher Weise gelangen wir zu dem dual-gegenüberstehenden Resultat, wenn wir von einem Punkte $\mathfrak{c}$ ausgehen, durch welchen nur eine reelle und zwei konjugiert-imaginäre Schmiegungsebenen der Raumkurve $C^{(3)}$ gehen; dann haben wir in der einen reellen Schmiegungsebene τ_a einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ und demselben umschrieben ein nur teilweise reelles Dreiseit, von dem eine Seite die Tangente t_a der Raumkurve ist und die beiden andern die Schnittlinien des imaginären Ebenenpaars τ_b und τ_c mit der reellen Ebene τ_a. Ermitteln wir in diesem Dreiseit denjenigen reellen Punkt $\mathfrak{p}_1$, in welchem sich die drei (nur teilweise reellen) Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten schneiden (analog der oben angegebenen Konstruktion), so müssen durch $\mathfrak{p}_1$ zwei reelle Tangenten des Kegelschnitts $\mathfrak{A}^{(2)}$ gehen, und durch diese beiden reellen Tangenten gehen zwei bestimmte Schmiegungsebenen der Raumkurve, die sich in der Geraden g_1 schneiden; in der Ebene $[\mathfrak{c} g_1] = \varepsilon$ ist g_1 die einzige Gerade, in welcher zwei Schmiegungsebenen der Raumkurve sich schneiden, die notwendig reell sind.

Wir können also den obigen Sätzen die folgenden hinzufügen:

Wenn durch einen Punkt $\mathfrak{c}$ im Raume eine reelle und zwei konjugiert-imaginäre Schmiegungsebenen einer Raumkurve $C^{(3)}$ gehen, so ist die durch den Punkt $\mathfrak{c}$ gehende Sekante g der Raumkurve allemal eine eigentliche, d. h. sie begegnet der Raumkurve in zwei reellen Punkten.

Wenn eine beliebige Ebene ε der Raumkurve $C^{(3)}$ nur in einem reellen und zwei konjugiert-imaginären Punkten begegnet, so enthält sie eine bestimmte Gerade g_1 als Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen der Raumkurve, die notwendig reell sind.

Da endlich eine Sekante g der Raumkurve immer entweder eine eigentliche oder eine uneigentliche sein mufs, d. h. in zwei reellen oder in zwei konjugiert-imaginären Punkten der

Raumkurve begegnet und ebenso eine Schnittlinie g_1 zweier Schmiegungsebenen der Raumkurve entweder eine eigentliche oder eine uneigentliche sein mufs, d. h. die beiden Schmiegungsebenen durch dieselbe entweder reell oder konjugiert-imaginär sind, so können wir die vorhin unterschiedenen beiden Fälle auch in folgenden Satz zusammenfassen:

Wenn eine Sekante g einer Raumkurve $C^{(3)}$ und eine Schnittlinie g_1 zweier Schmiegungsebenen sich begegnen, d. h. in einem Punkte treffen (oder in einer Ebene liegen), so mufs von diesen die eine eine eigentliche, die andere eine uneigentliche sein, d. h. enthält g zwei reelle Punkte der $C^{(3)}$, so gehen durch g_1 zwei konjugiert-imaginäre Schmiegungsebenen, enthält g keinen reellen Punkt der $C^{(3)}$, so gehen durch g_1 zwei reelle Schmiegungsebenen.

Hieraus folgt nun auch das Umgekehrte:

Eine Ebene, welche durch eine uneigentliche Schnittlinie zweier (konjugiert-imaginären) Schmiegungsebenen beliebig gelegt wird, mufs der Raumkurve allemal in drei reellen Punkten begegnen, und:

Von jedem Punkte einer uneigentlichen Sekante der Raumkurve $C^{(3)}$ (deren Treffpunkte konjugiert-imaginär sind) lassen sich allemal drei reelle Schmiegungsebenen an dieselbe legen.

§ 36. Das Nullsystem.

Die Dualität, welche die Raumkurve $C^{(3)}$ als Punkt- und Ebenengebilde aufgefafst darbietet, führt zu einem eigentümlichen Polarsystem im Raume, welches sich von dem bereits untersuchten Polarsysteme (S. 126) zwar wesentlich unterscheidet, aber die charakteristischen Eigenschaften desselben besitzt.

Wenn man durch irgend drei Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ einer Raumkurve $C^{(3)}$ eine Ebene ε legt, und die drei Schmiegungsebenen $\tau_{\mathfrak{a}}\ \tau_{\mathfrak{b}}\ \tau_{\mathfrak{c}}$ in diesen drei Punkten sich in einem Punkte $\mathfrak{e}$ schneiden, so soll $\mathfrak{e}$ der Pol der Ebene ε und ε die Polarebene des

Punktes $\mathfrak{e}$ heifsen in Bezug auf die Raumkurve $C^{(3)}$. Aus dem oben (S. 269) bewiesenen Satze folgt also:

Der Pol liegt allemal in seiner Polarebene.

Man kann hiernach einer beliebigen Ebene ε im Raume den bestimmten Pnnkt $\mathfrak{e}$ und einem beliebigen Punkte $\mathfrak{e}$ die Ebene ε zuordnen und dadurch eine Abhängigkeit der sämtlichen Punkte und Ebenen im Raume von einander herstellen. Allein die Konstruktion in solcher Weise einander zugeordneter Elemente des Raumes beschränkt sich zunächst nur auf solche Ebenen, welche der Raumkurve in je drei reellen Punkten begegnen, und auf solche Punkte, durch welche drei reelle Schmiegungsebenen der Raumkurve gehen. Von dieser Beschränkung befreien wir uns durch folgende Betrachtung:

Seien

$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ vier Punkte der Raumkurve $C^{(3)}$,

$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ ihre Schmiegungsebenen,

dann erhalten wir zwei Tetraëder, die in eigentümlicher Weise zu einander liegen; bezeichnen wir die Ecken des letzteren:

$$(\beta\gamma\delta) = \mathfrak{a}_1 \quad (\gamma\delta\alpha) = \mathfrak{b}_1 \quad (\delta\alpha\beta) = \mathfrak{c}_1 \quad (\alpha\beta\gamma) = \mathfrak{d}_1,$$

so mufs, weil $\mathfrak{a}_1$ der Pol von $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ ist, derselbe in dieser Ebene liegen, und gleichzeitig geht die Ebene α durch ihren Pol, den Punkt $\mathfrak{a}$, d. h. die Ecken des ersten Tetraëders liegen in den Seitenflächen des zweiten, und die Seitenflächen des ersten Tetraëders gehen durch die Ecken des zweiten, also:

Vier Punkte einer Raumkurve $C^{(3)}$ bilden ein Tetraëder, die vier Schmiegungsebenen in denselben ein zweites Tetraëder; jedes von beiden ist dem andern gleichzeitig ein- und umbeschrieben.*)

---

*) Möbius, Crelle's Journal. Bd. III, S. 273. Um sich eine Vorstellung zu machen von einer solchen eigentümlichen Figur, die aus zwei Tetraëdern besteht, deren jedes dem andern gleichzeitig ein- und umbeschrieben ist, nehme man zuerst in der Ebene ein Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und eine Gerade s an, welche von den Dreiecksseiten $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ in den Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ getroffen wird; ferner nehme man einen beliebigen vierten Punkt $\mathfrak{d}$ und ziehe $|\mathfrak{d}\mathfrak{r}|$, $|\mathfrak{d}\mathfrak{s}|$, $|\mathfrak{d}\mathfrak{t}|$; nimmt man in diesen drei Strahlen drei beliebige Punkte: in $|\mathfrak{d}\mathfrak{r}|$ den Punkt $\mathfrak{a}_1$, in $|\mathfrak{d}\mathfrak{s}|$ den Punkt $\mathfrak{b}_1$, in $|\mathfrak{d}\mathfrak{t}|$ den Punkt $\mathfrak{c}_1$, so schneiden die drei Seiten: $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|$, $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|$ des Dreiecks $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ die Gerade s in den Punkten $\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{t}_1$ und wegen des vollständigen Vierecks $\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ sind die

Halten wir drei Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ mit ihren Schmiegungsebenen $\alpha\,\beta\,\gamma$ fest und drehen um eine der Seiten des Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, z. B. $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ eine variable Ebene ε, so ergiebt sich hieraus die Konstruktion des dritten Schnittpunktes der Ebene ε mit der Raumkurve, sehr einfach; da nämlich je vier Punkte:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}_1, \quad \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{d}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1,$$
$$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{d}_1\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}$$

immer in einer Ebene liegen, und

---

drei Punktepaare $\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_1$ einer Involution angehörig (Fig. 11); daraus

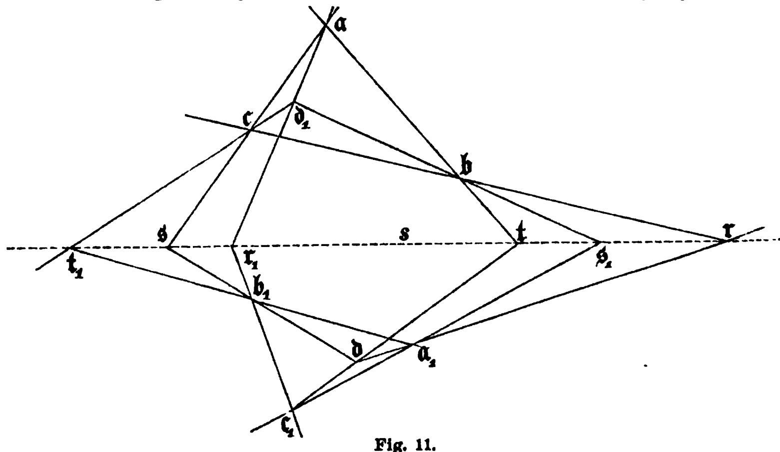


Fig. 11.

folgt aber umgekehrt, daſs jetzt auch die drei Verbindungsstrahlen $|\mathfrak{a}\mathfrak{r}_1|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{s}_1|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{t}_1|$ sich in einem Punkte $\mathfrak{d}_1$ schneiden müssen und die beiden Vierecke $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}$ liegen derartig, daſs ihre Seitenpaare auf der Geraden s dieselbe Involution ausschneiden. Denken wir uns nun die einfache Ebene doppelt: in der einen Ebene die Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}_1$, in der andern die Punkte $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}$ und trennen die beiden Ebenen dadurch, daſs wir eine von ihnen um die gemeinsame Schnittlinie s, welche fest bleiben soll, beliebig drehen; dann erhalten wir dadurch zwei Tetraëder im Raume:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1,$$

welche die verlangte Lage zu einander haben, denn weil $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1|$ sich in $\mathfrak{r}$ schneiden und $\mathfrak{r}$ in s liegt, so müssen $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1$ in einer Ebene liegen d. h. $\mathfrak{a}_1$ in der Ebene $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$, ebenso $\mathfrak{b}_1$ in der Ebene $[\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}]$, $\mathfrak{c}_1$ in der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]$, andererseits $\mathfrak{a}$ in der Ebene $[\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1]$, $\mathfrak{b}$ in der Ebene $[\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1]$ und $\mathfrak{c}$ in der Ebene $[\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1]$, endlich aber der Konstruktion zufolge $\mathfrak{d}_1$ in der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ und $\mathfrak{d}$ in der Ebene $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1]$; folglich sind alle 8 Bedingungen erfüllt, und die beiden Tetraëder haben die verlangte räumliche Lage.

$(\beta\gamma\delta) = \mathfrak{a}_1, \ (\gamma\delta\alpha) = \mathfrak{b}_1, \ (\delta\alpha\beta) = \mathfrak{c}_1, \ (\alpha\beta\gamma) = \mathfrak{d}_1$ ist,
so wird der Punkt $\mathfrak{a}_1$ als Schnittpunkt von ε mit $|\beta\gamma|$ hervorgehen, der Punkt $\mathfrak{d}_1 = (\alpha\beta\gamma)$ bekannt sein, der Punkt $\mathfrak{b}_1$ als Schnittpunkt der Ebene $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}]$ mit $|\gamma\alpha|$ und der Punkt $\mathfrak{c}_1$ als Schnittpunkt der Ebene $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}]$ mit $|\alpha\beta|$ hervorgehen; die drei dadurch konstruierten Ebenen $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1]$ $[\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1]$ $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1]$ schneiden sich aber in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{d}$.

Aus dem obigen Schema ergiebt sich sofort die Identität der

Schnittlinie $|\alpha\beta|$ mit der Verbindungslinie $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1|$, der
" $|\gamma\delta|$ " " " $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|$ u. s. f.

Da nun das Schema zeigt, dafs eine Gerade, welche die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ verbindet, sowohl die Geraden $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1| = |\alpha\beta|$ und $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$, als auch die Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1| = |\gamma\delta|$ treffen mufs, und dasselbe auch gilt für einen Verbindungsstrahl $|\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1|$, sowie für $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1|$ und $|\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1|$, so werden die vier Geraden:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| \quad |\alpha\beta| \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{d}| \quad |\gamma\delta|$$

gleichzeitig von vier andern Geraden getroffen, woraus wir schliefsen, dafs sie hyperboloidische Lage haben (S. 95) oder einer Regelschar angehören; ebenso haben

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{c}| \quad |\alpha\gamma| \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{d}| \quad |\beta\delta|$$

hyperboloidische Lage und endlich auch

$$|\mathfrak{b}\mathfrak{c}| \quad |\beta\gamma| \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{d}| \quad |\alpha\delta|.$$

Wir haben also den Satz:

Sind zwei Tetraëder einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben, so hat jede Kante des einen eine zugehörige Kante des andern, indem der Kante des einen Tetraëders, welche zwei Ecken verbindet, die Kante des andern Tetraëders zugehört, in welcher sich die durch diese Ecken gehenden Seitenflächen des letzteren schneiden; alsdann hat immer ein Paar Gegenkanten des einen Tetraëders und das Paar zugehöriger Kanten des andern Tetraëders hyperboloidische Lage.

Nehmen wir jetzt in der Schnittlinie $|\alpha\beta|$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ an, oder anders aufgefafst, denken wir uns durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ zwei Schmiegungsebenen α β an die

Raumkurve gelegt, deren Berührungspunkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ seien, dann wird die Polarebene π des Punktes $\mathfrak{p}$ sowohl durch $\mathfrak{p}$, als auch durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehen, also

$$\pi = [\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}];$$

legen wir sodann durch $\mathfrak{p}$ eine beliebige Ebene π_1, welche der Raumkurve in zwei Punkten $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ begegnet, deren Schmiegungsebenen $\gamma\,\delta$ seien, dann wird der Pol $\mathfrak{p}_1$ der Ebene π_1 sowohl in π_1 als auch in γ und δ liegen müssen, also

$$\mathfrak{p}_1 = (\pi_1 \gamma \delta).$$

Wir haben aber angenommen, dafs die Ebene π_1 durch $\mathfrak{p}$ geht, also die vier Ebenen $\pi\ \pi_1\ \alpha\ \beta$ durch denselben Punkt $\mathfrak{p}$ gehen; daraus folgt, dafs die Schnittlinie $|\pi\pi_1|$ der Schnittlinie $|\alpha\beta|$ begegnen mufs; andererseits ist evident, dafs die Schnittlinie $|\pi\pi_1|$ sowohl mit $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ in der Ebene π, als auch mit $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ in der Ebene π_1 liegt; da also $|\pi\pi_1|$ den drei Geraden $|\alpha\beta|$ $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ begegnet, so mufs sie nach dem vorigen Satze auch der vierten Geraden $|\gamma\delta|$ begegnen, d. h. die vier Ebenen $\pi\ \pi_1\ \gamma\ \delta$ müssen sich in einem Punkte schneiden, also mufs $\mathfrak{p}_1 = (\pi_1\gamma\delta)$ in der Ebene π liegen. Wir haben also bewiesen, dafs wenn π_1 durch den Punkt $\mathfrak{p}$ geht, $\mathfrak{p}_1$ in der Ebene π liegen mufs, d. h.:

Wenn ein Punkt $\mathfrak{p}$ in einer Ebene π_1 liegt, so mufs seine Polarebene π durch den Pol $\mathfrak{p}_1$ der Ebene π_1 gehen.

Oder, was dasselbe ist:

Geht eine Ebene π_1 durch einen Punkt $\mathfrak{p}$, so liegt ihr Pol $\mathfrak{p}_1$ in der Polarebene π des Punktes $\mathfrak{p}$.

Hieraus folgen die beiden Sätze:

Alle Punkte einer Ebene haben zu ihren Polarebenen solche, die sämtlich durch einen festen Punkt der Ebene, ihren Pol, gehen.

Alle Ebenen durch einen Punkt haben ihre Pole in einer Ebene, welche selbst durch den gegebenen Punkt geht und seine Polarebene ist.

Wenn wir nun zwei beliebige Ebenen π und π' nehmen, deren Pole $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ seien, so werden sämtliche Punkte, die in beiden Ebenen gleichzeitig liegen, d. h. die Punkte der Schnittlinie $|\pi\pi'|$, zu Polarebenen solche haben, die gleich-

zeitig durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, also durch die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'|$ gehen, und umgekehrt, da zwei Ebenen durch $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'|$ ihre Pole auf der Schnittlinie $|\pi\pi'|$ haben, so werden sämtliche Punkte der Verbindungslinie $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'|$ zu Polarebenen solche haben, die durch $|\pi\pi'|$ gehen. Also:

Die Polarebenen sämtlicher Punkte, welche in einer Geraden liegen, schneiden sich in einer bestimmten zugehörigen Geraden.

Die Pole sämtlicher Ebenen, welche durch eine Gerade gehen, liegen auf einer bestimmten zugehörigen Geraden.

Solch ein Geradenpaar soll ein Paar konjugierter Geraden (Strahlen) heifsen und ist nach der eben bewiesenen Eigenschaft vertauschbar. Zugleich folgt, dafs, wenn der Punkt $\mathfrak{p}$ eine Gerade s durchläuft, seine Polarebene π um eine feste Gerade s_1 sich dreht und ein Ebenenbüschel beschreibt, welches mit der von $\mathfrak{p}$ beschriebenen Punktreihe perspektivisch liegt, folglich projektivisch ist.

Und weiter:

Nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$ und legen durch denselben eine beliebige Ebene β, so wird die Polarebene α des Punktes $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}$ selbst gehen, der Pol $\mathfrak{b}$ der Ebene β wird aber in β liegen, und weil β durch $\mathfrak{a}$ geht, so mufs $\mathfrak{b}$ in α liegen (s. o.). Der Punkt $\mathfrak{b}$ liegt also in beiden Ebenen $\alpha\,\beta$ gleichzeitig und ebenso $\mathfrak{a}$, also ist

$$|\alpha\beta| = |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|.$$

Nehmen wir aber irgend eine Gerade t in der Ebene β, die nicht durch $\mathfrak{a}$ geht, so wird ihre konjugierte Gerade t_1 durch $\mathfrak{b}$ gehen, aber nicht in α liegen. Bewegen wir auf t einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$, so ist die Polarebene desselben $\xi = [t_1\mathfrak{x}]$; die von $\mathfrak{x}$ beschriebene Punktreihe liegt mit dem von ξ beschriebenen Ebenenbüschel perspektivisch. Der Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}| = s$ hat zu seinem konjugierten Strahl die Schnittlinie $|\alpha\xi| = s_1$. Bei der Bewegung von $\mathfrak{x}$ beschreibt also s ein ebenes Strahlenbüschel um $\mathfrak{a}$ in der Ebene β und der konjugierte Strahl s_1 ein ebenes Strahlenbüschel um den Punkt $\mathfrak{b}$ in der Ebene α und beide Strahlenbüschel müssen projektivisch

sein, weil die mit ihnen perspektivischen Gebilde, welche $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}$ beschreiben, perspektivisch liegen, also folgt:

Wenn eine Gerade s um einen Punkt $\mathfrak{a}$ in einer Ebene β ein Strahlenbüschel beschreibt, so wird der konjugierte Strahl s_1 in der Polarebene α von $\mathfrak{a}$ um den Pol $\mathfrak{b}$ von β sich drehen und ein mit dem ersten projektivisches Strahlenbüschel beschreiben. In der Schnittlinie $|\alpha\beta| = |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ haben die beiden Strahlenbüschel zusammenfallende entsprechende Strahlen.

Nunmehr kann man zu einem beliebigen Punkte $\mathfrak{p}$ die Polarebene π konstruieren, unabhängig davon, ob durch $\mathfrak{p}$ drei oder nur eine reelle Schmiegungsebene an die Raumkurve gelegt werden können; man verbinde $\mathfrak{p}$ mit irgend zwei Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Raumkurve durch eine Ebene; die Schmiegungsebenen der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ schneiden sich in einer Geraden $|\alpha\beta|$; dann sind $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und $|\alpha\beta|$ konjugierte Gerade, folglich mufs die Ebene $[\mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ ihrèn Pol auf $|\alpha\beta|$ haben; dieser Pol ist also, weil er in seiner Polarebene liegen mufs, der Schnittpunkt der Ebene $[\mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ mit der Geraden $|\alpha\beta|$. Wenn man in gleicher Weise eine zweite und dritte Ebene durch $\mathfrak{p}$ legt und die drei Pole dieser Ebenen verbindet durch eine neue Ebene, so ist diese die Polarebene von $\mathfrak{p}$. Da sie auch durch $\mathfrak{p}$ selbst gehen mufs, so braucht man nur zwei der vorigen Ebenen zu ihrer Bestimmung.

In dieser Weise werden die Punkte, Strahlen und Ebenen im Raume einander zugeordnet, so dafs zu jedem Punkte $\mathfrak{p}$ eine bestimmte durch ihn gehende Ebene π (seine Polarebene), zu jeder Ebene ein bestimmter in ihr liegender Punkt (ihr Pol) und zu jeder Geraden s eine bestimmte ihr konjugierte Gerade s_1 gehört, zu welcher selbst wieder s die konjugierte ist. Das ganze dadurch erhaltene System von Punkten, Strahlen und Ebenen im Raume, welches, wie wir gesehen haben, die charakteristischen Eigenschaften eines Polarsystems besitzt, aber in eigentümlicher Weise modifiziert, soll ein Nullsystem heifsen.*)

Wenn man in der Polarebene π eines Punktes $\mathfrak{p}$, der in π

---

*) Möbius, Lehrbuch der Statik. Bd. I, S. 151 und Crelle's Journal für Mathematik. Bd. X, S. 317.

liegen mufs, eine beliebige Gerade s durch $\mathfrak{p}$ zieht, so mufs ihre konjugierte Gerade s_1 sowohl in π liegen, weil s durch $\mathfrak{p}$ geht, als auch durch $\mathfrak{p}$ gehen, weil s in π liegt; es müssen also s und s_1 beide durch $\mathfrak{p}$ gehen und in π liegen. Nehmen wir aber irgend einen zweiten Punkt $\mathfrak{p}'$ der Geraden s, so mufs seine Polarebene sowohl durch $\mathfrak{p}$, als auch durch $\mathfrak{p}'$ gehen und in s_1 die Ebene π schneiden, folglich müssen s und s_1 zusammenfallen, also:

Jede in einer Ebene durch den Pol derselben gezogene Gerade ist sich selbst konjugiert.

Da jede andere in der Ebene π angenommene Gerade s, welche nicht durch $\mathfrak{p}$ geht, einen durch $\mathfrak{p}$ gehenden Strahl s_1 zur konjugierten Geraden hat, der nicht in π liegt, so können sich s und s_1 niemals begegnen. Wir können also sagen:

Zwei konjugierte Gerade s und s_1 begegnen sich im allgemeinen nicht; wenn sie sich treffen, so fallen sie identisch zusammen (sind selbstkonjugierte Gerade).

Die allgemein nachgewiesene Projektivität einer von dem Punkte $\mathfrak{p}$ auf der Geraden s durchlaufenen Punktreihe mit dem von der Polarebene π um die Axe s_1 beschriebenen Ebenenbüschel kann bei dieser besonderen projektivischen Lage, bei welcher der Träger der Punktreihe mit der Axe des Ebenenbüschels koinzidiert, nicht aufhören und läfst sich in der That leicht direkt nachweisen:

Sei t eine sich selbst konjugierte Gerade, werde durch t eine beliebige Ebene β gelegt und in ihr irgend ein Punkt $\mathfrak{a}$ angenommen; drehen wir um $\mathfrak{a}$ einen Strahl s in der Ebene β und ermitteln den zu s konjugierten Strahl s_1. Da die Ebene β durch t geht, so mufs auch ihr Pol $\mathfrak{b}$ auf der sich selbst konjugierten Geraden t liegen; da β durch $\mathfrak{a}$ geht, so mufs die Polarebene α durch $\mathfrak{b}$ gehen und zugleich durch $\mathfrak{a}$, also durch $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| = |\alpha\beta|$. Es ist nun oben gezeigt worden, dafs, während s um $\mathfrak{a}$ in der Ebene β ein Strahlenbüschel beschreibt, s_1 in der Ebene α um den Punkt $\mathfrak{b}$ ein projectivisches Strahlenbüschel beschreibt. Der Schnittpunkt (st) hat aber zu seiner Polarebene die Ebene $[s_1 t]$; folglich mufs auch die Punktreihe, welche $(st) = \mathfrak{x}$ beschreibt, mit dem Ebenenbüschel, welches $[s_1 t] = \mathfrak{x}$ beschreibt, projektivisch sein, d. h.:

Eine sich selbst konjugierte Gerade ist gleichzeitig der Träger einer Punktreihe $\mathfrak{x}$ und die Axe eines Ebenenbüschels ξ, wo ξ die Polarebene des Punktes $\mathfrak{x}$ im Nullsystem bezeichnet. Diese beiden Gebilde sind allemal projektivisch.

Insbesondere erscheinen ein Punkt der Raumkurve und seine Schmiegungsebene als ein Paar Pol und Polarebene, eine Tangente als eine sich selbst konjugierte Gerade.

Eine Sekante der Raumkurve hat zum konjugierten Strahl eine Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen derselben. Die beiden oben (§ 35) hervorgehobenen Systeme von Geraden g und g_1 im Raume treten also durch das Nullsystem in polare Abhängigkeit und paaren sich zu besonderen konjugierten Strahlen desselben.

Jede Gerade, welche zwei konjugierte Strahlen schneidet, ist eine sich selbst konjugierte Gerade; denn trifft sie die konjugierten Strahlen s und s_1 in $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$, so ist die Polarebene von $\mathfrak{p}$ die Ebene $\varepsilon = [\mathfrak{p} s_1]$, und die Polarebene von $\mathfrak{p}_1$ ist $\varepsilon_1 = [\mathfrak{p}_1 s]$; beide Polarebenen schneiden sich in der Geraden $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$; also ist konjugierte Gerade zur Verbindungslinie $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ die Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon_1| = |\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$, d. h. $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ eine sich selbst konjugierte Gerade.

Wenn man durch eine sich selbst konjugierte Gerade g eine beliebige Ebene ε legt, so mufs der Pol $\mathfrak{p}$ derselben in g liegen; hieraus folgt mit Rücksicht auf den vorigen Satz:

Werden irgend zwei konjugierte Gerade ss_1 von einer beliebigen Ebene π in $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}_1$ getroffen, so liegt der Pol $\mathfrak{p}$ der Ebene π mit den beiden Treffpunkten $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}_1$ in einer geraden Linie.

Und umgekehrt:

Sind zwei konjugierte Gerade $s s_1$ eines Nullsystems gegeben, und zieht man durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ im Raume diejenige Gerade, welche s und s_1 trifft, so mufs durch diese Gerade die Polarebene π des Punktes $\mathfrak{p}$ gehen.

Hieraus folgt weiter:

Nehmen wir zwei beliebige Paare konjugierter Strahlen des Nullsystems s und s_1, t und t_1, ziehen durch irgend einen Punkt $\mathfrak{p}$ der Geraden s die einzige Gerade, welche t und t_1

gleichzeitig trifft, so mufs dieselbe eine sich selbst konjugierte Gerade sein; also die Polarebene von 𝔭 wird durch diese Gerade und zugleich durch s_1 gehen müssen, mithin trifft die erste durch 𝔭 gezogene Gerade auch s_1; also jede Gerade, welche drei von den beiden Paaren von konjugierten Strahlen ss_1 und tt_1 trifft, mufs auch dem vierten begegnen, d. h. sie haben hyperboloidische Lage:

Irgend zwei Paare konjugierter Strahlen s und s_1, t und t_1 haben allemal hyperboloidische Lage oder gehören einer Regelschar an, deren zugehörige zweite Regelschar aus lauter sich selbst konjugierten Strahlen besteht.

Denkt man sich das ganze Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ hergestellt, dessen einer Regelschar die beiden Strahlenpaare $ss_1\, tt_1$ angehören, so schneidet eine beliebige Ebene π das Hyperboloid in einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, auf welchem die Schnittpunkte $\mathfrak{s}\, \mathfrak{s}_1\, \mathfrak{t}\, \mathfrak{t}_1$ der Ebene π mit den vier Strahlen $ss_1\, tt_1$ liegen. Die Verbindungslinien $|\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1|$ müssen sich in dem Pole 𝔭 der Ebene π schneiden. Jede durch 𝔭 gezogene Gerade wird nun dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in einem Punktepaar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ begegnen, durch welches zwei Erzeugende $x\, x_1$ der ersten Regelschar gehen, welcher $ss_1\, tt_1$ angehören. Dann müssen offenbar auch xx_1 konjugierte Strahlen im Nullsystem sein; denn, um zu x den konjugierten Strahl zu erhalten, müssen wir durch xss_1 das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ legen und diejenige Erzeugende derselben Regelschar ermitteln, welche der Ebene π in einem solchen Punkte $\mathfrak{y}_1$ begegnet, der mit $\mathfrak{x}$𝔭 in einer Geraden liegt; dies ist aber der Strahl x_1. Wir erhalten also unendlich viele Paare konjugierter Strahlen xx_1, welche einer Regelschar angehören und sich involutorisch paaren, weil die Punktepaare $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ sich involutorisch paaren, da die Gerade $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$ durch den festen Punkt 𝔭 läuft. Je nachdem 𝔭 innerhalb oder aufserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt, giebt es keine oder zwei Tangenten desselben durch 𝔭. In der involutorisch-gepaarten Regelschar xx_1 kommen also keine oder zwei sich selbst konjugierte Strahlen des Nullsystems vor; ersteres nennen wir den elliptischen, letzteres den hyperbolischen Fall.

Nehmen wir insbesondere zwei sich selbst konjugierte

Strahlen t und t_1 an, die sich im Raume nicht treffen, so wird ein beliebiger Punkt $\mathfrak{x}$ auf t zur Polarebene eine durch t gehende Ebene $\mathfrak{\xi}$ haben, und es beschreiben, wie wir gesehen haben, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{\xi}$ projektivische Gebilde. Die Ebene $\mathfrak{\xi}$ schneidet t_1 in einem Punkte $\mathfrak{x}_1$, dessen Polarebene durch t_1 gehen mufs, weil t_1 eine sich selbst konjugierte Gerade ist; diese Polarebene $\mathfrak{\xi}_1$ mufs aber auch durch $\mathfrak{x}$ gehen, weil $\mathfrak{\xi}$ durch $\mathfrak{x}_1$ geht, folglich ist

$$|\mathfrak{\xi}\mathfrak{\xi}_1| = |\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$$

eine sich selbst konjugierte Gerade; wegen der Projectivität von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{\xi}$ beschreiben nun die Ebenen $\mathfrak{\xi}$ und $\mathfrak{\xi}_1$ um die Axen t und t_1 zwei projektivische Ebenenbüschel, also die Schnittlinie $|\mathfrak{\xi}\mathfrak{\xi}_1|$ eine Regelschar. Wir erhalten daher folgenden Satz:

Hat man zwei sich selbst konjugierte Strahlen im Nullsystem, die im Raume einander nicht begegnen, so giebt es unendlich viele andere sich selbst konjugierte Strahlen, welche den beiden ersten gleichzeitig begegnen; diese bilden eine Regelschar eines Hyperboloids.

Die zweite Regelschar, welche dieses Hyperboloid enthält, und welcher die beiden zuerst angenommenen sich selbst konjugierten Strahlen angehören, enthält unendlich viele Paare von Erzeugenden, welche harmonisch getrennt werden (S. 93) durch die beiden ersten sich selbst konjugierten Strahlen; jedes solche Paar ist ein Paar konjugierter Strahlen im Nullsystem.

Die in § 35 gewonnenen Resultate lassen sich hier beim Nullsystem so aussprechen:

Wenn $\mathfrak{e}$ ein beliebiger Punkt im Raume und ε die durch ihn gehende Polarebene desselben im Nullsystem ist, so geht durch $\mathfrak{e}$ eine einzige bestimmte Sekante g der Raumkurve, und in ε liegt eine einzige bestimmte Gerade g_1, welche Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen der Raumkurve ist, g und g_1 sind konjugierte Strahlen im Nullsystem; und zwar beide eigentlich oder beide uneigentlich, d. h. wenn g in zwei reellen Punkten der Raumkurve begegnet (eigentliche Sekante ist), so gehen auch

durch g_1 zwei reelle Schmiegungsebenen der Raumkurve und umgekehrt. Das erstere ist der Fall, sobald die Ebene ε nur einen reellen und zwei konjugiert-imaginäre Punkte der Raumkurve enthält, das letztere (uneigentliche g und g_1), sobald ε in drei reellen Punkten der Raumkurve begegnet, oder, was dasselbe ist, durch $\mathfrak{e}$ drei reelle Schmiegungsebenen der $C^{(3)}$ gehen. Ferner sind g_1 und $\mathfrak{e}$ harmonische Polare und harmonischer Pol in Bezug auf dasjenige (ganz oder nur teilweis reelle) Dreieck, in welchem die Ebene ε der Raumkurve begegnet; und analog sind ε und g harmonische Polarebene und harmonischer Polarstrahl in Bezug auf dasjenige Dreiflach, welches von den drei (reellen, oder paarweise nicht reellen) Schmiegungsebenen gebildet wird, die sich von $\mathfrak{e}$ aus an die Raumkurve legen lassen. —

Man kann ein Nullsystem auf sehr viele verschiedene Arten konstruieren, wenn man gewisse zu seiner Bestimmung notwendige und hinreichende Bestimmungsstücke annimmt. Wir wollen einige dieser Konstruktionen hier hervorheben:

1) Wenn drei Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und drei durch dieselben gehenden Ebenen $\alpha\,\beta\,\gamma$ gegeben sind, die so liegen, daſs ihr Schnittpunkt $(\alpha\beta\gamma)$ selbst in der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ liegt (während ihre drei Schnittlinien nicht in dieser Ebene liegen), so ist dadurch ein Nullsystem bestimmt, in welchem $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{b}$ und β, $\mathfrak{c}$ und γ Pol und Polarebene sind. Die drei Strahlenpaare:

$$\begin{array}{lcl} |\mathfrak{a}\mathfrak{b}| = r & \text{und} & |\alpha\beta| = r_1 \\ |\mathfrak{a}\mathfrak{c}| = s & ,, & |\alpha\gamma| = s_1 \\ |\mathfrak{b}\mathfrak{c}| = t & ,, & |\beta\gamma| = t_1 \end{array}$$

sind drei Paare konjugierter Strahlen des Nullsystems, und um zu einer beliebigen Ebene π den Pol $\mathfrak{p}$ zu finden, suche man die Durchbohrungspunkte $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ der Strahlen rr_1, ss_1 mit der Ebene π auf und den Schnittpunkt:

$$\mathfrak{p} = (|\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1|,\ |\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1|),$$

dann ist $\mathfrak{p}$ der Pol der Ebene π; in analoger Weise findet man zu jedem Punkte $\mathfrak{p}$ die Polarebene π im Nullsystem, indem man durch $\mathfrak{p}$ die Gerade zieht, welche r und r_1 trifft,

sodann die Gerade, welche s und s_1 trifft, und durch beide Gerade eine Ebene legt. Da durch den zuerst konstruierten Punkt $\mathfrak{p}$ auch die Verbindungslinie der Schnittpunkte tt_1 von t und t_1 mit π gehen mufs, so erhält man einen Satz, der hier nicht weiter hervorgehoben werden soll.

2) Wenn zwei Paare Strahlen s und s_1, t und t_1 gegeben sind, die der Bedingung genügen, hyperboloidische Lage zu haben, d. h. einer Regelschar anzugehören, so ist dadurch ein Nullsystem bestimmt, in welchem s und s_1, t und t_1 konjugierte Strahlen sind. Um zu einem beliebigen Punkte $\mathfrak{p}$ die Polarebene π zu finden, braucht man nur wie vorhin durch $\mathfrak{p}$ die Gerade zu ziehen, welche s und s_1 begegnet, und die Gerade, welche t und t_1 begegnet, und beide Gerade durch eine Ebene π zu verbinden.

3) Wenn ein Paar Strahlen ss_1, die sich im Raume nicht treffen, und auf einer Geraden g, welche beiden begegnet, sowohl ein Punkt $\mathfrak{a}$, als durch dieselbe eine beliebige Ebene α gegeben ist, so ist dadurch ein Nullsystem bestimmt, in welchem $\mathfrak{a}$ und α Pol und Polarebene, s und s_1 ein Paar konjugierter Strahlen ist (g eine sich selbst konjugierte Gerade).

Um zu einem beliebigen Punkte $\mathfrak{p}$ die Polarebene π zu konstruieren, ziehe man zuerst durch $\mathfrak{a}$ eine beliebige Gerade t, welche s und s_1 nicht begegnet, lege durch $s\,s_1\,t$ ein Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$, dessen anderer Regelschar die Gerade g angehören wird; die durch g gehende Ebene α wird das Hyperboloid in einem zweiten Strahle t_1 schneiden, welcher zu der Regelschar gehört, die durch $s\,s_1\,t$ bestimmt wird. Die Paare konjugierter Strahlen $s\,s_1$ und $t\,t_1$ bestimmen dann nach 2) das Nullsystem, und zu jedem Punkte $\mathfrak{p}$ kann, wie oben gezeigt ist, die Polarebene konstruiert werden.

4) Wenn drei Gerade $g\,g'\,g''$, die einander im Raume nicht treffen, ein beliebiger Punkt $\mathfrak{p}$ und eine durch ihn gehende Ebene π gegeben sind, so ist dadurch ein Nullsystem bestimmt, von welchem $\mathfrak{p}$ und π Pol und Polarebene und $g\,g'\,g''$ drei sich selbst konjugierte Gerade sind.

Zur Konstruktion des Polarsystems lege man durch die drei Geraden $g\,g'\,g''$ ein Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ und bestimme die zweite Regelschar desselben, welcher $g\,g'\,g''$ nicht angehören;

diese mufs nach dem Obigen unendlich viele Paare konjugierter Strahlen enthalten, von denen wir drei sofort konstruieren können: Die Ebene π schneidet $g g' g''$ in drei Punkten, durch welche drei Erzeugende $s\, s'\, s''$ der andern Regelschar des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ gehen, und die drei Ebenen, welche wir durch $\mathfrak{p}$ und die drei Geraden $g\, g'\, g''$ legen können, schneiden das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ in drei Erzeugenden $s_1\, s_1'\, s_1''$ der zweiten Regelschar. Dann sind s und s_1, s' und s_1', s'' und s_1'' drei Paare konjugierter Strahlen des Nullsystems, für welches $g g' g''$ sich selbst konjugierte Strahlen, $\mathfrak{p}$ und π Pol und Polarebene sind. Denn sie gehören einer Regelschar des Hyperboloids an, dessen andere Regelschar aus lauter sich selbst konjugierten Strahlen besteht. Die Ebene π schneidet aber das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ in einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, auf dem die Durchbohrungspunkte des Strahlenpaars $s s_1$ liegen, und die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte mufs der Konstruktion zufolge durch $\mathfrak{p}$ gehen; da dasselbe für $s' s_1'$ gilt, so ist $\mathfrak{p}$ der Pol von π. Durch zwei der gefundenen Strahlenpaare $s\, s_1$ und $s' s_1'$ ist nun das Nullsystem nach 2) schon vollständig bestimmt und zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ die Polarebene $\mathfrak{\xi}$ zu konstruieren.

5) Wenn zwei Gerade $g\, g'$, die sich im Raume nicht treffen, auf der ersten g drei Punkte $\mathfrak{a}\, \mathfrak{a}'\, \mathfrak{a}''$ und durch g drei Ebenen $\alpha\, \alpha'\, \alpha''$ gegeben sind, so ist dadurch ein Nullsystem bestimmt, in welchem $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{a}'$ und α', $\mathfrak{a}''$ und α'' Pole und Polarebenen und $g\, g'$ zwei sich selbst konjugierte Strahlen sind.

Zur Konstruktion des Polarsystems verbinde man die drei Schnittpunkte der Ebenen $\alpha\, \alpha'\, \alpha''$ und der Geraden g' bez. mit den drei Punkten $\mathfrak{a}\, \mathfrak{a}'\, \mathfrak{a}''$ auf g durch die drei Strahlen $a\, a'\, a''$, dann werden dieselben drei sich selbst konjugierte Strahlen im Nullsystem sein, weil jeder in einer Ebene durch deren Pol geht. Die drei Strahlen $a\, a'\, a''$ bestimmen aber eine Regelschar von lauter sich selbst konjugierten Strahlen, deren zugehörige zweite Regelschar Paare konjugierter Strahlen im Nullsysteme enthalten mufs; zu dieser gehören nun auch die beiden sich selbst konjugierten Strahlen g und g', und wir haben oben gesehen, dafs alle Paare konjugierter Strahlen jener zweiten Regelschar involutorisch gepaart auf-

treten und im hyperbolischen Falle harmonisch getrennt werden durch zwei sich selbst konjugierte Strahlen; wir nehmen also aus der durch $aa'a''$ bestimmten Regelschar eine beliebige Erzeugende s und konstruieren diejenige vierte harmonische Erzeugende s_1, welche derselben Regelschar angehört und so liegt, daſs eine beliebige Erzeugende der andern Schar von $gg'ss_1$ in vier harmonischen Punkten geschnitten oder gg' durch ss_1 harmonisch getrennt werden; dann müssen ss_1 ein Paar konjugierter Strahlen des Nullsystems sein. Konstruiert man in gleicher Weise noch ein zweites Paar tt_1, so bestimmen diese beiden Paare nach 2) das Nullsystem vollständig.

§ 37. Einteilung der Raumkurven dritter Ordnung.

Wie man die ebenen Kegelschnitte nach ihrem Verhalten zu der unendlich-entfernten Geraden in drei verschiedene Gattungen einteilt, so kann man auch bei den Raumkurven 3. O. nach ihrem Verhalten zur unendlich-entfernten Ebene mehrere Arten unterscheiden. Jede Ebene begegnet der Raumkurve im allgemeinen in drei Punkten, die entweder alle drei reell sind oder von denen einer reell und die beiden andern konjugiert-imaginär sind auf einem reellen Träger einer elliptischen Punktinvolution; insbesondere können von den drei reellen Schnittpunkten zwei zusammenfallen, die Ebene kann also eine Tangente der Raumkurve enthalten, und endlich können alle drei Schnittpunkte zusammenfallen, d. h. die Ebene kann eine Schmiegungsebene der Raumkurve sein. Wenden wir dies auf die Ebene im Unendlichen (ε_∞) an und nennen die Tangente in einem unendlich-entfernten Punkte der Raumkurve eine Asymptote derselben, die Schmiegungsebene in einem unendlich-entfernten Punkte der Raumkurve eine Asymptoten-Ebene derselben, so werden vier Fälle eintreten können:

1) die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ enthält nur einen reellen Punkt der Raumkurve $C^{(3)}$; dann heiſst dieselbe eine kubische Ellipse;
2) die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ enthält drei reelle, von einander verschiedene unendlich-entfernte Punkte; dann heiſst die Raumkurve eine kubische Hyperbel.

3) Insbesondere können von den drei reellen Punkten in ε_∞ zwei zusammenfallen, d. h. die ε_∞ enthält einen reellen Punkt und aufserdem eine Tangente in einem andern reellen Punkt der Raumkurve; dann heifst dieselbe eine kubische parabolische Hyperbel.

4) Oder endlich ist ε_∞ selbst Schmiegungsebene der Raumkurve, enthält also nur einen reellen Punkt (d. h. in demselben drei zusammenfallende Punkte) der Raumkurve; dann heifst dieselbe eine kubische Parabel.

Um über diesen Charakter der Raumkurve $C^{(3)}$ Aufschlufs zu erhalten, braucht man nur dieselbe als den Schnitt zweier Kegel $\mathfrak{a}^{(2)}$ und $\mathfrak{b}^{(2)}$ aufzufassen, welche $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ als gemeinschaftlichen Kegelstrahl haben (S. 231) und durch irgend einen festen Punkt $\mathfrak{O}$ des Raumes Parallele zu ziehen sowohl zu den Strahlen des Kegels $\mathfrak{a}^{(2)}$, als auch zu denen des Kegels $\mathfrak{b}^{(2)}$; dann erhält man in $\mathfrak{O}$ zwei konzentrische Kegel, welche zunächst die zu $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ parallel gezogene Gerade als gemeinschaftlichen Strahl haben; die übrigen gemeinschaftlichen Strahlen gehen nach den unendlich-entfernten Punkten der Raumkurve $C^{(3)}$. Je nachdem von diesen drei Strahlen entweder einer oder alle drei reell sind, oder von letzteren zwei oder alle drei zusammenfallen, treten die obigen vier Fälle ein. Hinsichtlich der kubischen Parabel, für welche die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ Schmiegungsebene ist, können wir noch eine besondere Eigenschaft hervorheben: Da nämlich jede der Schmiegungsebenen einer Raumkurve 3. O. von der Gesamtheit derselben längs Geraden geschnitten wird, welche einen Kegelschnitt umhüllen, und da die Punkte dieses Kegelschnitts (Durchschnittspunkte zweier unendlich-nahen Tangenten) diejenigen Punkte sind, in welchen die Gesamtheit der Tangenten der Raumkurve (Durchschnittslinien zweier unendlich-nahen einander folgenden Schmiegungsebenen) die festgehaltene Schmiegungsebene durchbohren, so ergiebt sich folgende Eigenschaft der kubischen Parabel:

Wenn man von einem beliebig gewählten festen Punkte $\mathfrak{O}$ Parallele zieht zu sämtlichen Tangenten einer kubischen Parabel und Parallelebenen legt zu sämtlichen Schmiegungsebenen derselben, so bilden jene Strahlen einen Kegel zweiten Gra-

tret und diese Ebenen sind die Berührungsebenen
w des desselben Kegels.
r Da jeder Punkt einer Raumkurve $C^{(3)}$ der Mittelpunkt eines bestimmten durch die Raumkurve gehenden Kegels 2. O. ist, so können wir sagen:

Durch eine kubische Hyperbel gehen drei reelle Cylinder zweiten Grades, die alle drei hyperbolisch sind; durch eine kubische Ellipse geht nur ein reeller Cylinder zweiten Grades, welcher elliptisch ist. Durch eine kubische parabolische Hyperbel gehen zwei reelle Cylinder zweiten Grades, von denen der eine hyperbolisch, der andere parabolisch ist, und durch eine kubische Parabel geht nur ein reeller Cylinder zweiten Grades, welcher parabolisch ist.

Bezeichnen wir nämlich durch $\mathfrak{a}_\infty$ $\mathfrak{b}_\infty$ $\mathfrak{c}_\infty$ die drei unendlich-entfernten Punkte der $C^{(3)}$, so sind für die kubische Hyperbel alle drei reell, also jeder der unendlich-entfernte Mittelpunkt éines Cylinders, welcher zwei unendlich-entfernte Erzeugende hat (die nach den beiden andern unendlich-entfernten Punkten hingehen), also hyperbolisch ist. Bei der kubischen Ellipse ist nur $\mathfrak{a}_\infty$ reell, also der Cylinder von $\mathfrak{a}_\infty$ durch die $C^{(3)}$ ein elliptischer. Bei der parabolischen Hyperbel fallen $\mathfrak{b}_\infty$ und $\mathfrak{c}_\infty$ zusammen in eine Tangente t_∞ der $C^{(3)}$; also ist der Cylinder für $\mathfrak{a}_\infty$ ein parabolischer und der Cylinder für $\mathfrak{b}_\infty$ ($\mathfrak{c}_\infty$) ein hyperbolischer, weil er zwei unendlich-entfernte Erzeugende (t_∞ und $|\mathfrak{b}_\infty \mathfrak{a}_\infty|$) hat; endlich fallen für die kubische Parabel alle drei Punkte $\mathfrak{a}_\infty$ $\mathfrak{b}_\infty$ $\mathfrak{c}_\infty$ zusammen; die Tangente t_∞ in diesem unendlich-entfernten Punkte der kubischen Parabel liegt selbst in ε_∞, also geht durch letztere nur ein parabolischer Cylinder.

Wir nannten die Tangente in einem unendlich-entfernten Punkte der Raumkurve $C^{(3)}$ eine Asymptote; einer solchen Geraden schliefst sich also allemal ein Zweig der Raumkurve derartig an, dafs ihr unendlich-entfernter Punkt und nur dieser auf der Kurve liegt. Der asymptotische Charakter hört auf, sobald die Gerade ganz im Unendlichen (auf ε_∞) liegt, weil man dann von einem unendlich-entfernten Punkte der Geraden nicht mehr reden kann. Die kubische

Parabel, welche die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ zur Schmiegungsebene, also nur einen unendlich-entfernten Punkt hat, dessen Tangente ganz in ε_∞ liegt, besitzt daher keine Asymptote. Die kubische parabolische Hyperbel dagegen, welche aufser einer unendlich-entfernten Tangente noch einen reellen unendlich-entfernten Punkt hat, dessen Tangente nicht in ε_∞ liegt, besitzt in dieser Tangente eine Asymptote; die kubische Hyperbel hat drei Asymptoten, die kubische Ellipse nur eine. Die Asymptoten sind natürlich Strahlen derjenigen Cylinder, welche sich durch die Raumkurve legen lassen, und die Berührungsebene an einem solchen Cylinder längs der Asymptote ist die Schmiegungsebene an dem unendlich-entfernten Punkte, in welchem die Asymptote die Raumkurve berührt.

Hinsichtlich der Art der Berührung einer Asymptote mit einer Kurve bemerken wir Folgendes: Wenn wir zunächst einen einfachen Punkt $\mathfrak{p}$ einer beliebigen ebenen oder räumlichen Kurve im Endlichen nehmen und die Tangente t in demselben, so können wir uns das unendlich kleine Kurvenstück in der Nähe der Tangente ersetzt denken durch den Krümmungskreis, welcher bekanntlich in dem betrachteten Punkte gleichzeitig berührt und schneidet; wenn wir nun von irgend einem Punkte aus diese Figur auf eine andere Ebene so projizieren, dafs der Berührungspunkt in die Unendlichkeit geht, die Tangente selbst aber im Endlichen bleibt, also nur ihr unendlich-entfernter Punkt der Berührungspunkt wird, dann heifst eine solche Tangente Asymptote an einem einfachen unendlich-entfernten Punkt der Kurve, und da der Krümmungskreis durch diese Projektion in eine Hyperbel übergeht, für welche jene Asymptote der Kurve auch Asymptote wird, so findet die Berührung einer Asymptote mit der Kurve immer in der Weise statt, wie bei der Hyperbel, d. h. zwei Äste der Kurve nähern sich nach entgegengesetzten Richtungen (nicht nach derselben Richtung hin) dem unendlich-entfernten Punkt der Asymptote, so dafs die Schmiegungsebene in dem unendlich-entfernten Punkte, welche durch die Asymptote in zwei Halbebenen geteilt wird, jeden der beiden Äste in einer der Halb-

des und diese Ebenen sind die Berührungsebenen desselben Kegels.

Da jeder Punkt einer Raumkurve $C^{(3)}$ der Mittelpunkt eines bestimmten durch die Raumkurve gehenden Kegels 2. O. ist, so können wir sagen:

Durch eine kubische Hyperbel gehen drei reelle Cylinder zweiten Grades, die alle drei hyperbolisch sind; durch eine kubische Ellipse geht nur ein reeller Cylinder zweiten Grades, welcher elliptisch ist. Durch eine kubische parabolische Hyperbel gehen zwei reelle Cylinder zweiten Grades, von denen der eine hyperbolisch, der andere parabolisch ist, und durch eine kubische Parabel geht nur ein reeller Cylinder zweiten Grades, welcher parabolisch ist.

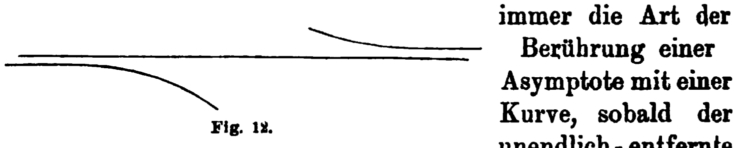
Bezeichnen wir nämlich durch $\mathfrak{a}_\infty$ $\mathfrak{b}_\infty$ $\mathfrak{c}_\infty$ die drei unendlich-entfernten Punkte der $C^{(3)}$, so sind für die kubische Hyperbel alle drei reell, also jeder der unendlich-entfernte Mittelpunkt eines Cylinders, welcher zwei unendlich-entfernte Erzeugende hat (die nach den beiden andern unendlich-entfernten Punkten hingehen), also hyperbolisch ist. Bei der kubischen Ellipse ist nur $\mathfrak{a}_\infty$ reell, also der Cylinder von $\mathfrak{a}_\infty$ durch die $C^{(3)}$ ein elliptischer. Bei der parabolischen Hyperbel fallen $\mathfrak{b}_\infty$ und $\mathfrak{c}_\infty$ zusammen in eine Tangente t_∞ der $C^{(3)}$; also ist der Cylinder für $\mathfrak{a}_\infty$ ein parabolischer und der Cylinder für $\mathfrak{b}_\infty$ ($\mathfrak{c}_\infty$) ein hyperbolischer, weil er zwei unendlich-entfernte Erzeugende (t_∞ und $|\mathfrak{b}_\infty \mathfrak{a}_\infty|$) hat; endlich fallen für die kubische Parabel alle drei Punkte $\mathfrak{a}_\infty$ $\mathfrak{b}_\infty$ $\mathfrak{c}_\infty$ zusammen; die Tangente t_∞ in diesem unendlich-entfernten Punkte der kubischen Parabel liegt selbst in ε_∞, also geht durch letztere nur ein parabolischer Cylinder.

Wir nannten die Tangente in einem unendlich-entfernten Punkte der Raumkurve $C^{(3)}$ eine Asymptote; einer solchen Geraden schliefst sich also allemal ein Zweig der Raumkurve derartig an, dafs ihr unendlich-entfernter Punkt und nur dieser auf der Kurve liegt. Der asymptotische Charakter hört auf, sobald die Gerade ganz im Unendlichen (auf ε_∞) liegt, weil man dann von einem unendlich-entfernten Punkte der Geraden nicht mehr reden kann. Die kubische

Parabel, welche die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ zur Schmiegungsebene, also nur einen unendlich-entfernten Punkt hat, dessen Tangente ganz in ε_∞ liegt, besitzt daher keine Asymptote. Die kubische parabolische Hyperbel dagegen, welche aufser einer unendlich-entfernten Tangente noch einen reellen unendlich-entfernten Punkt hat, dessen Tangente nicht in ε_∞ liegt, besitzt in dieser Tangente eine Asymptote; die kubische Hyperbel hat drei Asymptoten, die kubische Ellipse nur eine. Die Asymptoten sind natürlich Strahlen derjenigen Cylinder, welche sich durch die Raumkurve legen lassen, und die Berührungsebene an einem solchen Cylinder längs der Asymptote ist die Schmiegungsebene an dem unendlich-entfernten Punkte, in welchem die Asymptote die Raumkurve berührt.

Hinsichtlich der Art der Berührung einer Asymptote mit einer Kurve bemerken wir Folgendes: Wenn wir zunächst einen einfachen Punkt $\mathfrak{p}$ einer beliebigen ebenen oder räumlichen Kurve im Endlichen nehmen und die Tangente t in demselben, so können wir uns das unendlich kleine Kurvenstück in der Nähe der Tangente ersetzt denken durch den Krümmungskreis, welcher bekanntlich in dem betrachteten Punkte gleichzeitig berührt und schneidet; wenn wir nun von irgend einem Punkte aus diese Figur auf eine andere Ebene so projizieren, dafs der Berührungspunkt in die Unendlichkeit geht, die Tangente selbst aber im Endlichen bleibt, also nur ihr unendlich-entfernter Punkt der Berührungspunkt wird, dann heifst eine solche Tangente Asymptote an einem einfachen unendlich-entfernten Punkt der Kurve, und da der Krümmungskreis durch diese Projektion in eine Hyperbel übergeht, für welche jene Asymptote der Kurve auch Asymptote wird, so findet die Berührung einer Asymptote mit der Kurve immer in der Weise statt, wie bei der Hyperbel, d. h. zwei Äste der Kurve nähern sich nach entgegengesetzten Richtungen (nicht nach derselben Richtung hin) dem unendlich-entfernten Punkt der Asymptote, so dafs die Schmiegungsebene in dem unendlich-entfernten Punkte, welche durch die Asymptote in zwei Halbebenen geteilt wird, jeden der beiden Äste in einer der Halb-

ebenen (nicht beide in derselben Halbebene) und entgegengesetzt gerichtet enthält (Fig. 12). Dies ist immer die Art der Berührung einer Asymptote mit einer Kurve, sobald der unendlich-entfernte Berührungspunkt ein einfacher Punkt ist (d. h. weder Wende-, noch Doppel-, noch Rückkehrpunkt, Fälle, die bei unserer Raumkurve $C^{(3)}$ überhaupt nicht vorhanden sind), und die Asymptote nur einen unendlich-entfernten Punkt hat, übrigens im Endlichen verläuft. Wenn wir dagegen die anfängliche Figur eines unendlich-kleinen Kurvenstücks mit seiner Tangente und seinem Krümmungskreise so projizieren, dafs in der Projektionsebene die ganze Tangente in die Unendlichkeit geht, dann geht der Krümmungskreis in eine Parabel über und die Berührung einer unendlich-entfernten Tangente an einer Kurve findet immer in der Weise, wie bei der Parabel statt, so dafs von einer eigentlichen Asymptote nicht mehr die Rede sein kann.


Fig. 12.

Nachdem wir uns so über die Art der Berührung einer Asymptote in einem einfachen unendlich-entfernten Punkt einer Asymptote orientiert haben, können wir den Verlauf der Raumkurve $C^{(3)}$ auf einem der Cylinder, welche sich durch dieselbe legen lassen, verfolgen.

Bei der kubischen Ellipse, durch welche sich nur ein elliptischer Cylinder legen läfst, auf dem ein bestimmter Cylinderstrahl die einzige reelle Asymptote (Tangente in dem einzigen reellen unendlich-entfernten Punkte der kubischen Ellipse) ist, mufs der Verlauf der Raumkurve der sein, dafs sie aus einem zusammenhängenden Zuge besteht, welcher sich mit seinen beiden ins Unendliche erstreckenden Ästen an die Asymptote nach entgegengesetzten Richtungen derselben und auf entgegengesetzten Seiten von ihr im Unendlichen anschliefst.

Bei der kubischen Parabel, durch welche sich nur ein parabolischer Cylinder legen läfst, welcher also einen ganz in ε_∞ liegenden Strahl hat, die Tangente an dem einzigen unendlich-entfernten Punkte der kubischen Parabel, wird der Verlauf der Raumkurve der sein, dafs sie aus einem zu-

sammenhängenden Zuge besteht, welcher sich parabolisch in dem unendlich-entfernten Punkte schliefst.

Bei der kubischen parabolischen Hyperbel giebt es zwei Cylinder durch dieselbe; der eine ist ein parabolischer und enthält aufser dem unendlich-entfernten Cylinderstrahl (Tangente in dem einen unendlich-entfernten Punkte) noch einen im Endlichen verlaufenden Cylinderstrahl, eine Asymptote der Raumkurve (Tangente in dem andern unendlich-entfernten Punkte). Der Cylinder wird durch diese Asymptote in zwei Teile geteilt; in jedem derselben verläuft ein Zweig der kubischen parabolischen Hyperbel, welche demnach aus zwei Zweigen besteht. Beide Zweige schliefsen sich einerseits an die endliche Asymptote nach entgegengesetzten Richtungen hin und von entgegengesetzten Seiten im Unendlichen an und schliefsen sich andererseits parabolisch in dem zweiten unendlich-entfernten Punkte, dessen Tangente der unendlich-entfernte Strahl des parabolischen Cylinders ist. Zweitens geht durch die kubische parabolische Hyperbel ein hyperbolischer Cylinder, welcher zwei unendlich-entfernte Strahlen hat; diese teilen den hyperbolischen Cylinder in zwei Mantelflächen, welche von einander getrennt werden durch zwei Asymptotenebenen. Die eine derselben ist die Schmiegungsebene in dem unendlich-entfernten Punkte der Raumkurve, dessen Tangente ganz im Unendlichen liegt; die andere enthält die im Endlichen verlaufende Asymptote der Raumkurve, welche kein Cylinderstrahl ist. Von den beiden Zweigen der kubischen parabolischen Hyperbel verläuft also jeder auf einer Mantelfläche des hyperbolischen Cylinders und schliefst sich dem einen unendlich-entfernten Cylinderstrahl in parabolischer Weise an, während er die im Endlichen verlaufende Asymptote der Raumkurve, welche in der andern Asymptotenebene des Cylinders liegt, in hyperbolischer Weise (d. h. nach entgegengesetzten Richtungen hin und von entgegengesetzten Seiten) berührt.

Die kubische Hyperbel endlich hat drei verschiedene unendlich-entfernte Punkte und liegt auf drei hyperbolischen Cylindern. Betrachten wir den Verlauf derselben auf einem solchen: Von den drei reellen Asymptoten der Raumkurve (Tangenten in den unendlich-entfernten Punkten), die sämt-

lich im Endlichen verlaufen, d. h. nur je einen unendlich-entfernten Punkt haben, ist für den betrachteten hyperbolischen Cylinder eine Asymptote a_1 ein Cylinderstrahl; die beiden andern Asymptoten a_2 und a_3 liegen in je einer der beiden Asymptotenebenen des hyperbolischen Cylinders (ohne Cylinderstrahlen zu sein); die kubische Hyperbel mufs sich an jede der drei Asymptoten in hyperbolischer Weise anschliefsen, d. h. so, dafs zwei verschiedene Zweige derselben nach entgegengesetzten Richtungen hin und auf entgegengesetzten Seiten von der Asymptote ihrem unendlich-entfernten Punkte sich nähern. Fangen wir also mit dem unendlich-entfernten Punkte der Asymptote a_1, die auf der einen Mantelfläche des hyperbolischen Cylinders ein Cylinderstrahl ist, an, so geht ein Zweig der kubischen Hyperbel von diesem unendlich-entfernten Punkte aus bis zu dem unendlich-entfernten Punkte von a_2, welche Asymptote in einer Asymptotenebene des Cylinders liegt; dieser erste Zweig liegt also ganz auf einem Mantel des Cylinders; hieran schliefst sich von dem unendlich-entfernten Punkte der a_2 auf dem andern Cylindermantel ausgehend der zweite Zweig der kubischen Hyperbel, welcher ganz auf diesem zweiten Cylindermantel bleibt und sich der Asymptote a_3 in der zweiten Asymptotenebene des Cylinders anschliefst; von dem unendlich-entfernten Punkte der a_3 auf dem ersten Cylindermantel erstreckt sich dann wieder der dritte Zweig zurück bis zum unendlich-entfernten Punkte der Asymptote a_1, von welchem wir ausgingen; der dritte Zweig liegt also wieder auf dem ersten Cylindermantel. Wir sehen also, dafs die kubische Hyperbel aus drei bis ins Unendliche verlaufenden Zweigen besteht, von denen zwei auf einem Mantel des Cylinders, nämlich auf demjenigen liegen, welcher die Asymptote a_1 als Cylinderstrahl enthält, während der dritte Zweig auf dem andern Mantel des Cylinders verläuft; die drei Zweige schliefsen sich aber im Unendlichen zusammenhängend durch die Asymptoten aneinander an, wie wir ihren Verlauf beschrieben haben, so dafs der einzelne Zweig auf dem einen Cylindermantel zwischen die beiden andern auf dem andern Cylindermantel eintritt; die letzteren liegen getrennt in denjenigen beiden Teilen dieses Cylindermantels, in welche er durch den Cylinder-

strahl a_1 zerlegt wird. Derselbe Vorgang wiederholt sich bei jedem der drei hyperbolischen Cylinder, welche durch die kubische Hyperbel gelegt werden können; nur vertauschen dabei die drei Asymptoten $a_1\ a_2\ a_3$ ihre Rollen, indem immer eine Cylinderstrahl ist, und die beiden andern in den Asymptotenebenen des hyperbolischen Cylinders liegen. Jeder der drei Cylinder besteht aus zwei Mantelflächen, die sich von einander dadurch unterscheiden, daſs die eine eine Asymptote als Cylinderstrahl enthält, die andere nicht. Auf den drei letzteren Mantelflächen liegen die drei Zweige der kubischen Hyperbel einzeln, d. h. auf jeder dieser drei Mantelflächen je ein Zweig; auf den drei andern Mantelflächen dagegen liegen die drei Zweige der kubischen Hyperbel paarweise, d. h. auf jeder Mantelfläche je zwei Zweige. Hierdurch ist der Verlauf der Raumkurve $C^{(3)}$ auf den durch sie gehenden Cylindern in allen möglichen Fällen klargelegt.

§ 38. Untersuchung der in den Schmiegungsebenen einer Raumkurve dritter Klasse enthaltenen Kegelschnitte.

Wir haben gesehen, daſs eine beliebige festgehaltene Schmiegungsebene der Raumkurve $C^{(3)}$ von sämmtlichen Schmiegungsebenen in Geraden geschnitten wird, welche einen Kegelschnitt umhüllen. In jeder Schmiegungsebene ist also ein bestimmter Kegelschnitt enthalten; wir wollen den Zusammenhang derselben etwas näher erforschen und insbesondere ermitteln, wann sie Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln werden bei den verschiedenen Gattungen der Raumkurve $C^{(3)}$.

Gehen wir von zwei festgehaltenen Schmiegungsebenen $\alpha\beta$ aus, deren Schnittlinie $|\alpha\beta| = g_1$ die beiden in denselben enthaltenen Kegelschnitte $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ bez. in den Punkten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ berührt, dann ist hierdurch die ganze Raumkurve $C^{(3)}$ mit der Gesamtheit ihrer Schmiegungsebenen, Tangenten und Punkte vollständig bestimmt, und alle diese Elemente lassen sich linear konstruieren. Legen wir von einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{x}_1$ der Geraden g_1 an den Kegelschnitt $\alpha^{(2)}$ die zweite noch übrige Tangente x_α und und an den Kegelschnitt $\beta^{(2)}$ die zweite noch übrige Tangente

x_β, so bestimmen die beiden von $\mathfrak{x}_1$ ausgehenden Geraden $x_\alpha x_\beta$ eine Ebene $\mathfrak{\xi}$, welche Schmiegungsebene der Raumkurve ist. Mit der Veränderung von $\mathfrak{x}_1$ auf g_1 erhalten wir die Totalität aller Schmiegungsebenen. Geht insbesondere $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{a}_1$, so läfst sich aus $\mathfrak{a}_1$ noch eine zweite Tangente an den Kegelschnitt $\beta^{(2)}$ legen; diese möge ihn in dem Punkte $\mathfrak{b}$ berühren, dann ist $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}|$ die Schnittlinie zweier unendlichnahen Schmiegungsebenen, d. h. eine Tangente der Raumkurve, und zwar diejenige, welche in der Schmiegungsebene β liegt, und ihr Berührungspunkt $\mathfrak{b}$ mit dem Kegelschnitt $\beta^{(2)}$ ist derjenige Punkt der Raumkurve, dessen Schmiegungsebene β ist.

Geht andererseits der veränderliche Punkt $\mathfrak{x}_1$ insbesondere nach $\mathfrak{b}_1$, so läfst sich aus $\mathfrak{b}_1$ noch eine zweite Tangente (aufser g_1) an den Kegelschnitt $\alpha^{(2)}$ legen, welche ihn in $\mathfrak{a}$ berühren möge. Die Gerade $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}|$ ist Tangente der Raumkurve im Punkte $\mathfrak{a}$, dessen Schmiegungsebene α ist. Die Tangenten:

$$t_\mathfrak{a} = |\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}| \quad \text{und} \quad t_\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}|$$

der Raumkurve können einander im Raume nicht begegnen. Jedem Punkte $\mathfrak{x}_1$ der Geraden g_1 gehört demgemäfs eine bestimmte Ebene $\mathfrak{\xi}$ zu, welche die dritte durch $\mathfrak{x}_1$ gehende Schmiegungsebene ist. Insbesondere gehört dem Punkte $\mathfrak{a}_1$ die Schmiegungsebene β und dem Punkte $\mathfrak{b}_1$ die Schmiegungsebene α zu.

Halten wir von den beiden Schmiegungsebenen α β die eine α fest, verändern aber die andere β längs der Raumkurve, so bleibt der Punkt $\mathfrak{a}_1$, Berührungspunkt der festen Schmiegungsebene α mit der Raumkurve, und ebenso die Tangente $t_\mathfrak{a}$ unverändert, der Punkt $\mathfrak{b}_1$ aber verändert sich auf der festen Geraden $t_\mathfrak{a}$; wir erhalten also folgenden Satz:

Wenn eine veränderliche Schmiegungsebene $\mathfrak{\xi}$ einer Raumkurve $C^{(3)}$ eine feste Schmiegungsebene α in Strahlen schneidet (die einen Kegelschnitt $\alpha^{(2)}$ umhüllen), so wird der Schnittstrahl $|\mathfrak{\xi}\alpha|$ gleichzeitig von dem veränderlichen Kegelschnitt $\mathfrak{\xi}^{(2)}$ berührt, der in der Schmiegungsebene $\mathfrak{\xi}$ enthalten ist; der Berührungspunkt desselben beschreibt eine feste Gerade, die Tangente der Raumkurve in dem-

jenigen Punkte, in welchem die feste Schmiegungsebene α sie berührt.

Suchen wir nun in der veränderlichen Schmiegungsebene:

$$\mathfrak{x} = [x_\alpha x_\beta]$$

den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ zu ermitteln, welcher von den Schnittlinien mit der Gesamtheit der Schmiegungsebenen umhüllt wird. Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ hat die Tangenten x_α x_β. Wir können dieselben als die Träger zweier Punktreihen auffassen, welche die Gesamtheit der Schmiegungsebenen auf ihnen ausschneidet. Diese Gesamtheit schneidet nun die Ebene α in den Tangenten des Kegelschnitts $\alpha^{(2)}$, folglich die beiden Tangenten g_1 und x_α in zwei projektivischen Punktreihen, ebenso die Ebene β in den Tangenten des Kegelschnitts $\beta^{(2)}$, folglich g_1 und x_β in zwei projektivischen Punktreihen, mithin werden auch x_α und x_β in zwei projektivischen Punktreihen geschnitten, deren Erzeugnis der Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ ist. Die dem Schnittpunkte $\mathfrak{x}_1$ der Träger x_α und x_β entsprechenden Punkte sind bekanntlich die Berührungspunkte des Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$ mit den beiden Trägern. Denken wir uns nun eine veränderliche Schmiegungsebene der Lage von α unendlich nahe gebracht, so schneidet sie x_β in dem Punkte $\mathfrak{x}_1$ und α in der Tangente $t_\alpha = |\mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}|$; wo also $|\mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}|$ der Geraden x_α begegnet, da liegt der Berührungspunkt von $\mathfrak{x}^{(2)}$ mit x_α, und andererseits ist der Schnittpunkt von $t_\mathfrak{b}$ mit x_β der Berührungspunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$ mit der Tangente x_β. Wir haben also auf diesen beiden Tangenten die Berührungspunkte gefunden und wollen sie bezeichnen:

$$\mathfrak{t}_\alpha = (t_\mathfrak{a} x_\alpha) \qquad \mathfrak{t}_\beta = (t_\mathfrak{b} x_\beta).$$

Denken wir uns ferner eine veränderliche Schmiegungsebene unendlich nahe gebracht der Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$, d. h. aus einem dem Punkte $\mathfrak{x}_1$ unendlich-nahen Punkte der g_1 die beiden noch übrigen Tangenten an $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ gelegt, so schneiden sie die früheren in den Berührungspunkten der Tangenten x_α und x_β mit den Kegelschnitten $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$.

Wir bezeichnen diese Berührungspunkte, in welchen die Tangenten x_α und x_β die Kegelschnitte $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ berühren durch

$$\mathfrak{x}_\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_\beta,$$

dann ist offenbar die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta|$ die Schnittlinie der Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ mit ihrer unendlich-nahen Schmiegungsebene, also eine Tangente der $C^{(3)}$ und zugleich eine Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$; ihr Berührungspunkt mit $\mathfrak{x}^{(2)}$ ist ein Punkt der $C^{(3)}$, und zwar derjenige Punkt $\mathfrak{x}$, dessen Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ ist.

Wir kennen also von dem Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ zwei Tangenten x_α und x_β, ihre Berührungspunkte $\mathfrak{t}_\alpha$ $\mathfrak{t}_\beta$ und außerdem eine Tangente:

$$t_\mathfrak{x} = |\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta|,$$

wodurch der Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ vollständig bestimmt ist. Der Berührungspunkt $\mathfrak{x}$ der dritten Tangente $t_\mathfrak{x}$ mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ ist der Punkt der Raumkurve $C^{(3)}$, dessen Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ ist. Er ist leicht zu finden aus dem Dreieck $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta$, welches dem Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ umschrieben ist, und von welchem wir die Berührungspunkte $\mathfrak{t}_\alpha$ und $\mathfrak{t}_\beta$ auf zwei Dreiecksseiten kennen.

Die Verbindungslinie $|\mathfrak{t}_\alpha \mathfrak{t}_\beta|$ ist die Polare des Punktes $\mathfrak{x}_1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$; verändern wir den Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf der Geraden g_1, so beschreiben die Punkte $\mathfrak{t}_\alpha$ und $\mathfrak{t}_\beta$ auf den festen Geraden $t_\mathfrak{a}$ und $t_\mathfrak{b}$ zwei Punktreihen, welche die veränderliche Ebene $\mathfrak{x}$ auf ihnen ausschneidet. Da aber $t_\mathfrak{a}$ und $t_\mathfrak{b}$ zwei feste Tangenten der Kegelschnitte $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ sind, x_α und x_β veränderliche Tangenten, welche die gemeinsame Tangente g_1 und jede der beiden festen Tangenten in je zwei projektivischen Punktreihen schneiden, so müssen die Punkte $\mathfrak{t}_\alpha$ und $\mathfrak{t}_\beta$ auf den festen Trägern $t_\mathfrak{a}$ und $t_\mathfrak{b}$ zwei projektivische Punktreihen beschreiben, folglich die Verbindungslinie $|\mathfrak{t}_\mathfrak{a} \mathfrak{t}_\mathfrak{b}|$ eine Regelschar eines Hyperboloids durchlaufen; zu dieser Regelschar gehören auch die Verbindungslinien $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$, so daſs also $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ ein windschiefes Vierseit auf diesem Hyperboloid ist.

Wir haben hiernach folgenden Satz bewiesen:

In jeder Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ einer Raumkurve dritter Klasse liegt ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$, welcher von den Durchschnittslinien von $\mathfrak{x}$ mit der Gesamtheit der Schmiegungsebenen umhüllt wird. Wenn man eine Durchschnittslinie g_1 zweier Schmiegungsebenen festhält und durch jeden

Punkt $\mathfrak{x}_1$ derselben die dritte Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ legt und in Bezug auf den in ihr enthaltenen Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ die Polare des Punktes $\mathfrak{x}_1$ konstruiert, so bilden sämtliche Polaren eine Regelschar eines Hyperboloids. Dieses Hyperboloid ist demjenigen windschiefen Vierseit einbeschrieben, dessen eines Paar Gegenecken die Punkte der Raumkurve sind, in welchen die beiden festen Schmiegungsebenen berühren, und dessen anderes Paar Gegenecken die beiden Berührungspunkte sind, in welchen die Schnittlinie der beiden festen Schmiegungsebenen die in ihnen enthaltenen Kegelschnitte berührt.

Obwohl dieser Satz nur für den reellen Fall bewiesen ist, dafs die beiden Schmiegungsebenen durch die Gerade g_1 reell sind, so ist er doch in der obigen Aussprache davon unabhängig, denn die Punkte $\mathfrak{x}_1$, die Kegelschnitte $\mathfrak{x}^{(2)}$ und die Polaren der Punkte $\mathfrak{x}_1$ in Bezug auf $\mathfrak{x}^{(2)}$ sind immer reell vorhanden, mag auch das Tangentenpaar $x_\alpha x_\beta$ nicht reell sein. Wir werden daher die Gültigkeit dieses Satzes auch für den andern, nicht reellen Fall annehmen und überlassen es dem Leser einen andern unabhängigen Beweis hierfür zu suchen.

Legen wir nun durch die Gerade g_1, mag sie die Schnittlinie zweier reellen oder zweier konjugiert-imaginären Schmiegungsebenen der Raumkurve sein, eine beliebige Ebene ε, so schneidet dieselbe die veränderliche Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ in Strahlen, deren Pole in Bezug auf den jedesmaligen Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ leicht ermittelt werden können. Da die feste Ebene ε durch die Gerade g_1, also durch alle Punkte $\mathfrak{x}_1$ geht, so mufs der gesuchte Pol auf der Polare des Punktes $\mathfrak{x}_1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ liegen, d. h. auf dem oben ermittelten Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$. Da ferner das Tangentenpaar aus $\mathfrak{x}_1$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ in den beiden festen Schmiegungsebenen α und β sich verändert, und die feste Ebene ε den Schnittstrahl mit $\mathfrak{x}$ enthält, dessen Pol gesucht wird, so mufs dieser Pol in derjenigen Ebene liegen, die wir erhalten, wenn wir zu ε und dem Ebenenpaare α β die vierte harmonische, der ε zugeordnete Ebene konstruieren. Ist das Ebenenpaar $\alpha\beta$ konjugiert-imaginär, aber g_1 reell vorhanden, so wird es vertreten durch eine elliptische Ebenen-

involution mit der Axe g_1 und wir haben oben (S. 288) gerade für diesen elliptischen Fall die Ebeneninvolution konstruieren gelehrt; die zu dem imaginären Ebenenpaare $\alpha\beta$ und ε zugeordnete vierte harmonische Ebene ist dann nichts anderes, als die konjugierte Ebene zu ε in der elliptischen Ebeneninvolution, also in beiden Fällen eine bestimmte reell konstruierbare Ebene.

Da nun in dieser Ebene und in dem oben gefundenen Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ die gesuchten Pole der Schnittlinien $|\varepsilon\mathfrak{k}|$ in Bezug auf die Kegelschnitte $\mathfrak{k}^{(2)}$ gleichzeitig liegen müssen, so liegen sie auf einem Kegelschnitt, der Durchschnittskurve jener Ebene mit dem Hyperboloid. Dieser Ortskegelschnitt liegt in der durch g_1 gelegten Ebene ε', die der gegebenen Ebene ε konjugiert ist in derjenigen Ebeneninvolution, deren Doppelebenen das durch g_1 gehende Paar Schmiegungsebenen ist. Der Kegelschnitt geht auch, wie wir sehen, durch die beiden Punkte $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{b}_1$ in der Geraden g_1, nämlich die Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte in den beiden Schmiegungsebenen durch g_1., weil das oben gefundene Hyperboloid durch das windschiefe Vierseit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ geht.

Die durch die zuerst angenommene Gerade g_1 beliebig gelegte Ebene ε ist nun überhaupt eine ganz willkürliche Ebene ε; denn umgekehrt enthält, wie wir früher gesehen haben, jede willkürliche Ebene ε eine und nur eine einzige Gerade g_1, durch welche zwei (reelle oder konjugiert-imaginäre) Schmiegungsebenen der Raumkurve gehen. Die Konstruktion der Geraden g_1 in der willkürlichen Ebene ε ist, analog der Konstruktion der Sekante einer Raumkurve $C^{(3)}$ durch einen beliebigen Punkt aufserhalb derselben, folgende: Die Ebene ε schneidet eine beliebige feste Schmiegungsebene α der Raumkurve in einer Geraden s; durch jeden Punkt von s gehen zwei andere (reelle oder konjugiert-imaginäre) Schmiegungsebenen, deren Schnittlinie eine Regelschar eines Hyperboloids durchläuft, auf welchem auch s liegt; die einzige Erzeugende g_1 dieser Regelschar, welche in der durch s gehenden Ebene ε enthalten ist, ist die gesuchte Gerade. Wir haben ferner gerade für den elliptischen Fall, in welchem die beiden durch g_1 gehenden Schmiegungsebenen konjugiert-imaginär sind, also ε in drei reellen Punkten der Raum-

kurve $C^{(3)}$ begegnet, die elliptische Ebeneninvolution konstruieren gelehrt (S. 288), welche das Paar konjugiert-imaginärer Schmiegungsebenen vertritt; wir können also immer die zu ε konjugierte Ebene ε' dieser (hyperbolischen oder elliptischen) Ebeneninvolution konstruieren, und haben mithin folgenden Satz:

Wenn man eine willkürliche Ebene ε von sämtlichen Schmiegungsebenen einer Raumkurve dritter Klasse schneiden läſst und zu der Schnittlinie jeder Schmiegungsebene den Pol konstruiert in Bezug auf den in derselben enthaltenen Kegelschnitt, so liegen diese Pole sämtlich auf einem Kegelschnitt, dessen Ebene ε' durch diejenige Gerade g_1 geht, welche in der Ebene ε liegt und die einzige Schnittlinie zweier (reellen oder konjugiert-imaginären) Schmiegungsebenen ist; letztere werden durch ε und ε' harmonisch getrennt. Der Ortskegelschnitt der Pole trifft g_1 in denjenigen beiden Punkten, in welchen g_1 die beiden Kegelschnitte berührt, die in den beiden durch g_1 gehenden Schmiegungsebenen enthalten sind. Sind die beiden durch g_1 gehenden Schmiegungsebenen konjugiert-imaginär, so sind auch die in ihnen enthaltenen Kegelschnitte imaginär, also auch ihre Berührungspunkte mit g_1; folglich wird in diesem Falle der Ortskegelschnitt der Geraden g_1 in keinem reellen Punkte begegnen.

Wir setzen noch den dual gegenüberstehenden Satz hierher, der sich durch eine der obigen gleichlaufende Betrachtung beweisen läſst:

Wenn man einen willkürlichen Punkt $\mathfrak{o}$ im Raume mit sämtlichen Punkten $\mathfrak{x}$ einer Raumkurve $C^{(3)}$ durch Strahlen verbindet und zu jedem solchen Strahl $|\mathfrak{o}\mathfrak{x}|$ die Polarebene konstruiert in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$, welcher von $\mathfrak{x}$ aus perspektivisch durch die Raumkurve gelegt wird, so umhüllen diese sämtlichen Polarebenen einen Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{o}'$ auf derjenigen einzigen Sekante der Raumkurve liegt, welche durch $\mathfrak{o}$ geht. Die Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ werden harmonisch getrennt durch die beiden Kurvenpunkte dieser

Sekante. Der von den Polarebenen umhüllte Kegel berührt auch diejenigen beiden Berührungsebenen, welche sich längs der Sekante an die beiden Kegel legen lassen, deren Mittelpunkte die beiden Kurvenpunkte der Sekante sind.

Wir wollen nun die allgemeinen Resultate, welche wir erhalten haben, auf einen besonderen Fall anwenden, der uns Aufschluſs giebt über die Natur der Kegelschnitte, welche in den sämtlichen Schmiegungsebenen einer Raumkurve dritter Klasse enthalten sind.

Nehmen wir nämlich für die willkürlich zu wählende Ebene ε in unserer vorigen Betrachtung die unendlich-entfernte Ebene ε_{∞}, so schneidet dieselbe jede Schmiegungsebene der Raumkurve in ihrer unendlich-entfernten Geraden, und der Pol derselben in Bezug auf den in der Schmiegungsebene enthaltenen Kegelschnitt ist der Mittelpunkt des letzteren, also liefert unser voriger Satz insbesondere folgenden:

Die Mittelpunkte sämtlicher in den Schmiegungsebenen einer Raumkurve $C^{(3)}$ enthaltenen Kegelschnitte, deren jeder umhüllt wird von den Durchschnittslinien einer festgehaltenen Schmiegungsebene mit der Gesamtheit derselben, liegen in einer Ebene auf einem Kegelschnitt.

Nennen wir diesen Kegelschnitt den Mittelpunktskegelschnitt $(\mu^{(2)})$ und seine Ebene die Mittelpunktsebene (μ), und legen wir an irgend einem Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve die Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$, welche den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ enthält, so wird die Ebene $\mathfrak{x}$ im allgemeinen dem Kegelschnitte $\mu^{(2)}$ in zwei Punkten begegnen. Der eine derselben ist notwendig $\mathfrak{m}$, der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$; der andere $\mathfrak{m}'$ muſs der Mittelpunkt für einen andern Kegelschnitt in einer gewissen Schmiegungsebene sein, den wir ermitteln wollen; ziehen wir nämlich $\mathfrak{x}\mathfrak{m}$, so muſs diese Linie ein Halbmesser des Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$ sein, und machen wir $\mathfrak{x}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\mathfrak{x}'$, so wird $\mathfrak{x}'$ ebenfalls ein Punkt des Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$ sein, welcher dem Punkte $\mathfrak{x}$ diametral gegenüberliegt; die Tangenten in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ an dem Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ laufen daher parallel; die Tangente an $\mathfrak{x}$ ist zugleich $t_{\mathfrak{x}}$, Tangente der Raumkurve im Punkte $\mathfrak{x}$. Durch die Tangente in $\mathfrak{x}'$ am Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ muſs nun eine zweite Schmiegungsebene gehen, weil die Durchschnittslinien aller

Schmiegungsebenen mit $\mathfrak{x}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ umhüllen; diese zweite Schmiegungsebene enthält einen Kegelschnitt, welcher in dem Punkte die Schnittlinie beider Schmiegungsebenen berührt, in welchem die Tangente $t_{\mathfrak{x}}$ sie schneidet; da aber $t_{\mathfrak{x}}$ parallel ist mit der Tangente in $\mathfrak{x}'$, so liegt der Berührungspunkt im Unendlichen, also ist der in der zweiten Schmiegungsebene liegende Kegelschnitt Hyperbel und hat zu einer Asymptote die Tangente in $\mathfrak{x}'$ am Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$. Auf dieser Asymptote liegt notwendig auch der Mittelpunkt dieser Hyperbel, welcher in der Ebene μ auf dem Kegelschnitt $\mu^{(2)}$ liegen mufs. Die Ebene $\mathfrak{x}$ enthält aber nur zwei Punkte vom Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$, von denen der eine, $\mathfrak{m}$, bereits bekannt ist; daher mufs der andere der Mittelpunkt der gefundenen Hyperbel sein, d. h.:

Wenn $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt der Raumkurve, $t_{\mathfrak{x}}$ die Tangente und $\mathfrak{x}$ die Schmiegungsebene für denselben ist, welche den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ enthält, so begegnet die Ebene $\mathfrak{x}$ dem Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ im allgemeinen in zwei Punkten, von denen der eine der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$ ist, der andere aber auf der mit $t_{\mathfrak{x}}$ parallelen Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$ liegen mufs, welche eine Asymptote desjenigen Kegelschnits $\mathfrak{x}_1^{(2)}$ ist, der in einer Schmiegungsebene enthalten ist, welche $\mathfrak{x}$ in dieser zu $t_{\mathfrak{x}}$ parallelen Tangente durchschneidet.

Die beiden Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$, in welchen die Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ dem Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ begegnet, liegen also immer auf derselben Seite von der Tangente $t_{\mathfrak{x}}$, und der eine von ihnen ($\mathfrak{m}'$) steht doppelt so weit von $t_{\mathfrak{x}}$ ab, wie der andere ($\mathfrak{m}$); letzterer ist der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$, der in der Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ enthalten ist.

Wir können diesen Kegelschnitt $\mu^{(2)}$ und seine Ebene μ näher bestimmen bei den verschiedenen Gattungen der Raumkurve $C^{(3)}$. Am einfachsten gestaltet sich dies Verhalten bei der kubischen Parabel; dieselbe hat die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ zur Schmiegungsebene; alle übrigen Schmiegungsebenen schneiden also ε_∞ in Geraden, welche einen unendlich-entfernten Kegelschnitt $\varepsilon_\infty^{(2)}$ umhüllen; jede Tan-

gente desselben ist aber auch Tangente desjenigen Kegelschnitts $\alpha^{(2)}$, welcher in einer Schmiegungsebene α enthalten ist, die durch jene Tangente geht, und da ein Kegelschnitt, für welchen die unendlich-entfernte Gerade seiner Ebene Tangente ist, notwendig eine Parabel sein mufs, deren Mittelpunkt der Berührungspunkt im Unendlichen ist, so folgt:

Bei der kubischen Parabel sind die in den Schmiegungsebenen enthaltenen Kegelschnitte sämtlich Parabeln; ihre Mittelpunkte liegen auf der unendlich-entfernten Geraden, welche Tangente der kubischen Parabel ist in ihrem einzigen unendlich-entfernten Punkte.

Die kubische Ellipse wird von der Ebene ε_∞ nur in einem reellen Punkte $\mathfrak{a}_\infty$ geschnitten, die beiden andern unendlich-entfernten Punkte derselben sind konjugiert-imaginär. Wir wissen daher aus dem Obigen, dafs für die in ε_∞ liegende Gerade g_1^∞, welche die Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen ist, und die wir oben zu konstruieren gelehrt haben, diese beiden Schmiegungsebenen reell sein müssen; die kubische Ellipse hat also zwei reelle parallele Schmiegungsebenen; die vierte harmonische zu diesen beiden und ε_∞ zugeordnete ist mithin eine solche Ebene, welche parallel ist zu den beiden parallelen Schmiegungsebenen und von ihnen gleich weit absteht; dies ist die Ebene μ; der in ihr liegende Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ mufs g_1^∞ in denjenigen beiden Punkten schneiden, in welchen diejenigen beiden Kegelschnitte g_1^∞ berühren, die in den parallelen Schmiegungsebenen enthalten sind; folglich ist der Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ notwendig Hyperbel; also unter den in den Schmiegungsebenen der kubischen Ellipse enthaltenen Kegelschnitten kommen zwei Parabeln vor, nämlich diejenigen, welche in den beiden parallelen Schmiegungsebenen enthalten sind.

Wir wissen ferner aus dem Früheren, dafs jede durch die Schnittlinie g_1^∞ zweier reellen Schmiegungsebenen gelegte Ebene der Raumkurve nur in einem reellen Punkte begegnet; die Punkte der Raumkurve werden also durch die beiden parallelen Schmiegungsebenen π_∞ und π'_∞ in zwei Gruppen zerlegt, solche, die zwischen denselben liegen, und solche, die aufserhalb derselben liegen. Irgend eine Schmie-

gungsebene $\mathfrak{x}$ schneidet π_∞ und π'_∞ in zwei parallelen Tangenten des Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$; ihr Berührungspunkt $\mathfrak{x}$ liegt ebenfalls auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$; liegt derselbe zwischen π_∞ und π'_∞, so mufs bekanntlich der Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ Ellipse sein, liegt dagegen $\mathfrak{x}$ aufserhalb der Ebenen π_∞ π'_∞ (d. h. trennt er dieselben nicht), so mufs der Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ Hyperbel sein (Th. d. K. S. 116). Der variable Punkt $\mathfrak{x}$ der kubischen Ellipse tritt aber aus dem einen Raumgebiet zwischen den parallelen Ebenen π_∞ und π'_∞ in das andere Raumgebiet aufserhalb derselben zweimal über durch die beiden Berührungspunkte der Schmiegungsebenen π_∞ und π'_∞; die in diesen beiden Schmiegungsebenen enthaltenen Kegelschnitte sind daher die beiden einzigen Parabeln, welche eine Gruppe Ellipsen von einer Gruppe Hyperbeln trennen, und die Mittelpunktshyperbel $\mu^{(2)}$, deren unendlich-entfernte Punkte die Mittelpunkte der beiden Parabeln sind, enthält daher auf einem ihrer Zweige die Mittelpunkte sämtlicher Ellipsen, auf dem andern die Mittelpunkte sämtlicher Hyperbeln $\mathfrak{x}^{(2)}$.

Wir können also folgendes Resultat aussprechen:

Die kubische Ellipse hat zwei (reelle) parallele Schmiegungsebenen π_∞ und π'_∞; die in denselben enthaltenen Kegelschnitte (welche von den Durchschnittslinien mit der Gesamtheit der Schmiegungsebenen umhüllt werden) sind zwei Parabeln; die in allen übrigen Schmiegungsebenen enthaltenen Kegelschnitte zerfallen in eine Gruppe Ellipsen und eine Gruppe Hyperbeln, welche durch jene beiden Parabeln von einander getrennt werden. Diejenigen Punkte der kubischen Ellipse, welche zwischen π_∞ und π'_∞ liegen, haben Schmiegungsebenen, in denen Ellipsen enthalten sind; diejenigen Punkte der kubischen Ellipse, welche nicht zwischen π_∞ und π'_∞ liegen, haben Schmiegungsebenen, in denen Hyperbeln enthalten sind. Die Mittelpunkte sämtlicher in den Schmiegungsebenen der kubischen Ellipse enthaltenen Kegelschnitte liegen auf einer ebenen Hyperbel $\mu^{(2)}$; der eine Zweig derselben enthält die Mittelpunkte aller Ellipsen, der andere die Mittelpunkte aller Hyper-

beln; die beiden unendlich-entfernten Punkte der Hyperbel $\mu^{(2)}$ sind die Mittelpunkte der beiden Parabeln. Die Ebene der Hyperbel $\mu^{(2)}$ läuft parallel den beiden parallelen Schmiegungsebenen π_∞ und π'_∞ und steht von ihnen gleich weit ab.

Wir bemerken noch, dafs, wenn wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ der Raumkurve (kubischen Ellipse) mit allen übrigen Punkten derselben durch Strahlen verbinden, der von diesen Strahlen gebildete Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ die durch $\mathfrak{o}$ und g_1^∞ gelegte Ebene in einem imaginären Linienpaar schneiden mufs, weil jede durch g_1^∞ gelegte Ebene nur in einem reellen Punkte der Raumkurve begegnet; die Ebene μ, welche zu $[\mathfrak{o} g_1^\infty]$ parallel ist, mufs daher den Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ in einer Ellipse schneiden. Wir können also sagen:

Die Mittelpunktsebene μ schneidet alle Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$, welche durch die kubische Ellipse gelegt werden können, in Ellipsen.

Die kubische parabolische Hyperbel hat drei unendlich-entfernte Punkte, von denen zwei $\mathfrak{b}_\infty = \mathfrak{c}_\infty$ zusammenfallen auf eine ganz in der unendlich-entfernten Ebene ε_∞ liegende Gerade t_∞, welche Tangente der Raumkurve ist, während der dritte unendlich-entfernte Punkt $\mathfrak{a}_\infty$ isoliert liegt. Der Berührungspunkt $\mathfrak{b}_\infty$ der Raumkurve mit t_∞ hat eine bestimmte im Endlichen verlaufende Schmiegungsebene β; der in derselben enthaltene Kegelschnitt $\beta^{(2)}$ mufs offenbar Parabel sein, weil er t_∞ in $\mathfrak{b}_\infty$ berührt. Jede andere Schmiegungsebene ξ schneidet aber die festgehaltene Schmiegungsebene β in einer Geraden, welche auch den Kegelschnitt $\xi^{(2)}$ berührt, und zwar liegt der Berührungspunkt, wie wir oben gesehen haben, auf der festen Tangente t_∞, welche in der Schmiegungsebene β liegt; folglich ist der Kegelschnitt $\xi^{(2)}$, den die veränderliche Schmiegungsebene ξ enthält, immer Hyperbel, weil er immer eine im Unendlichen berührende Tangente hat, und geht nur einmal in die Parabel $\beta^{(2)}$ über für die Schmiegungsebene β selbst. Die oben ermittelte Gerade g_1^∞ in der Ebene ε_∞ koinzidiert in diesem Falle mit der Tangente t_∞, weil durch t_∞ die beiden einzigen zusammenfallenden Schmiegungsebenen β gehen; die vierte harmonische zu ε_∞ zugeordnete Ebene mufs daher, weil zwei zugeordnete von vier harmoni-

schen Ebenen zusammenfallen, auch in diese Ebene hineinfallen; die Mittelpunktsebene μ koinzidiert also mit der Schmiegungsebene β, und der Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ in dieser Ebene mufs auch eine Parabel sein, welche t_∞ in demselben Punkte $\mathfrak{b}_\infty$ berührt, wie die Parabel $\beta^{(2)}$.

Eine weitere Beziehung zwischen diesen beiden Parabeln $\mu^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ in derselben Ebene erkennen wir, wenn wir nunmehr die Schmiegungsebene α in dem einzelnen unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{a}_\infty$ der kubischen parabolischen Hyperbel betrachten. Diese Schmiegungsebene α mufs auch eine Hyperbel enthalten, von der $\mathfrak{a}_\infty$ der eine unendlich-entfernte Punkt ist, dessen Tangente t_α an der Raumkurve also eine Asymptote der Hyperbel ist; wenn α und β sich in der Geraden s schneiden, so berühren die beiden Kegelschnitte: die Hyperbel $\alpha^{(2)}$ und die Parabel $\beta^{(2)}$, die Gerade s in zwei Punkten, von denen der erste der Schnittpunkt von s mit t_β, der andere der Schnittpunkt von s mit t_α ist, wie wir wissen; nun ist aber $t_\beta = t_\infty$ ganz im Unendlichen gelegen, folglich gehen aus dem Schnittpunkt von s und t_α zwei Tangenten an die Hyperbel, die beide im Unendlichen berühren, d. h. die beiden Asymptoten der Hyperbel sind; daher ist der Schnittpunkt (s, t_α) der Mittelpunkt der Hyperbel $\alpha^{(2)}$ und liegt mithin auf der Mittelpunktsparabel $\mu^{(2)}$ und gleichzeitig auf der Parabel $\beta^{(2)}$. Die Tangente s in diesem Punkte der Parabel $\beta^{(2)}$ wird gleichzeitig die Mittelpunktsparabel $\mu^{(2)}$ in demselben Punkte berühren; denn es kann in der Geraden s aufser dem Punkte (s, t_α) keinen zweiten Punkt geben, welcher Mittelpunkt eines Kegelschnitts $\mathfrak{x}^{(2)}$ wäre; bewegen wir nämlich auf s einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ und legen aus $\mathfrak{x}$ die Tangenten x_α und x_β an die Hyperbel $\alpha^{(2)}$ und die Parabel $\beta^{(2)}$, so bestimmen x_α und x_β eine Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ und sind Tangenten der in ihr enthaltenen Hyperbel $\mathfrak{x}^{(2)}$; die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen aber auf t_α und t_β; sollte also $\mathfrak{x}$ der Mittelpunkt einer Hyperbel $\mathfrak{x}^{(2)}$ sein können, so müfsten x_α und x_β ihre Asymptoten sein, d. h. die Berührungspunkte im Unendlichen haben. Nun schneidet aber jede Tangente x_α der Hyperbel $\alpha^{(2)}$ die feste Asymptote t_α in einem endlichen Punkte, also kann $\mathfrak{x}$ niemals Mittelpunkt der Hyperbel $\mathfrak{x}^{(2)}$ sein, aufser in dem einzigen Falle, wenn $\mathfrak{x}$

in den Schnittpunkt (s, t_α) gelangt; es folgt hieraus, dafs s den Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ im Punkte (s, t_α) berühren mufs w. z. b. w. Die beiden Parabeln $\mu^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ haben daher eine doppelte reelle Berührung; von den beiden Berührungspunkten ist der eine der unendlich-entfernte Punkt $\mathfrak{b}_\infty$ (d. h. die Axen beider Parabeln sind parallel), der andere der endliche Punkt, in welchem die im Endlichen liegende Asymptote t_α der Schmiegungsebene β begegnet. Wir können demnach folgendes Resultat aussprechen:

Die kubische parabolische Hyperbel hat eine unendlich-entfernte Tangente $t_\beta = t_\infty$ und einen unendlich-entfernten Punkt $\mathfrak{a}_\infty$, dessen Tangente (Asymptote) t_α im Endlichen liegt. Die in dem doppelten unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{b}_\infty$ gelegte Schmiegungsebene β, welche im Endlichen liegt und zu ihrer unendlich-entfernten Geraden t_∞ hat, begegnet der Asymptote t_α in dem endlichen Punkte $\mathfrak{t}_0$. Sämtliche Schmiegungsebenen ξ der kubischen parabolischen Hyperbel enthalten als Kegelschnitte $\xi^{(2)}$ Hyperbeln, mit Ausnahme der einzigen Schmiegungsebene β, welche eine Parabel $\beta^{(2)}$ enthält. Die Mittelpunkte sämtlicher Hyperbeln $\xi^{(2)}$ liegen auf einer Parabel $\mu^{(2)}$ in der Schmiegungsebene β, und die beiden Parabeln $\mu^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ haben eine reelle doppelte Berührung einmal in dem endlichen Punkte $\mathfrak{t}_0$, in welchem sie von der Schnittlinie $|\alpha\beta|$ berührt werden, und zweitens in dem unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{b}_\infty$, nach welchem beide Parabelaxen hingehen.

Wir bemerken noch, dafs wenn wir von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{o}$ der kubischen parabolischen Hyperbel den Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ durch dieselbe legen, die Ebene $[\mathfrak{o}\, t_\infty]$ allemal eine Berührungsebene desselben sein mufs, dessen Berührungsstrahl $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{b}_\infty|$ ist; die mit der Ebene $[\mathfrak{o}\, t_\infty]$ parallele Ebene μ oder β wird also von dem Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ allemal in einer Parabel geschnitten, deren unendlich-entfernter Punkt derselbe $\mathfrak{b}_\infty$ bleibt, also:

Sämtliche Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$, welche durch eine kubische parabolische Hyperbel gelegt werden können, schneiden die Schmiegungsebene β (oder μ) in Pa-

rabeln, welche denselben unendlich-entfernten Punkt ($\mathfrak{b}_\infty$) haben.

Es bleibt jetzt nur noch die Untersuchung der allgemeinen kubischen Hyperbel übrig, welche drei getrennt liegende unendlichentfernte Punkte $\mathfrak{a}_\infty\ \mathfrak{b}_\infty\ \mathfrak{c}_\infty$ besitzt; wir bestimmen zunächst die Gerade g_1^∞, nämlich die harmonische Polare des Punktes $\mathfrak{e}^\infty$ in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{a}_\infty\ \mathfrak{b}_\infty\ \mathfrak{c}_\infty$, wo $\mathfrak{e}^\infty$ den Durchschnittspunkt der drei Schmiegungsebenen $\alpha\ \beta\ \gamma$ der Punkte $\mathfrak{a}_\infty\ \mathfrak{b}_\infty\ \mathfrak{c}_\infty$ bezeichnet; $\mathfrak{e}^\infty$ mufs, wie wir wissen, in ε_∞ liegen. Die Gerade g_1^∞ ist die Axe einer elliptischen Ebeneninvolution, deren reelle Konstruktion oben gegeben ist (S. 282); sie vertritt die beiden konjugiert-imaginären Schmiegungsebenen, welche durch g_1^∞ gehen; die kubische Hyperbel hat also keine zwei parallelen Schmiegungsebenen. Wenn aber irgend eine Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ der Geraden g_1^∞ in einem Punkte $\mathfrak{x}^\infty$ begegnet und die Ebeneninvolution g_1^∞ in einer elliptischen Strahleninvolution schneidet, so vertritt dieselbe das konjugiert-imaginäre Tangentenpaar, welches sich aus $\mathfrak{x}^\infty$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ legen läfst. Hieraus folgt, dafs der Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ notwendig eine Hyperbel sein mufs, denn ein Kegelschnitt, an welchen aus einem unendlich-entfernten Punkte seiner Ebene zwei konjugiert-imaginäre Tangenten gehen, mufs immer eine Hyperbel sein, weil durch jeden unendlich-entfernten Punkt in der Ebene einer Ellipse oder Parabel ein reelles Tangentenpaar geht. Wir schliefsen hieraus, dafs die Kegelschnitte $\mathfrak{x}^{(2)}$, welche in allen Schmiegungsebenen einer kubischen Hyperbel enthalten sind, notwendig Hyperbeln sein müssen. Die Mittelpunkte dieser Hyperbeln liegen, wie wir wissen, auf einem Kegelschnitte $\mu^{(2)}$ in derjenigen Ebene μ durch g_1^∞, welche in der bekannten elliptischen Ebeneninvolution g_1^∞ zu der gegebenen Ebene ε_∞ konjugiert ist, d. h. von den beiden Potenzebenen dieser Ebeneninvolution gleich weit absteht, indem alle parallel sind (durch g_1^∞ gehen). Da unter den Hyperbeln $\mathfrak{x}^{(2)}$ niemals eine Parabel vorkommen kann, weil sonst von einem Punkte $\mathfrak{x}$ der g_1^∞ ein reelles Tangentenpaar an den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ möglich wäre, so kann auch kein Punkt des Mittelpunktkegelschnittes $\mu^{(2)}$ im Unendlichen liegen; dieser mufs daher eine Ellipse sein. Wir haben also folgendes Ergebnis:

Die kubische Hyperbel hat keine zwei parallelen Schmiegungsebenen. Die sämtlichen in den Schmiegungsebenen enthaltenen Kegelschnitte $\mathfrak{k}^{(2)}$ sind Hyperbeln; ihre Mittelpunkte liegen auf einer ebenen Ellipse. Die Ebene dieser Ellipse steht gleich weit ab von den beiden Potenzebenen derjenigen Ebeneninvolution, deren Axe g_1^∞ ist, diejenige Gerade in der unendlich-entfernten Ebene, durch welche zwei konjugiert-imaginäre Schmiegungsebenen der kubischen Hyperbel gehen, die durch die elliptische Ebeneninvolution vertreten werden.

Jede Ebene durch g_1^∞ muſs, wie wir wissen (S. 292), der kubischen Hyperbel in drei reellen Punkten begegnen, weil g_1^∞ die Durchschnittslinie zweier konjugiert-imaginären Schmiegungsebenen derselben ist; insbesondere wird also auch die Ebene μ der Mittelpunktsellipse die kubische Hyperbel in drei reellen Punkten treffen. Verbinden wir irgend einen Punkt $\mathfrak{o}$ der kubischen Hyperbel mit sämtlichen Punkten derselben durch Strahlen, so bilden diese einen Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$; die Ebene durch $\mathfrak{o}$ und g_1^∞, welche der Raumkurve auſser in $\mathfrak{o}$ in zwei reellen Punkten begegnet, wird den Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ in einem reellen Strahlenpaar schneiden müssen, also wird die mit ihr parallele Ebene μ offenbar den Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ in einer Hyperbel schneiden, d. h.:

Sämtliche Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$, welche durch eine kubische Hyperbel gelegt werden können, schneiden die Ebene μ der Mittelpunktsellipse, $\mu^{(2)}$, in Hyperbeln, welche durch drei reelle Punkte gehen.

§ 39. Durchmesser einer Raumkurve dritter Ordnung.

Wir haben oben (S. 263) unter den Hyperboloiden, welche durch eine Raumkurve 3. O. gelegt werden können, solche hervorgehoben, die als Erzeugnis zweier projektivischen Ebenenbüschel auftreten, deren Axen zwei Tangenten t_a und t_b in zwei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der Raumkurve sind, und deren je zwei entsprechende Ebenen durch einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ der Raumkurve gehen; in zwei solchen Ebenenbüscheln entsprechen insbesondere den Ebenen:

$$[t_\mathfrak{a}\mathfrak{b}] \quad \text{und} \quad [t_\mathfrak{b}\mathfrak{a}]$$

die Schmiegungsebenen:

$$\tau_\mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \tau_\mathfrak{a},$$

welche durch die Tangenten $t_\mathfrak{b}$ und $t_\mathfrak{a}$ gehen; die Schnittlinien:

$$|\tau_\mathfrak{b}, [t_\mathfrak{a}\mathfrak{b}]| = g_\mathfrak{b}$$
$$|\tau_\mathfrak{a}, [t_\mathfrak{b}\mathfrak{a}]| = g_\mathfrak{a}$$

sind daher zwei Erzeugende derjenigen Regelschar des Hyperboloids, von welcher jeder Strahl der Raumkurve nur in einem Punkte begegnen kann. Alle Erzeugenden der andern Regelschar, welche der Raumkurve in je zwei Punkten begegnen (Sekanten sind), müssen daher $g_\mathfrak{a}$ und $g_\mathfrak{b}$ treffen und zwei projektivische Punktreihen auf ihnen ausschneiden.

Wir wissen ferner (S. 235), wenn wir auf einem durch eine Raumkurve $C^{(3)}$ gelegten Hyperboloid diejenige Regelschar auffassen, deren Erzeugende der Raumkurve in je zwei Punkten begegnen, und wir dieselben mit irgend einer festen Sekante $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ der Raumkurve verbinden, dafs die dadurch erhaltenen Ebenenpaare eine Involution bilden. Diese Ebeneninvolution ist in unserem Falle eine hyperbolische, deren Doppelebenen

$$[\mathfrak{b}t_\mathfrak{a}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{a}t_\mathfrak{b}]$$

sind, folglich werden auf jeder Sekante der Raumkurve, welche $g_\mathfrak{a}$ und $g_\mathfrak{b}$ trifft, die beiden Treffpunkte durch die beiden Punkte der Raumkurve harmonisch getrennt.

Wenn es nun insbesondere gelingt, die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auf der Raumkurve $C^{(3)}$ so zu wählen, dafs eine von den beiden Geraden $g_\mathfrak{a}$ oder $g_\mathfrak{b}$ ganz in die Unendlichkeit gelangt, dann mufs die andere die Eigenschaft besitzen, dafs die durch ihre Punkte gehenden Sekanten der Raumkurve in diesen Punkten halbiert werden; eine solche Gerade kann in gewissem Sinne ein Durchmesser der Raumkurve genannt werden, weil ihre Punkte die Mitten für die Sekanten sind, welche durch dieselben gehen; die Sekanten selbst bilden ein hyperbolisches Paraboloid (§ 29), auf welchem die Raumkurve liegt.

Der gesuchte besondere Fall bietet sich unmittelbar dar bei der kubischen Parabel, deren unendlich-entfernter Punkt $\mathfrak{a}_\infty$ zur Schmiegungsebene die unendlich-entfernte Ebene α_∞ hat.

Nehmen wir bei der kubischen Parabel für $\mathfrak{a}$ den unendlich-entfernten Punkt $\mathfrak{a}_\infty$, so wird $\tau_\mathfrak{a} = \alpha_\infty$, und, da $g_\mathfrak{a}$ in $\tau_\mathfrak{a}$ liegt, so geht die ganze Gerade $g_\mathfrak{a}$ in die Unendlichkeit; für $\mathfrak{b}$ können wir einen beliebigen im Endlichen liegenden Punkt der kubischen Parabel wählen; wir erhalten dadurch folgenden Satz:

Wenn wir in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{b}$ der kubischen Parabel die Schmiegungsebene legen und dieselbe schneiden lassen von derjenigen Ebene, welche $\mathfrak{b}$ mit der Tangente t_∞ in dem unendlich-entfernten Punkte der kubischen Parabel verbindet, so ist die Durchschnittslinie $g_\mathfrak{b}$ allemal ein Durchmesser der kubischen Parabel, d. h. die durch jeden Punkt der Geraden $g_\mathfrak{b}$ gehende Sekante der kubischen Parabel wird in diesem Punkte halbiert.

Alle solche Sekanten bilden eine Regelschar eines hyperbolischen Paraboloids, welches durch die Raumkurve und die beiden Tangenten t_∞ und $t_\mathfrak{b}$ gelegt werden kann, und begegnen derjenigen Geraden g_∞, in welcher die durch den Punkt $\mathfrak{a}_\infty$ der kubischen Parabel und $t_\mathfrak{b}$ gelegte Ebene die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ schneidet. Verändern wir den Punkt $\mathfrak{b}$ auf der kubischen Parabel, so bleiben die Durchmesser, deren jeder durch einen Punkt der kubischen Parabel geht, parallel der Stellung einer Ebene, deren unendlich-entfernte Gerade die feste Tangente t_∞ in dem unendlich-entfernten Punkte der kubischen Parabel ist.

Suchen wir aber bei den übrigen Gattungen der Raumkurve 3. O. zwei solche Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auf, dafs von den beiden Strahlen:

$$|\tau_\mathfrak{a}, [\mathfrak{a} t_\mathfrak{b}]| = g_\mathfrak{a}$$
$$|\tau_\mathfrak{b}, [\mathfrak{b} t_\mathfrak{a}]| = g_\mathfrak{b},$$

einer in die Unendlichkeit geht und der andere im Endlichen bleibt, d. h. ein Durchmesser wird, so mufs notwendig, wenn der Strahl $g_\mathfrak{a}$ in die Unendlichkeit gehen soll, der Punkt $\mathfrak{a}$, welcher auf ihm liegt, auch ein unendlich-entfernter Punkt sein und der Raumkurve angehören. Nehmen wir also demnächst die kubische parabolische Hyperbel, welche einen unendlich-entfernten Punkt $\mathfrak{a}_\infty$ und zwei zusammenfallende unendlich-entfernte Punkte $\mathfrak{b}_\infty = \mathfrak{c}_\infty$ hat, so können wir (S. 311)

zwei Cylinder durch dieselbe legen; der eine, welcher $\mathfrak{a}_\infty$ zum Mittelpunkt hat, ist ein parabolischer, enthält einen im Endlichen verlaufenden Cylinderstrahl $t_\mathfrak{a}$, die Tangente in $\mathfrak{a}_\infty$ oder Asymptote, und eine Berührungsebene längs desselben $\tau_\mathfrak{a}$, die im Endlichen liegende Schmiegungsebene von $\mathfrak{a}_\infty$; der Berührungsstrahl in der unendlich-entfernten Ebene ε_∞ des parabolischen Cylinders ist die Gerade $|\mathfrak{a}_\infty \mathfrak{b}_\infty|$. In der Ebene ε_∞ geht durch $\mathfrak{b}_\infty$ eine Gerade $t_\mathfrak{b}^\infty$, die Tangente des Punktes $\mathfrak{b}_\infty$, und durch dieselbe geht eine im Endlichen verlaufende Ebene $\tau_\mathfrak{b}$, die Schmiegungsebene in $\mathfrak{b}_\infty$. Zweitens geht durch die kubische parabolische Hyperbel ein hyperbolischer Cylinder, welcher $\mathfrak{b}_\infty$ zum Mittelpunkt hat; die beiden unendlich-entfernten Cylinderstrahlen dieses hyperbolischen Cylinders sind $t_\mathfrak{b}^\infty$ und $|\mathfrak{b}_\infty \mathfrak{a}_\infty|$. Durch sie gehen also die beiden Asymptotenebenen des Cylinders, von denen die eine $\tau_\mathfrak{b}$ ist, weil sie Berührungsebene des Cylinders längs des Cylinderstrahls $t_\mathfrak{b}^\infty$ ist, und die andere $[\mathfrak{b}_\infty t_\infty]$ ist, weil sie Berührungsebene des Cylinders längs des Cylinderstrahls $|\mathfrak{b}_\infty \mathfrak{a}_\infty|$ ist; beide Ebenen liegen im Endlichen und schneiden sich in einer Geraden, welche eine Hauptaxe des hyperbolischen Cylinders ist.

Nehmen wir nun, zurückkehrend zu der ursprünglichen Frage, für einen der beiden gesuchten Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ den Punkt $\mathfrak{a}_\infty$, und soll $g_\mathfrak{a}$ in die Unendlichkeit gehen, dann muſs die Ebene $[\mathfrak{a}_\infty t_\mathfrak{b}]$ für einen noch unbekannten Punkt $\mathfrak{b}$ der Raumkurve mit der Ebene $\tau_\mathfrak{a}$ parallel sein; beide sind aber Berührungsebenen eines parabolischen Cylinders $\mathfrak{a}_\infty^{(2)}$, und $\tau_\mathfrak{a}$ ist eine im Endlichen verlaufende Berührungsebene desselben; folglich muſs $[\mathfrak{a}_\infty t_\mathfrak{b}]$ die unendlich-entfernte Berührungsebene ε_∞ des parabolischen Cylinders sein, mithin $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_\infty$. In diesem Falle müssen also beide gesuchten Punkte die unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{a}_\infty$ und $\mathfrak{b}_\infty$ der kubischen parabolischen Hyperbel sein, und für $g_\mathfrak{b}$ erhalten wir eine endliche Gerade, nämlich die Schnittlinie der Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{b}$ mit derjenigen Ebene, welche durch die endliche Asymptote $t_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_\infty$ gelegt werden kann, d. h. nach dem Obigen die im Endlichen verlaufende Hauptaxe des hyperbolischen Cylinders, welcher durch die kubische parabolische Hyperbel gelegt werden kann.

Nehmen wir dagegen zweitens für einen der beiden gesuchten Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ den Punkt $\mathfrak{b}_\infty = \mathfrak{b}$ und verlangen, dafs $g_\mathfrak{b}$ in die Unendlichkeit gehe, so müfste die Ebene $[\mathfrak{b}_\infty t_\mathfrak{a}]$ mit der Ebene $\tau_\mathfrak{b}$ parallel werden, wo $\mathfrak{a}$ einen noch unbekannten Punkt der Raumkurve bezeichnet. Von diesen beiden Ebenen ist aber die letztere eine Asymptotenebene, die erstere eine Berührungsebene des hyperbolischen Cylinders $\mathfrak{b}_\infty^{(2)}$, und keine Berührungsebene kann mit einer Asymptotenebene parallel laufen, aufser letztere selbst; es müfste daher $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}_\infty$ zusammenfallen, was zu einem illusorischem Ergebnis führt.

Wir haben also hier folgendes Resultat:

Die kubische parabolische Hyperbel hat nur einen reellen Durchmesser, d. h. eine solche Gerade ($g_\mathfrak{b}$), von welcher jeder Punkt die Mitte der Sekante ist, die sich von ihm aus durch die Raumkurve legen läfst. Dieser Durchmesser ist die Schnittlinie der beiden Asymptotenebenen desjenigen hyperbolischen Cylinders, welcher allein durch die parabolische Hyperbel sich legen läfst. Die sämtlichen Sekanten der Raumkurve, welche durch diesen Durchmesser halbiert werden, laufen parallel der endlichen Schmiegungsebene ($\tau_\mathfrak{a}$) in dem einfachen unendlich-entfernten Punkte der kubischen parabolischen Hyperbel oder der Schmiegungsebene durch die einzige Asymptote der Raumkurve.

Erörtern wir nun die vorliegende Frage für den Fall der kubischen Ellipse, auf welcher zwei Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ so zu ermitteln sind, dafs von den beiden Geraden:

$$|\tau_\mathfrak{a}, [\mathfrak{a} t_\mathfrak{b}]| = g_\mathfrak{a}$$
$$|\tau_\mathfrak{b}, [\mathfrak{b} t_\mathfrak{a}]| = g_\mathfrak{b}$$

die eine ganz in die Unendlichkeit geht; sei dieselbe $g_\mathfrak{a}$, so mufs $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\infty$ der einzige reelle unendlich-entfernte Punkt der kubischen Ellipse sein; er ist der Mittelpunkt des (einzigen) elliptischen Cylinders, welcher sich durch die kubische Ellipse legen läfst; die Tangente der kubischen Ellipse im Punkte $\mathfrak{a}_\infty$ ist ein Cylinderstrahl $t_\mathfrak{a}$, und die Berührungsebene des Cylinders längs dieses Strahles ist $\tau_\mathfrak{a}$, die Schmiegungs-

ebene in $\mathfrak{a}_\infty$. Da $g_\mathfrak{a}$ ganz in die Unendlichkeit gehen soll, so mufs die Ebene $[\mathfrak{a}_\infty t_\mathfrak{b}]$ mit $\tau_\mathfrak{a}$ parallel sein; die Ebene $[\mathfrak{a}_\infty t_\mathfrak{b}]$ ist aber eine Berührungsebene des Cylinders, weil sie durch eine Tangente $t_\mathfrak{b}$ in einem noch unbekannten Punkte $\mathfrak{b}$ der Raumkurve geht. Es giebt zu $\tau_\mathfrak{a}$ nur eine parallele Berührungsebene des Cylinders; diese berührt längs des diametral zu $t_\mathfrak{a}$ liegenden Cylinderstrahles, und dieser Cylinderstrahl kann der Raumkurve (aufser in $\mathfrak{a}_\infty$) nur noch in einem einzigen Punkte $\mathfrak{b}$ begegnen. Dadurch ist der Punkt $\mathfrak{b}$ gefunden; die Tangente $t_\mathfrak{b}$ mufs in der zu $\tau_\mathfrak{a}$ parallelen Berührungsebene des Cylinders liegen, welcher allein durch die kubische Ellipse gelegt werden kann. Wir können aber den Punkt $\mathfrak{b}$ auch noch anders bestimmen.

Denken wir uns nämlich in $\mathfrak{b}$ die Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{b}$ konstruiert, welche durch $t_\mathfrak{b}$ geht, so schneidet sie $\tau_\mathfrak{a}$ in einer zu $t_\mathfrak{b}$ parallelen Geraden $t'_\mathfrak{b}$, also $t'_\mathfrak{b} = |\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{b}|$. Die Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen einer Raumkurve berührt immer die beiden Kegelschnitte, welche in diesen Schmiegungsebenen enthalten sind. Nennen wir den in der Ebene $\tau_\mathfrak{b}$ enthaltenen Kegelschnitt $\beta^{(2)}$, so sind $t_\mathfrak{b}$ und $t'_\mathfrak{b}$ zwei parallele Tangenten des Kegelschnitts $\beta^{(2)}$; die eine $t_\mathfrak{b}$ berührt ihn in $\mathfrak{b}$, die andere in demjenigen Punkte der Schnittlinie $|\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{b}|$, in welchem die Tangente des Punktes $\mathfrak{a}_\infty$, d. h. die Gerade $t_\mathfrak{a}$ ihr begegnet; der Schnittpunkt $(\tau_\mathfrak{b} t_\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}'$ ist also der Berührungspunkt mit $t'_\mathfrak{b}$. Die Verbindungslinie $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}'|$ ist ein Durchmesser des Kegelschnitts $\beta^{(2)}$, die Mitte $\mathfrak{m}$ zwischen $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ der Mittelpunkt desselben. Betrachten wir ferner den Kegelschnitt $\alpha^{(2)}$, welcher in der Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{a}$ enthalten ist; da derselbe durch $\mathfrak{a}_\infty$ geht, so ist er eine Hyperbel und die Tangente in $\mathfrak{a}_\infty$, d. h. $t_\mathfrak{a}$, eine Asymptote derselben; andererseits berührt die Hyperbel $\alpha^{(2)}$ die Schnittlinie $|\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{b}| = t'_\mathfrak{b}$ in demjenigen Punkte, in welchem die Tangente $t_\mathfrak{b}$ sie schneidet; $t_\mathfrak{b}$ und $t'_\mathfrak{b}$ sind aber parallel, folglich liegt der Berührungspunkt im Unendlichen, also ist $t'_\mathfrak{b}$ die zweite Asymptote der Hyperbel $\alpha^{(2)}$; beide Asymptoten schneiden sich in ihrem Mittelpunkt; folglich ist $\mathfrak{b}' = (t_\mathfrak{a} t'_\mathfrak{b})$ der Mittelpunkt der Hyperbel $\alpha^{(2)}$. Wir haben also als Mittelpunkte der beiden in den Schmiegungsebenen $\tau_\mathfrak{a}$ und $\tau_\mathfrak{b}$ enthaltenen Kegelschnitte die Punkte $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{m}$ gefunden. Nun wissen

wir, dafs die Mittelpunkte aller in den Schmiegungsebenen enthaltenen Kegelschnitte auf einem bestimmten Mittelpunktskegelschnitte $\mu^{(2)}$ liegen; die Ebene μ dieses Kegelschnitts geht also auch hier durch die Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{b}'$, enthält also diese Gerade ganz, folglich auch den Punkt $\mathfrak{b}$, für welchen $\mathfrak{b}'\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\mathfrak{b}$ ist. Andererseits wissen wir, dafs die Ebene μ, welche bei der kubischen Ellipse die Mittelpunkte aller in den Schmiegungsebenen der Raumkurve enthaltenen Kegelschnitte auf einer Hyperbel $\mu^{(2)}$ enthält, der Raumkurve nur in einem einzigen reellen Punkte begegnen kann, weil sie durch die Schnittlinie g_1^∞ zweier reellen Schmiegungsebenen derselben geht; folglich ist der Punkt $\mathfrak{b}$ der kubischen Ellipse derjenige, in welchem die Mittelpunktsebene μ ihr begegnet.

Die beiden gesuchten Punkte $\mathfrak{a}_\infty$ und $\mathfrak{b}$ sind demnach ermittelt, und die Gerade $g_{\mathfrak{b}}$, welche Durchmesser der kubischen Ellipse wird, ist die Schnittlinie von $\tau_{\mathfrak{b}}$ mit $[\mathfrak{b} t_{\mathfrak{a}}]$, d. h. der Durchmesser $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}'|$ des Kegelschnitts $\beta^{(2)}$. Wir können daher folgendes Resultat aussprechen:

Die kubische Ellipse hat einen reellen Durchmesser, welcher durch denjenigen Punkt $\mathfrak{b}$ derselben geht, in dem sie getroffen wird von der Ebene μ, die gleichweit absteht von den beiden parallelen Schmiegungsebenen der kubischen Ellipse. Dieser Durchmesser ist zugleich der durch $\mathfrak{b}$ gehende Durchmesser der ebenen Ellipse $\beta^{(2)}$, welche in der Schmiegungsebene β des Punktes $\mathfrak{b}$ enthalten ist. (Wir können den gesuchten Durchmesser auch finden als die Verbindungslinie der beiden Punkte, in welchen die Ebene μ der kubischen Ellipse und ihrer Asymptote $t_{\mathfrak{a}}$ begegnet.) Alle Sekanten der kubischen Ellipse, welche diesem Durchmesser begegnen, werden in den Treffpunkten halbiert und laufen parallel der Schmiegungsebene in dem einzigen unendlich-entfernten Punkte der kubischen Ellipse; sie bilden eine Regelschar eines durch die kubische Ellipse gehenden hyperbolischen Paraboloids.

Bei der kubischen Hyperbel endlich wiederholt sich derselbe Vorgang, welcher soeben beschrieben ist, dreimal; die kubische Hyperbel hat drei reelle unendlich-entfernte Punkte

$\mathfrak{a}_\infty \mathfrak{b}_\infty \mathfrak{c}_\infty$; jeder derselben ist der Mittelpunkt eines hyperbolischen Cylinders, welcher durch die kubische Hyperbel geht, und auf jedem Cylinder liegt eine Asymptote $t_a t_b t_c$. Die vorige Betrachtung ist ihrem Wesen nach völlig unabhängig davon, ob der durch die Raumkurve gehende Cylinder ein elliptischer oder hyperbolischer ist; ihr Ergebnis bleibt also für die kubische Hyperbel in gleicher Weise bestehen; nur erhalten wir hier in der Mittelpunktsebene μ drei Durchschnittspunkte $\mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0 \mathfrak{c}_0$ mit der kubischen Hyperbel, und es ist noch die Zusammengehörigkeit je eines dieser drei Punkte mit einem der drei unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{a}_\infty \mathfrak{b}_\infty \mathfrak{c}_\infty$ oder mit einem der drei hyperbolischen Cylinder zu ermitteln, welche durch die kubische Hyperbel gehen. Diese Zusammengehörigkeit wird dadurch ermittelt, daſs wir uns der oben gefundenen Eigenschaft erinnern, wonach einer der drei Punkte z. B. $\mathfrak{a}_0$ zur Schmiegungsebene α hat, und in derselben der Kegelschnitt $\alpha^{(2)}$ enthalten ist, ferner durch den Punkt $\mathfrak{a}_0$ nur ein einziger bestimmter Durchmesser dieses Kegelschnitts $\alpha^{(2)}$ geht und dieser Durchmesser der Asymptote eines bestimmten unendlich-entfernten Punktes $\mathfrak{a}_\infty$ der kubischen Hyperbel begegnet; zu dem Punkte $\mathfrak{a}_0$ gehört also der bestimmte Punkt $\mathfrak{a}_\infty$, zu $\mathfrak{b}_0 \dots \mathfrak{b}_\infty$, zu $\mathfrak{c}_0 \dots \mathfrak{c}_\infty$. Wir haben also folgendes Resultat:

Die kubische Hyperbel hat drei reelle Durchmesser, welche in derjenigen Ebene μ liegen, die sämtliche Mittelpunkte der in den Schmiegungsebenen enthaltenen Kegelschnitte auf einer Ellipse liegend hat. Die Ebene μ begegnet der kubischen Hyperbel in drei reellen Punkten $\mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0 \mathfrak{c}_0$ und den drei Asymptoten derselben in drei Punkten $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1$; die drei gesuchten Durchmesser sind die Verbindungslinien $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1|$, $|\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_1|$. Die Zusammengehörigkeit der Punkte $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{c}_1$ ist aber folgende: der Punkt $\mathfrak{a}_0$ der kubischen Hyperbel hat eine bestimmte Schmiegungsebene α_0, in der eine gewisse Hyperbel $\alpha_0^{(2)}$ enthalten ist, die von den Durchschnittslinien mit allen übrigen Schmiegungsebenen umhüllt wird. Diese ebene Hyperbel $\alpha_0^{(2)}$ hat einen bestimmten Durchmesser,

welcher durch $\mathfrak{a}_0$ geht, und dieser ist die Gerade $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$, welche der Asymptote $t_\mathfrak{a}$ in dem Punkte $\mathfrak{a}_1$, dem zweiten Endpunkte dieses Durchmessers begegnet.

Wir können die im Vorhergehenden behandelte Frage auch noch von einer andern Seite beleuchten und wollen hierbei nur an den Fall der kubischen Hyperbel anknüpfen, welcher als der allgemeinste angesehen werden kann; denn sobald von den im allgemeinen getrennt liegenden drei unendlich-entfernten Punkten $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty$ entweder zwei zusammenfallen oder konjugiert-imaginär werden oder alle drei zusammenfallen, geht aus der kubischen Hyperbel die kubische parabolische Hyperbel oder die kubische Ellipse oder die kubische Parabel hervor.

Der Durchmesser $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$, dessen Punkte die durch dieselben gehenden Sekanten der Raumkurve halbieren, geht durch den Punkt $\mathfrak{a}_0$ derselben und enthält weiter keinen Punkt der Raumkurve. Durch diesen Strahl $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ und die Raumkurve läſst sich also (S. 233) nur ein einziges Hyperboloid legen, und wir erhalten dasselbe, indem wir um $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ eine veränderliche Ebene drehen, welche allemal aus der Raumkurve eine (nicht durch $\mathfrak{a}_0$ gehende) Sekante ausschneidet; diese sämtlichen Sekanten sind die Erzeugenden einer Regelschar jenes Hyperboloids; nun giebt es eine besondere Ebene durch $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ und $t_\mathfrak{a}$, die Asymptote, welche in $\mathfrak{a}_\infty$ die Raumkurve berührt; folglich ist $t_\mathfrak{a}$ eine Erzeugende unsres Hyperboloids; ferner liegt $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ in der Schmiegungsebene α_0 im Punkte $\mathfrak{a}_0$ der Raumkurve, folglich ist die Tangente t_0 im Punkte $\mathfrak{a}_0$ der Raumkurve eine zweite Erzeugende unsres Hyperboloids. Wir können nunmehr dasselbe Hyperboloid auch durch zwei Ebenenbüschel erzeugen, welche $t_\mathfrak{a}$ und t_0 zu Axen haben und nach den Punkten der Raumkurve gehen. Verbinden wir $t_\mathfrak{a}$ und t_0 mit dem Punkte $\mathfrak{a}_\infty$ der Raumkurve, so erhalten wir die Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{a}$ parallel mit der Ebene $[t_0\mathfrak{a}_\infty]$, folglich ist die unendlich-entfernte Gerade der Ebene $\tau_\mathfrak{a}$ eine Erzeugende unseres Hyperboloids, d. h. dasselbe ist ein hyperbolisches Paraboloid, wie wir schon oben eingesehen haben. Da das hyperbolische Paraboloid die unendlich-entfernte Ebene in zwei Erzeugenden aus je einer Regelschar schneiden muſs,

von denen wir erst eine kennen durch $\mathfrak{a}_\infty$, so mufs die andere eine nicht durch $\mathfrak{a}_\infty$ gehende Sekante der Raumkurve sein, d. h. die Verbindungslinie $|\mathfrak{b}_\infty \mathfrak{c}_\infty|$, denn es giebt weiter keine Sekante der Art in ε_∞. Wir können also jetzt in noch einfacherer Art das hyperbolische Paraboloid konstruieren, für welches die Regelschar von Erzeugenden, welche der Raumkurve in je zwei Punkten begegnet, ihre Mittelpunkte auf einer Geraden hat:

Wenn $\mathfrak{a}_\infty \mathfrak{b}_\infty \mathfrak{c}_\infty$ die drei unendlich-entfernten Punkte einer Raumkurve 3. O. sind und man die Tangente in $\mathfrak{a}_\infty$ (Asymptote $t_\mathfrak{a}$) zieht, so läfst sich durch $t_\mathfrak{a}$ und die Verbindungslinie $|\mathfrak{b}_\infty \mathfrak{c}_\infty|$ nur ein hyperbolisches Paraboloid legen, auf welchem die Raumkurve verläuft. Die Schar Erzeugender dieses Paraboloids, welche der Raumkurve in je zwei Punkten begegnet, hat die Mittelpunkte dieser Sekanten auf einer Geraden (Durchmesser), welche der andern Regelschar des Paraboloids angehört und der Raumkurve nur in einem Punkte ($\mathfrak{a}_0$) begegnet.

Wir können nunmehr auch leicht a posteriori zu den oben gefundenen Resultaten zurückgelangen. Das durch die beiden Ebenenbüschel mit den Axen $t_\mathfrak{a}$ und $|\mathfrak{b}_\infty \mathfrak{c}_\infty|$ erzeugte hyperbolische Paraboloid hat als ein besonderes Paar entsprechender Ebenen die Ebene $[\mathfrak{b}_\infty \mathfrak{c}_\infty \mathfrak{a}_\infty] = \varepsilon_\infty$ und $\tau_\mathfrak{a}$, also ist die unendlich-entfernte Gerade der Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{a}$ eine Erzeugende des Paraboloids; wir nennen sie g_∞. Wenn wir zu den beiden Punkten $\mathfrak{b}_\infty$ $\mathfrak{c}_\infty$ und dem Schnittpunkte dieser Geraden mit $\tau_\mathfrak{a}$ den zugeordneten vierten harmonischen Punkt aufsuchen, so geht durch denselben eine einzige bestimmte Erzeugende g_0 der andern Regelschar des Paraboloids, welche der Raumkurve nur in einem einzigen Punkte $\mathfrak{a}_0$ begegnen kann. Ist hierdurch der Punkt $\mathfrak{a}_0$ gefunden, so können wir uns durch die Sekante $|\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_\infty|$ der Raumkurve Ebenenpaare gelegt denken, welche durch die Punktepaare gehen, in denen die eine Regelschar des Paraboloids die Raumkurve schneidet. Diese Ebenenpaare müssen eine Ebeneninvolution bilden; nun ist aber das Ebenenpaar durch $\mathfrak{b}_\infty$ und $\mathfrak{c}_\infty$ ein solches der Involution angehöriges und die Ebene

durch t_a ist eine Asymptotenebene der Involution, folglich die vierte harmonische, d. h. die Ebene durch g_0 die andere Asymptotenebene; diese mufs also das Paraboloid in einer Tangente der Raumkurve schneiden, d. h. die durch $\mathfrak{a}_0$ gehende Erzeugende der ersten Regelschar des Paraboloids ist eine Tangente t_0 der Raumkurve. Hieraus folgt unmittelbar, dafs die beiden Geraden g_0 und g_∞ alle Erzeugende der einen Regelschar des Paraboloids in Punktepaaren treffen, die harmonisch getrennt werden durch die Punktepaare, in denen diese Regelschar der Raumkurve begegnet; da aber g_∞ ganz im Unendlichen liegt, so enthält g_0 die Mittelpunkte aller Sekanten der Raumkurve auf dem hyperbolischen Paraboloid.

Es ist ersichtlich, wie die vorige Betrachtung sich modifiziert, wenn die beiden Punkte $\mathfrak{b}_\infty$ und $\mathfrak{c}_\infty$ zusammenfallen für die parabolische Hyperbel oder konjugiert-imaginär werden für die kubische Ellipse. Auch erkennen wir, dafs bei der kubischen Hyperbel drei, bei der kubischen Ellipse nur ein hyperbolisches Paraboloid der beschriebenen Art auftritt.

In dem Bisherigen ist ein hyperbolisches Paraboloid von der Beschaffenheit durch eine $C^{(3)}$ gelegt worden, dafs die Regelschar, welche der Raumkurve in Punktepaaren begegnet, die Mitten ihrer Sekanten auf einer Geraden hat. Es entsteht aber die Frage, ob nicht auch Hyperboloide durch die Raumkurve gelegt werden können, deren eine Regelschar Sekanten derselben Art auf $C^{(3)}$ ausschneidet; solche lassen sich in der That in sehr einfacher Weise ermitteln.

Gehen wir wieder von dem allgemeinsten Falle dreier unendlich-entfernter Punkte $\mathfrak{a}_\infty \mathfrak{b}_\infty \mathfrak{c}_\infty$ der Raumkurve $C^{(3)}$ aus, dann giebt es einen hyperbolischen Cylinder, welcher $\mathfrak{a}_\infty$ zum Mittelpunkt und $|\mathfrak{a}_\infty \mathfrak{b}_\infty|$, $|\mathfrak{a}_\infty \mathfrak{c}_\infty|$ zu zwei unendlich-entfernten Cylinderstrahlen hat (in dem Falle der kubischen Ellipse werden diese beiden konjugiert-imaginär und der Cylinder ein elliptischer). Dieser Cylinder $\mathfrak{a}_\infty^{(2)}$ hat eine bestimmte Hauptaxe a, welche im Endlichen verläuft, den Polarstrahl der unendlich-entfernten Ebene ε_∞, welche durch $\mathfrak{a}_\infty$ geht. Jede durch a gelegte Ebene schneidet den Cylinder in einem Paar Parallelstrahlen, welche von der Hauptaxe a gleich weit abstehen, und dieses Paar Parallelstrahlen enthält mithin

zwei Punkte der Raumkurve $C^{(3)}$, deren Verbindungslinie durch a halbiert wird; drehen wir also um den Strahl a eine Ebene, so schneidet dieselbe aus der Raumkurve $C^{(3)}$ Sekanten aus, deren Mittelpunkte sämtlich auf a liegen müssen. Wir haben dadurch eine Sekantenschar der Raumkurve von der verlangten Art gefunden, die einen Durchmesser besitzt, und erkennen unmittelbar, dafs dieselbe eine Regelschar eines Hyperboloids bildet. Denn die Gerade a ist eine solche, die der Raumkurve $C^{(3)}$ nur in dem einzigen Punkte $\mathfrak{a}_\infty$ begegnet. Aus dem Früheren (S. 233) wissen wir aber, dafs durch eine solche Gerade a und die Raumkurve nur ein einziges bestimmtes Hyperboloid gelegt werden kann, dessen zweimal schneidende Regelschar erhalten wird, wenn wir um a eine Ebene drehen und die Paare von Schnittpunkten dieser Ebene mit der $C^{(3)}$ durch Strahlen verbinden. Auf diesem Hyperboloid ist a eine Erzeugende der andern Regelschar, welche nur in einem Punkte die Raumkurve trifft; wir können leicht die zweite durch $\mathfrak{a}_\infty$ gehende Erzeugende der ersten Regelschar ermitteln. Auf dem Cylinder $\mathfrak{a}_\infty^{(2)}$ giebt es nämlich einen ausgezeichneten Cylinderstrahl $t_\mathfrak{a}$, die Tangente der Raumkurve am Punkte $\mathfrak{a}_\infty$. Legen wir eine Ebene durch a und $t_\mathfrak{a}$, d. h. die Durchmesserebene des Cylinders durch den Strahl $t_\mathfrak{a}$, so schneidet sie den Cylinder in einem zu $t_\mathfrak{a}$ parallelen Cylinderstrahl, welcher den Punkt $\mathfrak{a}_0$ der Raumkurve enthält; aus der Sekante, welche die Ebene $[a t_\mathfrak{a}]$ herausschneidet, wird daher die Verbindungslinie $|\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_\infty|$, d. h. der zu $t_\mathfrak{a}$ diametral gegenüberstehende Cylinderstrahl; wir haben also die beiden durch $\mathfrak{a}_\infty$ gehenden Erzeugenden des Hyperboloids gefunden, und da beide im Endlichen verlaufen (keiner von beiden ganz in die Unendlichkeit fällt), so kann das Hyperboloid kein hyperbolisches Paraboloid sein.

Hiernach läfst sich folgendes Ergebnis aussprechen:

Die (im Endlichen verlaufende) Hauptaxe a eines durch eine Raumkurve $C^{(3)}$ gelegten Cylinders enthält die Mittelpunkte sämtlicher Sekanten der Raumkurve, welche der Geraden a begegnen. Diese Sekanten selbst bilden eine Regelschar eines Hyperboloids. Bei der kubischen Ellipse giebt es nur eines, bei der kubischen Hyperbel drei solcher Hyperboloide.

Ob sich noch andere Hyperboloide durch die Raumkurve $C^{(3)}$ legen lassen, welche die gleiche Eigenschaft besitzen, geben wir dem Leser anheim zu untersuchen. Wir haben im allgemeinen sechs Durchmesser der Raumkurve gefunden, die paarweise zusammengehören, nämlich die Durchmesser durch $\mathfrak{a}_0$ und durch $\mathfrak{a}_\infty$, ebenso durch $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{b}_\infty$, durch $\mathfrak{c}^0$ und $\mathfrak{c}_\infty$. Zwei paarweise zusammengehörige Durchmesser, wie die durch $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_\infty$ gehenden, treffen sich, wie wir gesehen haben in einem Punkte $\mathfrak{m}$, dem Mittelpunkt desjenigen Kegelschnitts, welcher in der Schmiegungsebene α_0 des Punktes $\mathfrak{a}_0$ enthalten ist; will man einen solchen Punkt einen Mittelpunkt der kubischen Raumkurve nennen, weil sich in ihm zwei Durchmesser der Raumkurve treffen, so hat die kubische Ellipse nur einen, die kubische Hyperbel drei reelle Mittelpunkte.

Zweiter Abschnitt.

Die projektivischen Gebilde zweiter Stufe und ihre Erzeugnisse.

§ 40. Die vier Grundgebilde zweiter Stufe und die projektivische Beziehung derselben: kollineare und reziproke Beziehung.*)

Während bisher nur geometrische Gebilde von einfach-unendlicher Mannigfaltigkeit in Betracht gezogen worden sind: das ebene Strahlenbüschel, die gerade Punktreihe, das Ebenenbüschel, und während bei den beiden letzten Gebilden der Punkt und die Ebene als veränderliches Element, die Gerade als Träger aufgefaſst wurde, wollen wir jetzt zu den geometrischen Gebilden von doppelt-unendlicher Mannigfaltigkeit übergehen, indem wir den Punkt und die Ebene selbst als Träger auffassen. Hieraus entstehen vier Grundgebilde zweiter Stufe:

*) Von den diesen Gegenstand betreffenden Werken sind u. a. folgende hervorzuheben: F. Seidewitz: Darstellung der geometrischen Verwandtschaften vermittelst projektivischer Gebilde, Grunert's Archiv für Math. u. Phys. Bd. VII, S. 113. Bd. VIII, S. 1 ff. F. Seidewitz: Construction und Classification der Flächen zweiten Grades mittelst projektivischer Gebilde, Grunert's Archiv f. Math. u. Physik. Bd. IX, S. 158. A. F. Möbius: Der barycentrische Calcül. II. Abschnitt. (Leipzig 1827.) L. J. Magnus: Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes § 11. (Berlin 1833), sowie Crelle's Journ. f. Math. Bd. VIII, S. 51. G. K. C. v. Staudt: Geometrie der Lage § 10. (Nürnberg 1847) und Beiträge zur Geometrie der Lage (1856—1860). Th. Reye: Geometrie der Lage II. (Hannover 2. Aufl. 1880.) W. Fiedler: Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. (Leipzig 1875.)

1) Die sämtlichen Strahlen im Raume, welche durch einen festen Punkt $\mathfrak{O}$ (Mittelpunkt) gehen, nennen wir ein Strahlenbündel (im Gegensatz zu Strahlenbüschel, welches nur die Strahlen in einer Ebene umfafst, die durch einen festen Punkt gehen).
2) Die sämtlichen Ebenen im Raume, welche durch einen festen Punkt $\mathfrak{O}$ gehen, nennen wir ein Ebenenbündel (im Gegensatz zu Ebenenbüschel, welches nur die Ebenen durch eine feste Axe umfafst).
3) Die sämtlichen Punkte in einer Ebene nennen wir ein Punktfeld (im Gegensatz zu Punktreihe, welche nur die Punkte in einer Geraden enthält).
4) Die sämtlichen Strahlen (geraden Linien) in einer Ebene nennen wir ein Strahlenfeld (im Gegensatz zu Strahlenbüschel, welches nur die Strahlen einer Ebene enthält, die durch einen festen Punkt gehen).

Es ist ersichtlich, dafs die beiden letzten Gebilde dual gegenüberstehen den beiden ersten Gebilden. Der Punkt $\mathfrak{O}$ ist gleichzeitig der Mittelpunkt eines Strahlenbündels und eines Ebenenbündels, die Ebene gleichzeitig der Träger eines Punktfeldes und eines Strahlenfeldes. Ferner können die beiden letzten Gebilde mit den beiden ersteren in perspektivische Lage gebracht werden und umgekehrt; wenn man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ im Raume mit sämtlichen Punkten eines Punktfeldes durch Strahlen verbindet, so erhält man ein Strahlenbündel, und wenn man $\mathfrak{O}$ mit sämtlichen Strahlen eines ebenen Strahlenfeldes durch Ebenen verbindet, so erhält man ein Ebenenbündel; und wenn man Strahlenbündel oder Ebenenbündel durch eine beliebige Transversalebene schneidet, so erhält man ein ebenes Punktfeld oder Strahlenfeld; die beiden letzten Gebilde sind also von gleicher Mächtigkeit, wie die beiden ersten Gebilde; alle vier sind aber von doppelt-unendlicher Mannigfaltigkeit, die wir in folgender Weise übersehen können:

Um die Totalität der Strahlen eines Strahlenbündels zu erhalten, denken wir uns durch den Mittelpunkt $\mathfrak{O}$ eine Ebene gelegt und ziehen in derselben sämtliche Strahlen durch $\mathfrak{O}$; diese bilden ein einfaches ebenes Strahlenbüschel; verändern wir nun die vorige Ebene selbst, indem wir sie

um irgend einen durch $\mathfrak{O}$ gezogenen festen Strahl a in ihr drehen, also ein Ebenenbüschel beschreiben lassen, so erhalten wir in jeder Ebene dieses Büschels ein einfaches Strahlenbüschel, und die Gesamtheit aller dieser Strahlenbüschel bildet das Strahlenbündel. Jeder Strahl des Strahlenbündels tritt dabei nur einmal auf; er liegt in einer einzigen bestimmten Ebene mit a und nimmt in dem Strahlenbüschel dieser Ebene eine einzige bestimmte Stelle ein. In jedem der drei übrigen Gebilde läfst sich die doppelte Mannigfaltigkeit der Elemente in analoger Weise übersehen.

Wir können die Gesamtheit der Strahlen eines Strahlenbündels auch in folgender Weise auffassen:

Denken wir uns durch den Mittelpunkt des Bündels zwei feste Strahlen a und b gezogen, so wird jeder veränderliche Strahl x des Bündels mit a und b in je einer Ebene liegen, und wir erhalten durch Veränderung von x zwei Ebenenbüschel $a[x]$ und $b[x]$, die übrigens in gar keiner Abhängigkeit von einander stehen. Jede Ebene des einen Ebenenbüschels schneidet jede Ebene des andern Ebenenbüschels in einem bestimmten Strahl x des Strahlenbündels; diese Schnittlinie wird nur dann unbestimmt, wenn die beiden sich schneidenden Ebenen in die Ebene $[ab]$ hineinfallen. Es treten also zu allen übrigen Schnittstrahlen irgend zweier Ebenen der beiden Ebenenbüschel noch die Strahlen des ebenen Strahlenbüschels hinzu, von welchem a und b zwei Elemente sind, damit die Gesamtheit aller Strahlen des Bündels erhalten werde. Die analoge Auffassung der Elemente in den drei übrigen Gebilden zweiter Stufe braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.*)

*) In ähnlicher Weise erkennen wir, dafs die gesamten Punkte des Raumes ein Gebilde dritter Stufe, d. h. von dreifach-unendlicher Mannigfaltigkeit bilden, indem jeder Punkt $\mathfrak{x}$ des Raumes als der Schnittpunkt dreier Ebenen aufgefafst werden kann, die drei bestimmten Ebenenbüscheln mit den Axen a, b, c angehören; da jedes derselben von einfacher Mannigfaltigkeit ist, so gehören die Punkte des Raumes einem Gebilde von dreifach-unendlicher Mannigfaltigkeit an. In gleicher Weise sehen wir, dafs auch die gesamten Ebenen im Raume ein Gebilde dritter Stufe, d. h. von dreifach-unendlicher Mannigfaltigkeit bilden, indem jede Ebene durch drei Punkte bestimmt wird, die wir beliebig aus drei geraden Punktreihen der Träger a, b, c wählen

Diese Auffassung ermöglicht es, die Elemente zweier verschiedenen Gebilde zweiter Stufe in eine gegenseitige Abhängigkeit von einander zu versetzen, so daſs nicht nur jedem Elemente des einen Gebildes ein einziges und bestimmtes Element des andern Gebildes entspricht und umgekehrt, sondern auch, wenn z. B. die gegebenen beiden Gebilde Punktfelder und die entsprechenden Elemente Punkte sind, solchen Punkten des einen Punktfeldes, die auf einer Geraden liegen, Punkte des andern Punktfeldes entsprechen, die ebenfalls auf einer Geraden liegen. Halten wir diesen eben angenommenen Fall fest, so läſst sich die Beziehung folgendermaſsen herstellen: Zwei Ebenen ε und ε_1 seien die Träger zweier Punktfelder. In der Ebene ε seien zwei feste Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ die Mittelpunkte zweier ebenen Strahlenbüschel, dann liefert ein beliebiger veränderlicher Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene ε die Strahlen $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}| = x$ und $|\mathfrak{B}'\mathfrak{x}| = x'$. In gleicher Weise seien in der Ebene ε_1 zwei feste Punkte $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_1'$ die Mittelpunkte zweier ebenen Strahlenbüschel, dann liefert ein beliebiger veränderlicher Punkt $\mathfrak{x}_1$ der Ebene ε_1 die Strahlen $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{x}_1| = x_1$ und $|\mathfrak{B}_1'\mathfrak{x}_1| = x_1'$. Wir können nun die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ in Abhängigkeit von einander setzen dadurch, daſs wir einmal die von den Strahlen x und x_1 (in den verschiedenen Ebenen ε und ε_1) beschriebenen ebenen Strahlenbüschel in projektivische Beziehung setzen und zweitens gleichzeitig die von den Strahlen x' und x_1' beschriebenen ebenen Strahlenbüschel projektivisch machen; dann wird ein beliebiger Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene ε zwei Strahlen x und x' bestimmen, denen die Strahlen x_1 und x_1' durch jene doppelte projektivische Beziehung entsprechen und der Schnittpunkt $(x_1 x_1') = \mathfrak{x}_1$ wird der

können. Dagegen konstituieren die sämtlichen Geraden im Raume ein Gebilde vierter Stufe, denn eine beliebige Gerade im Raume kann aufgefaſst werden als die Schnittlinie zweier Ebenen oder muſs mit irgend zwei festgehaltenen Punkten $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ in je einer Ebene liegen. Die beiden Ebenen, welche sich in der Geraden schneiden, bestimmen also zwei Ebenenbündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$, die in weiter keiner Abhängigkeit von einander stehen, aber beide von doppelt-unendlicher Mannigfaltigkeit sind. Die gesamten Geraden im Raume, deren jede in dieser Weise nur einmal erhalten wird, bilden also wegen der vierfachen Willkürlichkeit eine Mannigfaltigkeit von vierfacher Unendlichkeit oder ein Gebilde vierter Stufe.

dem willkürlich gewählten Punkte $\mathfrak{x}$ der Ebene ε entsprechende Punkt der Ebene ε_1 sein. In gleicher Weise kann umgekehrt der einem Punkte $\mathfrak{x}_1$ entsprechende Punkt $\mathfrak{x}$ gefunden werden. Sollen nun aber allen Punkten $\mathfrak{x}$, die auf einer Geraden l liegen, Punkte $\mathfrak{x}_1$ entsprechen, die auch auf einer Geraden, l_1, liegen, so müssen für zwei perspektivisch-liegende Strahlenbüschel $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ die mit ihnen projektivischen Strahlenbüschel $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_1'$ auch perspektivische Lage haben; dies ist der Fall, sobald der Verbindungsstrahl $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ für beiderlei projektivische Beziehung den Verbindungsstrahl $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|$ zu seinem entsprechenden Strahle hat, d. h. sobald in dem Strahlenbüschel $\mathfrak{B}$ dem Strahle $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ der Strahl $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|$ im Strahlenbüschel $\mathfrak{B}_1$, und gleichzeitig im Strahlenbüschel $\mathfrak{B}'$ dem Strahle $|\mathfrak{B}'\mathfrak{B}|$ der Strahl $|\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_1|$ im Strahlenbüschel $\mathfrak{B}_1'$ entspricht. Ist dies der Fall, so wird jeder Geraden l in der Ebene ε eine bestimmte Gerade l_1 in der Ebene ε_1 entsprechen, und die vorige Beziehung, welche nur die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ der beiden Punktfelder in gegenseitige Abhängigkeit von einander versetzte, erweitert sich gleichzeitig zu einer Abhängigkeit der Strahlenfelder, deren Träger ε und ε_1 sind. Hierdurch hört auch die einzige Unbestimmtheit auf, welche die vorige Konstruktion übrig liefs, nämlich hinsichtlich solcher Punkte $\mathfrak{x}$, die auf der Verbindungslinie $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ liegen; ihnen müssen jetzt Punkte $\mathfrak{x}_1$ entsprechen, welche auf der Verbindungslinie $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|$ liegen, und die beiden projektivischen Punktreihen auf den beiden entsprechenden Strahlen $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ und $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|$ sind vollständig bestimmt; denn da jetzt den Punkten $\mathfrak{x}$ einer Geraden l in der Ebene ε die Punkte $\mathfrak{x}_1$ einer Geraden l_1 in der Ebene ε_1 entsprechen, so mufs einem Punkte $\mathfrak{x}$, der gleichzeitig in zwei Geraden l und l' der Ebene ε liegt, derjenige Punkt $\mathfrak{x}_1$ entsprechen, welcher gleichzeitig in den entsprechenden Geraden l_1 und l_1' liegt, d. h. der Schnittpunkt $(l_1 l_1')$. Nehmen wir daher irgend einen Punkt $\mathfrak{x}$ der Verbindungslinie $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ und ziehen durch ihn eine beliebige andere Gerade l, so trifft die entsprechende Gerade l_1 die Verbindungslinie $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|$ in dem gesuchten entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1$; insbesondere entsprechen sich auch die Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$, ebenso wie die Punkte $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}_1'$.

Hierdurch sind die beiden Ebenen ε und ε_1, sowohl als Träger von Punktfeldern, wie auch als Träger von Strahlenfeldern aufgefaſst, in eine gegenseitig eindeutige Abhängigkeit gebracht, welche die Ausdehnung der projektivischen Beziehung auf Gebilde zweiter Stufe ist und kollineare Beziehung genannt wird.

Bei der kollinearen Beziehung zweier Ebenen ε und ε_1 entspricht jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Ebene ε ein einziger bestimmter Punkt $\mathfrak{x}_1$ der andern Ebene ε_1 und umgekehrt; jedem Strahle x der Ebene ε ein einziger bestimmter Strahl x_1 der andern Ebene ε_1 und umgekehrt; einer geraden Punktreihe in der Ebene ε eine mit derselben projektivische gerade Punktreihe in der Ebene ε_1 und umgekehrt; einem ebenen Strahlenbüschel in der Ebene ε ein mit demselben projektivisches ebenes Strahlenbüschel in der Ebene ε_1 und umgekehrt; den Punkten und Tangenten eines Kegelschnitts in der Ebene ε also wieder die Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts in der Ebene ε_1 u. s. f.

Die zur obigen Konstruktion der kollinearen Beziehung verwendeten Punkte $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'$, sowie ihre Verbindungsstrahlen nehmen keine ausnahmsweise Stellung unter den Paaren entsprechender Elemente beider Gebilde in Anspruch, sondern ordnen sich allen übrigen Elementenpaaren gleichberechtigt ein, so daſs die kollineare Beziehung zweier Ebenen ε und ε_1 vollständig bestimmt wird

1) durch vier willkürlich zu wählende Paare entsprechender Punkte:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1, \end{matrix}$$

von denen keine drei in einer Geraden liegen.

Zur Konstruktion eines beliebigen Paares entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ setze man in projektivische Beziehung die beiden Strahlenbüschel:

$$\mathfrak{a}\,|\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{x}| \barwedge \mathfrak{a}_1\,|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{x}_1|$$

und zweitens die beiden Strahlenbüschel:

$$\mathfrak{b}\,|\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{x}| \barwedge \mathfrak{b}_1\,|\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{x}_1|,$$

wodurch, sobald $\mathfrak{x}$ gegeben ist, $\mathfrak{x}_1$ vollständig und eindeutig bestimmt wird. Die beiden projektivischen Punktreihen auf $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|$ werden bestimmt durch die drei Paare entsprechender Punkte:

$$\mathfrak{a} \text{ und } \mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{b} \text{ und } \mathfrak{b}_1, \quad (|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|) \text{ und } (|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|, |\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1|);$$

2) durch ein Paar entsprechender Punkte und drei Paare entsprechender Strahlen, die sich nicht in einem Punkte schneiden:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & b & c & d \\ \mathfrak{a}_1 & b_1 & c_1 & d_1, \end{matrix}$$

welche ersetzt werden können durch die vier Paare entsprechender Punkte:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & (bc) & (bd) & (cd) \\ \mathfrak{a}_1 & (b_1c_1) & (b_1d_1) & (c_1d_1), \end{matrix}$$

wodurch dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt ist;

3) durch vier Paare entsprechender Strahlen:

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1, \end{matrix}$$

von denen keine drei sich in demselben Punkte schneiden.

Zur Konstruktion eines beliebigen Paares entsprechender Strahlen xx_1 setze man in projektivische Beziehung die beiden Punktreihen:

$$a\,(bcdx) \barwedge a_1\,(b_1c_1d_1x_1)$$
$$b\,(acdx) \barwedge b_1\,(a_1c_1d_1x_1),$$

wodurch, sobald x gegeben ist, x_1 vollständig und eindeutig bestimmt wird. Die beiden projektivischen Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte (ab) und (a_1b_1) sind, werden bestimmt durch die drei Paare entsprechender Strahlen:

$$a \text{ und } a_1, \quad b \text{ und } b_1 \quad |(ab), (cd)| \text{ und } |(a_1b_1), (c_1d_1)|.$$

Wir können aber auch die kollineare Beziehung der beiden Ebenen dadurch herstellen, dafs wir von den je sechs Durchschnittspunkten, welche die Ecken der vollständigen Vierseite sind:

$$(ab) \quad (ac) \quad (ad) \quad (bc) \quad (bd) \quad (cd)$$
$$(a_1 b_1) \quad (a_1 c_1) \quad (a_1 d_1) \quad (b_1 c_1) \quad (b_1 d_1) \quad (c_1 d_1)$$

solche vier Paare als entsprechende Punkte wählen, von denen keine drei in einer Geraden liegen, was bekanntlich auf drei verschiedene Arten geschehen kann;

4) durch drei Paare entsprechender Punkte und ein Paar entsprechender Strahlen:

$$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c} \quad d$$
$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{c}_1 \quad d_1,$$

welche ersetzt werden können durch die vier Paare entsprechender Strahlen:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{c}| \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{c}| \quad d$$
$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1| \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| \quad d_1,$$

wodurch dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt ist.

Dagegen können zur Bestimmung der kollinearen Beziehung zweier Ebenen nicht willkürlich gewählt werden zwei Paare entsprechender Punkte und zwei Paare entsprechender Strahlen; denn sollen sich entsprechen:

$$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad c \quad d$$
$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_1 \quad c_1 \quad d_1,$$

so müssen auf den Verbindungslinien $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|$ vier Paare entsprechender Punkte zweier projektivischen geraden Punktreihen liegen, nämlich:

$$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad (|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, c|) \quad (|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, d)$$
$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_1 \quad (|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|, c_1|) \quad (|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|, d_1),$$

woraus hervorgeht, dafs jene Elemente nicht alle willkürlich gewählt werden dürfen; liegen sie dagegen so, dafs diese Bedingung der Projektivität erfüllt wird, dann ist die kollineare Beziehung nicht ausreichend bestimmt, indem zwar mehr als vier Paare entsprechender Punkte bekannt sind, aber nicht solche, von denen keine drei Punkte in je einer Geraden liegen, vielmehr kennt man nur die beiden Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|$ mit den ganzen auf ihnen liegenden projektivischen Punktreihen und das einzelne Paar entsprechender Punkte (cd) und $(c_1 d_1)$.

Zu der kollinearen Beziehung der beiden ebenen Felder ε und ε_1, bei welcher gleichartige Elemente einander entsprechen, nämlich die Punkte des einen Feldes den Punkten des andern und gleichzeitig den Strahlen des einen Feldes die Strahlen des andern und umgekehrt, tritt noch eine zweite Beziehung zweier ebenen Felder ε und ε_1 zu einander, bei welcher ungleichartige Elemente einander entsprechen, nämlich den Punkten des einen Feldes die Strahlen des andern und gleichzeitig den Strahlen des ersten die Punkte des zweiten und umgekehrt. Diese Art des Entsprechens heifst reziproke Beziehung und kann in ganz analoger Weise, wie die kollineare Beziehung konstruiert werden:

Zwei Ebenen ε und ε_1 sind die Träger sowohl von Punkt-, wie auch von Strahlenfeldern. In der Ebene ε seien zwei feste Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ die Mittelpunkte zweier ebenen Strahlenbüschel und $\mathfrak{x}$ ein beliebiger veränderlicher Punkt der Ebene ε, welcher die Strahlen $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}| = x$ und $|\mathfrak{B}'\mathfrak{x}| = x'$ liefert. In der Ebene ε_1 seien dagegen zwei feste Gerade b_1 und b_1' die Träger zweier geraden Punktreihen und x_1 ein beliebiger veränderlicher Strahl, welcher den festen Strahlen b_1 und b_1' in den Punkten $(b_1 x_1)$ und $(b_1' x_1)$ begegnet. Wir können nun den Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene ε und den Strahl x_1 der Ebene ε_1 in Abhängigkeit von einander setzen dadurch, dafs wir einerseits das von dem Strahle $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}|$ beschriebene Strahlenbüschel mit der vom Punkte $(b_1 x_1)$ beschriebenen Punktreihe und andererseits das von dem Strahle $|\mathfrak{B}'\mathfrak{x}|$ beschriebene Strahlenbüschel mit der vom Punkte $(b_1' x_1)$ beschriebenen Punktreihe in projektivische Beziehung setzen; dann wird ein beliebiger Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene ε zwei Strahlen $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{B}'\mathfrak{x}|$ bestimmen, denen durch jene doppelte projektivische Beziehung zwei Punkte auf den Trägern b_1 resp. b_1' entsprechen, deren Verbindungslinie der bestimmte Strahl x_1 ist, welcher in der Ebene ε_1 dem willkürlich in der Ebene ε gewählten Punkte $\mathfrak{x}$ entspricht. In gleicher Weise kann umgekehrt der einem Strahle x_1 in der Ebene ε_1 entsprechende Punkt $\mathfrak{x}$ in der Ebene ε gefunden werden. Sollen nun aber allen Punkten $\mathfrak{x}$, die auf einer Geraden y liegen, Strahlen x_1 entsprechen, welche durch einen Punkt $\mathfrak{y}_1$ laufen, so müssen für je zwei perspektivisch liegende Strahlenbüschel $\mathfrak{B}$ und

$\mathfrak{B}'$ die mit ihnen projektivischen Punktreihen b_1 und b_1' auch perspektivische Lage haben; dies wird der Fall sein, sobald der Verbindungsstrahl $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ für beiderlei projektivische Beziehung den Schnittpunkt $(b_1 b_1')$ zu seinem entsprechenden Punkte hat. Setzen wir dies fest, dann entsprechen nicht nur den Punkten $\mathfrak{x}$ der Ebene ε die Strahlen x_1 der Ebene ε_1, sondern auch den Strahlen y der Ebene ε die Punkte $\mathfrak{y}_1$ der Ebene ε_1 und umgekehrt. Zugleich wird hierdurch die einzige Unbestimmtheit gehoben, welche die allgemeine Konstruktion übrig läſst, nämlich hinsichtlich solcher Punkte $\mathfrak{x}$, die auf der Verbindungslinie $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ liegen; ihnen müssen jetzt Strahlen x_1 entsprechen, welche durch den Schnittpunkt $(b_1 b_1')$ gehen, und die projektivische Beziehung der Punktreihe auf $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ mit dem Strahlenbüschel um $(b_1 b_1')$ ist vollständig bestimmt; denn da jetzt den Punkten $\mathfrak{x}$ einer Geraden y in der Ebene ε die Strahlen x_1 durch einen Punkt $\mathfrak{y}_1$ in der Ebene ε_1 entsprechen, so muſs einem solchen Punkte $\mathfrak{x}$, welcher gleichzeitig in zwei Geraden y und y' liegt, derjenige Strahl x_1 entsprechen, welcher gleichzeitig durch die entsprechenden Punkte $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_1'$ geht, d. h. der Verbindungsstrahl $|\mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_1'|$. Nehmen wir daher irgend einen Punkt $\mathfrak{x}$ der Verbindungslinie $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ und ziehen durch ihn eine beliebige andere Gerade y, so liefert der entsprechende Punkt $\mathfrak{y}_1$ mit dem Schnittpunkte $(b_1 b_1')$ verbunden den gesuchten entsprechenden Strahl x_1; insbesondere entspricht auch dem Punkte $\mathfrak{B}$ der Ebene ε der Strahl b_1 der Ebene ε_1 und dem Punkte $\mathfrak{B}'$ der Ebene ε der Strahl b_1' der Ebene ε_1. Hierdurch werden die beiden Ebenen ε und ε_1, sowohl als Träger von Punktfeldern, wie auch als Träger von Strahlenfeldern aufgefaſst, in eine gegenseitig eindeutige Abhängigkeit gebracht, bei welcher verschiedenartige Elemente einander entsprechen, nämlich:

Bei der reziproken Beziehung zweier Ebenen ε und ε_1 entspricht jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Ebene ε ein einziger bestimmter Strahl x_1 der Ebene ε_1 und umgekehrt; jedem Strahle x der Ebene ε ein einziger bestimmter Punkt $\mathfrak{x}_1$ der Ebene ε_1 und umgekehrt; wenn der Punkt $\mathfrak{x}$ in dem Strahle y liegt, so geht auch der Strahl x_1 durch den Punkt

$\mathfrak{y}_r$; einer geraden Punktreihe in der Ebene ε entspricht ein mit derselben projektivisches Strahlenbüschel in der Ebene ε_1 und umgekehrt; einem ebenen Strahlenbüschel in der Ebene ε entspricht eine mit demselben projektivische gerade Punktreihe in der Ebene ε_1 und umgekehrt; den Punkten und Tangenten eines Kegelschnitts in der Ebene ε entsprechen die Tangenten und Punkte eines Kegelschnitts in der Ebene ε_1 u. s. f.

Die zur obigen Konstruktion der reziproken Beziehung verwendeten Punkte $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ und Strahlen $b_1 b_1'$, sowie die Verbindungslinie jener und der Schnittpunkt dieser nehmen keine Sonderstellung ein unter den Paaren entsprechender Elemente beider Gebilde, sondern ordnen sich allen übrigen Elementenpaaren gleichberechtigt ein, so daſs die reciproke Beziehung zweier Ebenen ε und ε_1 auf folgende vier Arten bestimmt werden kann:

1) durch vier willkürlich in der Ebene ε zu wählende Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und vier als entsprechend willkürlich zu wählende Strahlen in der Ebene ε_1, von denen keine drei durch denselben Punkt laufen:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1; \end{matrix}$$

zur Konstruktion eines beliebigen Paares entsprechender Elemente $\mathfrak{x}\, x_1$ setze man in projektivische Beziehung:

$$\mathfrak{a}\,|\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{x}|\ \overline{\wedge}\ a_1\,(b_1 c_1 d_1 x_1)$$
$$\mathfrak{b}\,|\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{x}|\ \overline{\wedge}\ b_1\,(a_1 c_1 d_1 x_1),$$

wodurch, sobald $\mathfrak{x}$ gegeben ist, x_1 vollständig und eindeutig bestimmt wird; die Projektivität der Punktreihe auf $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ mit dem Strahlenbüschel um $(a_1 b_1)$ wird bestimmt durch die drei Paare entsprechender Elemente:

$\mathfrak{a}$ und a_1, $\mathfrak{b}$ und b_1, $(|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|)$ und $(a_1 b_1)$, $(c_1 d_1)$;

2) durch vier willkürlich in der Ebene ε zu wählende Strahlen, von denen keine drei durch denselben Punkt laufen und vier als entsprechend willkürlich zu wählende Punkte in der Ebene ε_1;

von denen keine drei in einer Geraden liegen:

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1. \end{matrix}$$

Die Fälle 1) und 2) sind, wie wir sehen, durchaus übereinstimmend, wodurch ein charakteristischer Unterschied zwischen reziproker und kollinearer Beziehung hervortritt.

In beiden Fällen können wir auch die Seiten des Vierecks in der einen Ebene den Ecken des Vierseits in der andern Ebene entsprechen lassen, wenn wir nur solche vier Paare auswählen, welche von einander unabhängig sind; drei Punkte, die in gerader Linie liegen, sind aber ebenso wenig von einander unabhängig, wie drei Strahlen, welche durch einen Punkt gehen (s. o.). Die übrigen beiden Bestimmungsarten können wir kürzer ausdrücken durch die bloſse Zusammenstellung der Buchstaben:

3)
$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & b & c & d \\ a_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1; \end{matrix}$$

4)
$$\begin{matrix} a & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}_1 & b_1 & c_1 & d_1, \end{matrix}$$

welche beiden Fälle ebenfalls übereinstimmend sind.

Dagegen ist ebensowenig wie bei der kollinearen Beziehung die reziproke Beziehung festzusetzen durch die willkürliche Annahme der Elementenpaare:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & c & d \\ a_1 & b_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1, \end{matrix}$$

weil im allgemeinen die Bedingung der Projektivität der vier Elementenpaare:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & (|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, c) & (|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, d) \\ a_1 & b_1 & |(a_1 b_1), \mathfrak{c}_1| & |(a_1 b_1), \mathfrak{d}_1| \end{matrix}$$

nicht erfüllt ist.

Bei der Beziehung der Gebilde zweiter Stufe rücksichtlich ihrer entsprechenden Elemente spaltet sich also die allgemeine Projektivität wegen der in doppelter Weise auftretenden Elemente in zwei verschiedene Arten, welche wir als kollineare und reziproke Beziehung unterschieden haben,

deren Natur aber im wesentlichen dieselbe ist. Ebenso wie bei zwei ebenen Trägern ε und ε_1 haben wir auch bei zwei Bündeln $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ eine kollineare und reziproke Beziehung zu unterscheiden; bei jener entsprechen sich allemal gleichartige, bei dieser ungleichartige Elemente, d. h.

bei der kollinearen Beziehung:
- die Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}$ den Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}_1$
  und gleichzeitig
- die Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}$ den Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}_1$

bei der reziproken Beziehung:
- die Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}$ den Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}_1$
  und gleichzeitig
- die Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}$ den Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}_1$.

Die Konstruktion entsprechender Elemente dieser in der einen oder andern Weise auf einander bezogenen Gebilde ist hier so vollständig analog der oben ausgeführten Konstruktion, daſs sie derselben ohne alle Schwierigkeit nachgebildet werden kann, und eine Wiederholung daher überflüssig ist; wir werden ohne weiteres diese Konstruktion überall anwenden, wo wir ihrer bedürfen, indem wir auf den einen oben durchgeführten Fall verweisen. In ganz analoger Weise können wir auch ungleichartige Gebilde selbst zu einander in projektivische Beziehung setzen und zwar sowohl rücksichtlich des einen, als auch des andern Systems der in ihnen enthaltenen Elemente, nämlich

{ die Punkte der Ebene ε zu den Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}_1$
{ und die Strahlen der Ebene ε zu den Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}_1$,

{ die Punkte der Ebene ε zu den Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}_1$
{ und die Strahlen der Ebene ε zu den Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}_1$,

ebenso wie wir vorhin in projektivische Beziehung gesetzt haben:

{ die Punkte der Ebene ε zu den Punkten der Ebene ε_1
{ und die Strahlen der Ebene ε zu den Strahlen der Ebene ε_1,

{ die Punkte der Ebene ε zu den Strahlen der Ebene ε_1
{ und die Strahlen der Ebene ε zu den Punkten der Ebene ε_1,

$\begin{cases}\text{die Strahlen des Bündels } \mathfrak{O} \text{ zu den Strahlen des Bündels } \mathfrak{O}_1\\ \text{und die Ebenen des Bündels } \mathfrak{O} \text{ zu den Ebenen des Bündels } \mathfrak{O}_1,\end{cases}$

$\begin{cases}\text{die Strahlen des Bündels } \mathfrak{O} \text{ zu den Ebenen des Bündels } \mathfrak{O}_1\\ \text{und die Ebenen des Bündels } \mathfrak{O} \text{ zu den Strahlen des Bündels } \mathfrak{O}_1;\end{cases}$

bei allen sechs Beziehungen ist die Konstruktion entsprechender Elemente im wesentlichen dieselbe oben angegebene, nur die Bezeichnung jedesmal eine andere.

Aus diesen Konstruktionen geht der allgemeine Satz hervor:

Wenn man eine Reihe von Gebilden zweiter Stufe hat, von denen das erste mit dem zweiten, das zweite mit dem dritten u. s. f., das vorletzte mit dem letzten in projektivischer Beziehung steht (d. h. in kollinearer oder reziproker Beziehung je nach der Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit ihrer Elemente), so steht auch das letzte mit dem ersten in projektivischer Beziehung, also z. B.:

Wenn zwei Gebilde zu einem dritten in reziproker Beziehung stehen, so stehen sie zu einander in kollinearer Beziehung.

§ 41. Die perspektivische Lage als Ursprung der projektivischen Beziehung.

Wenn wir eine beliebige Ebene ε und einen aufserhalb derselben befindlichen Punkt $\mathfrak{O}_1$ nehmen und jeden Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene ε mit $\mathfrak{O}_1$ durch einen Strahl x_1 verbinden, so setzen wir dadurch die Punkte der Ebene ε zu den Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}_1$ in eine solche Abhängigkeit, wie sie im vorigen Paragraphen betrachtet wurde; aber die beiden Gebilde, Punktfeld und Strahlenbündel, befinden sich in einer besonderen Lage, welche perspektivisch genannt wird. In der That, es entspricht nicht nur jedem Punkte $\mathfrak{x}$ ein einziger bestimmter Strahl x_1 und umgekehrt, sondern auch allen Punkten $\mathfrak{x}$, die auf einer Geraden y liegen, entsprechen Strahlen x_1, welche in einer Ebene $\eta = [\mathfrak{O}_1 y]$ liegen und die Punktreihe, welche $\mathfrak{x}$ beschreibt, ist mit dem von x_1 beschriebenen ebenen Strahlenbüschel projektivisch, weil beide Gebilde perspektivisch liegen. Oder, wenn wir irgend vier Punkte

$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ der Ebene ε, von denen keine drei in einer Geraden liegen, mit $\mathfrak{O}_1$ durch die Strahlen $a_1\, b_1\, c_1\, d_1$ verbinden, so dafs die ganze Beziehung durch die vier Paare entsprechender Elemente:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{matrix}$$

bestimmt wird, dann zeigt sich, dafs auch jeder beliebige Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene ε in dem ihm entsprechenden Strahl x_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ liegen mufs; denn wegen der doppelten Projektivität:

$$\mathfrak{a}\,|\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{x}| \;\overline{\wedge}\; a_1\,[b_1 c_1 d_1 x_1]$$
$$\mathfrak{b}\,|\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{x}| \;\overline{\wedge}\; b_1\,[a_1 c_1 d_1 x_1]$$

mufs die Ebene $[a_1 x_1]$ durch den Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ und die Ebene $[b_1 x_1]$ durch den Strahl $|\mathfrak{b}\mathfrak{x}|$, also der Strahl x_1 durch den Punkt $\mathfrak{x}$ gehen. Dies giebt folgenden Satz:

Wenn bei zwei kollinearen Gebilden, einem Punktfelde und einem Strahlenbündel, vier Punkte des Punktfeldes, von denen keine drei in einer Geraden liegen, auf den entsprechenden Strahlen des Strahlenbündels liegen, so gehen sämtliche Strahlen des letzteren durch die ihnen entsprechenden Punkte des Punktfeldes, d. h. es findet perspektivische Lage statt.

Die perspektivische Lage beider Gebilde läfst ebenfalls erkennen, dafs gleichzeitig den Strahlen in der Ebene ε die Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}_1$ entsprechen und umgekehrt. Ob aber zwei allgemein in dieser Beziehung gegebene Gebilde sich immer in eine solche perspektivische Lage bringen lassen, ist eine Frage, die wir später beantworten werden. (§ 42.)

Wenn wir zweitens zwei beliebige Ebenen ε und ε_1 dadurch in Beziehung zu einander setzen, dafs wir von einem beliebig im Raume gewählten Punkt $\mathfrak{O}$ Strahlen x ziehen, wovon jeder den Ebenen ε und ε_1 in zwei entsprechenden Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ begegnet, dann stehen die beiden Punktfelder ε und ε_1 rücksichtlich der entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ in einer solchen Abhängigkeit von einander, wie wir sie im vorigen Paragraphen als „kollineare Beziehung" betrachtet haben; aber die beiden Punktfelder befinden sich in

einer besonderen Lage, welche perspektivisch genannt wird. In der That, es entspricht nicht nur jedem Punkt $\mathfrak{x}$ ein einziger bestimmter Punkt $\mathfrak{x}_1$, sondern auch allen Punkten $\mathfrak{x}$, die auf einer Geraden y liegen, entsprechen Punkte $\mathfrak{x}_1$, die auf der entsprechenden Geraden y_1 liegen, weil die Ebene $[\mathfrak{O}y]$ den Träger ε_1 in der Geraden y_1 schneidet, und die von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ beschriebenen Punktreihen sind projektivisch, weil sie perspektivisch liegen. Oder, wenn wir vier beliebige Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ der Ebene ε, von denen keine drei in einer Geraden liegen, mit $\mathfrak{O}$ durch Strahlen verbinden, welche der Ebene ε_1 in den Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1$ begegnen, so dafs die ganze Beziehung durch die vier Paare entsprechender Elemente

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1 \end{matrix}$$

bestimmt wird, dann zeigt sich, dafs auch die Verbindungsstrahlen aller übrigen Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ durch denselben Punkt $\mathfrak{O}$ (Perspektivitätscentrum) laufen müssen.

Denn wegen der Projektivität:

$$\mathfrak{a}\,|\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{x}|\ \overline{\wedge}\ \mathfrak{a}_1\,|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{x}_1|$$

müssen diese beiden ebenen Strahlenbüschel in demselben Ebenenbüschel liegen, dessen Axe $|\mathfrak{O}\mathfrak{a}|$ ist, und dessen Ebenen nach den Punkten $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}$ hingehen, also mufs der Strahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$ mit dem Strahle $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ ($= |\mathfrak{O}\mathfrak{a}| = |\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1|$) in derselben Ebene liegen und, wegen der Projektivität:

$$\mathfrak{b}\,|\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{x}|\ \overline{\wedge}\ \mathfrak{b}_1\,|\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{x}_1|$$

mufs auch der Strahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$ mit dem $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ in derselben Ebene liegen; da aber $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ in einer Ebene liegen, so müssen sich alle drei Ebenen in demselben Punkte $\mathfrak{O}$ schneiden, also mufs der Strahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$ durch den Punkt $\mathfrak{O}$ gehen. Ob aber zwei allgemein in kollinearer Beziehung gegebene Ebenen ε und ε_1 sich immer in eine solche perspektivische Lage bringen lassen, ist eine Frage, die wir später beantworten werden.

Wenn man drittens die Punkte $\mathfrak{x}$ eines Punktfeldes ε mit irgend zwei aufserhalb der Ebene ε liegenden Punkten $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ durch Strahlenpaare oder die Strahlen x des Strahlenfeldes ε mit $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ durch Ebenenpaare verbindet,

so erhält man zwei kollineare Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ in solcher Abhängigkeit von einander, wie sie im vorigen Paragraphen betrachtet wurde, aber in einer besonderen Lage, welche perspektivisch genannt wird; der dem vorigen durchaus analoge Nachweis hierfür darf wohl übergangen werden; ob sich zwei allgemein gegebene kollineare Bündel immer in eine solche perspektivische Lage bringen lassen, ist ebenfalls eine Frage, die wir später beantworten werden.

Während in diesen drei Fällen die kollineare Beziehung zweier Gebilde zweiter Stufe aus der perspektivischen Lage hervorgeht, können wir auch zu der reziproken Beziehung gelangen aus einem mit der perspektivischen Lage sehr nahe zusammenhängenden Lagenverhältnis, wenn wir uns als Hilfsmittel eines uns bekannten Gebildes, des orthogonalen Polarbündels, (S. 45) bedienen.

Legt man durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ die Strahlen x eines Strahlenbündels und zu jedem Strahle x die Normalebene $\mathfrak{x}$, so bilden die Ebenen $\mathfrak{x}$ ein Ebenenbündel, und beide zusammen bilden das orthogonale Polarbündel. Zu jedem Strahle x gehört eine und nur eine Normalebene $\mathfrak{x}$ und zu jeder Ebene $\mathfrak{x}$ ein und nur ein Normalstrahl x. Die Bündel, welche x und $\mathfrak{x}$ beschreiben, stehen selbst in einer reziproken Beziehung besonders einfacher Art, indem allen Strahlen x in einer Ebene Normalebenen $\mathfrak{x}$ entsprechen, welche durch einen Strahl gehen, den Normalstrahl jener Ebene, und dieselben Winkel mit einander bilden, wie jene.

Wir wollen das Ebenenbündel $\mathfrak{x}$ das **komplementäre** Bündel des Strahlenbündels x und umgekehrt das Strahlenbündel x das komplementäre des Ebenenbündels $\mathfrak{x}$ im orthogonalen Polarbündel nennen.

Wenn wir nun eine beliebige Ebene ε und einen außerhalb derselben liegenden Punkt $\mathfrak{O}_1$ nehmen und jeden Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene ε mit $\mathfrak{O}_1$ durch einen Strahl x_1 verbinden, dessen Normalebene $\mathfrak{x}_1$ durch $\mathfrak{O}_1$ gelegt wird, dann setzen wir die Punkte $\mathfrak{x}$ der Ebene ε zu den Ebenen $\mathfrak{x}_1$ des Bündels $\mathfrak{O}_1$ in eine solche Abhängigkeit, wie sie im vorigen Paragraphen betrachtet wurde; aber die beiden Gebilde, Punktfeld und Ebenenbündel, befinden sich in einer besonderen Lage, welche der perspektivischen Lage in gewissem

Sinne verwandt ist. In der That, es entspricht nicht nur jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Ebene ε eine bestimmte Ebene ξ_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$, sondern auch allen Punkten $\mathfrak{x}$, die auf einer Geraden y liegen, entsprechen Ebenen ξ_1, die durch einen bestimmten Strahl y_1, den Normalstrahl der Ebene $[\mathfrak{O}_1 y]$, gehen, und die Punktreihe, welche $\mathfrak{x}$ beschreibt, ist mit dem von ξ_1 beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch, weil dieses projektivisch (gleich) ist mit dem von $|\mathfrak{O}_1 \mathfrak{x}|$ beschriebenen Strahlenbüschel, welches mit der Punktreihe $\mathfrak{x}$ perspektivisch liegt.

Es läfst sich auch hier ebenso leicht wie vorhin nachweisen, dafs wenn wir gemäfs der letzten Konstruktion vier unabhängige Paare entsprechender Elemente:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{matrix}$$

zur Bestimmung der projektivischen Beziehung wählen, alle übrigen Paare entsprechender Elemente derselben Konstruktion genügen. Denn sind $\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}\, \mathfrak{d}$ vier Punkte der Ebene ε, von denen keine drei in gerader Linie liegen, und werden dieselben mit $\mathfrak{O}_1$ durch die vier Strahlen $a_1\, b_1\, c_1\, d_1$ verbunden, so ist schon oben nachgewiesen, dafs ein beliebiger Punkt $\mathfrak{x}$ auf dem entsprechenden Strahle x_1 liegen mufs; sind nun $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1\, \delta_1$ die vier Normalebenen der vier Strahlen $a_1 b_1 c_1 d_1$ im Punkte $\mathfrak{O}_1$, so wird wegen der doppelten Projektivität:

$$\mathfrak{a}\, |\mathfrak{b}\, \mathfrak{c}\, \mathfrak{d}\, \mathfrak{x}| \barwedge a_1\, [b_1\, c_1\, d_1\, x_1] \barwedge \alpha_1\, |\beta_1\, \gamma_1\, \delta_1\, \xi_1|$$
$$\mathfrak{b}\, |\mathfrak{a}\, \mathfrak{c}\, \mathfrak{d}\, \mathfrak{x}| \barwedge b_1\, [a_1\, c_1\, d_1\, x_1] \barwedge \beta_1\, |\alpha_1\, \gamma_1\, \delta_1\, \xi_1|$$

die Ebene $[a_1 x_1]$ auf dem Strahle $|\alpha_1 \xi_1|$ und die Ebene $[b_1 x_1]$ auf dem Strahle $|\beta_1 \xi_1|$ normal stehen, folglich auch der Strahl x_1 auf der Ebene ξ_1; folglich genügen auch $\mathfrak{x}$ und ξ_1 der anfänglichen Konstruktion entsprechender Elemente.

In ganz analoger Weise können ferner die Punkte $\mathfrak{x}$ einer Ebene ε zu den Strahlen x_1 einer andern Ebene in Beziehung gesetzt werden, indem man zuerst die Ebenen ε und ε_1 in perspektivische Beziehung setzt durch ein Strahlenbündel $\mathfrak{O}_1$, von dem jeder Strahl x den Trägern ε und ε_1 in zwei entsprechenden Punkten begegnet, und sodann zu diesem Strahlenbündel $\mathfrak{O}_1$ das komplementäre Ebenenbündel nimmt,

von dem jede Ebene den Träger ε_1 in dem gesuchten Strahle x_1 schneidet, welcher jetzt dem Punkte $\mathfrak{x}$ der Ebene ε entspricht; dabei entsprechen gleichzeitig den Strahlen x der Ebene ε die Punkte $\mathfrak{x}_1$ der Ebene ε_1, und wir haben diejenige Beziehung, welche oben die reziproke genannt wurde, bei einer besonders einfachen Lage der Gebilde.

Endlich können wir in gleicher Weise die Strahlen x eines Bündels $\mathfrak{O}$ zu den Ebenen $\mathfrak{x}_1$ eines zweiten Bündels $\mathfrak{O}_1$ dadurch in Beziehung setzen, dafs wir von dem Ebenenbündel $\mathfrak{x}_1$ das komplementäre Strahlenbündel x_1 auffassen und von der perspektivischen Lage der beiden Strahlenbündel $\mathfrak{O}|x|$ und $\mathfrak{O}_1|x_1|$ ausgehen.

Es ist ersichtlich, dafs die in den drei letzten Fällen angenommene besondere Lage zweier reziproken Gebilde, wenn dieselben allgemein gegeben sind, immer erreicht werden kann, sobald es gelingt, die in den drei ersten Fällen betrachtete perspektivische Lage herzustellen für zwei allgemein gegebene kollineare Gebilde. Um auf diese Frage einzugehen, wollen wir zunächst für den Fall zweier kollinearen Ebenen ε und ε_1 einige ausgezeichnete Elemente derselben ermitteln, indem wir von der perspektivischen Lage ausgehen, um diese Elemente dann bei zwei kollinearen Gebilden, die allgemein gegeben sind, wiederzufinden.

Es seien ε und ε_1 die Träger zweier ebenen Punktfelder und $\mathfrak{O}$ ein beliebiger Punkt im Raume aufserhalb beider Ebenen; die Strahlen x des Strahlenbündels $\mathfrak{O}$ mögen ε und ε_1 in entsprechenden Punkten treffen, dann schneiden die Ebenen $\mathfrak{x}$ des Ebenenbündels $\mathfrak{O}$ die Träger ε und ε_1 in entsprechenden Strahlen. Durch $\mathfrak{O}$ läfst sich eine Parallelebene zu ε_1 legen, welche die Ebene ε in der Geraden r schneidet, und eine Parallelebene zu ε, welche die Ebene ε_1 in der Geraden q_1 schneidet; die beiden Geraden r und q_1 heifsen die Durchschnittslinien der Parallelebenen; sie entsprechen den unendlich-entfernten Geraden q^∞ und r_1^∞ der Träger ε und ε_1.

Suchen wir nun einen solchen Strahl durch das Projektionscentrum $\mathfrak{O}$ zu ziehen, welcher gleich geneigt ist gegen die beiden Ebenen ε und ε_1; dies wird leicht dadurch erreicht, dafs wir die durch die beiden Ebenen ε und ε_1 gebildeten Winkel und Nebenwinkel halbieren durch zwei (zu einander

rechtwinklige) Ebenen und aus dem Punkte $\mathfrak{O}$ auf jede dieser Ebenen ein Perpendikel fällen; möge das eine Perpendikel in $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$, das andere in $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{o}_1'$ den Ebenen ε und ε_1 begegnen, dann ist klar, dafs sowohl der Strahl $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1|$, als auch der Strahl $|\mathfrak{o}'\mathfrak{o}_1'|$ der Forderung genügt, zu den beiden Ebenen ε und ε_1 gleich geneigt zu sein. Bezeichnen wir den Schnittstrahl der gegebenen Ebenen ε und ε_1 in doppeltem Sinne durch s und s_1, weil in ihm zwei verschiedene Strahlen koinzidieren, dann schneiden sich auch die beiden Halbierungsebenen der Neigungswinkel zwischen $\varepsilon\varepsilon_1$ in dem Strahle $s(s_1)$ und da $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1|$ die Normale auf der einen Halbierungsebene, $\mathfrak{o}'\mathfrak{o}_1'$ die Normale auf der andern Halbierungsebene ist, $\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}'\mathfrak{o}_1'$ aber selbst in einer Ebene liegen, weil $(|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1|, |\mathfrak{o}'\mathfrak{o}_1'|) = \mathfrak{O}$ ist, so mufs diese Ebene der beiden Strahlen $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1|$ und $|\mathfrak{o}'\mathfrak{o}_1'|$ Normalebene des Schnittstrahls $s(s_1)$ sein. Es giebt nur eine solche Ebene durch $\mathfrak{O}$, welche zu $s(s_1)$ normal ist; denken wir uns diese als die Ebene des Papiers (Fig. 13), so stellen

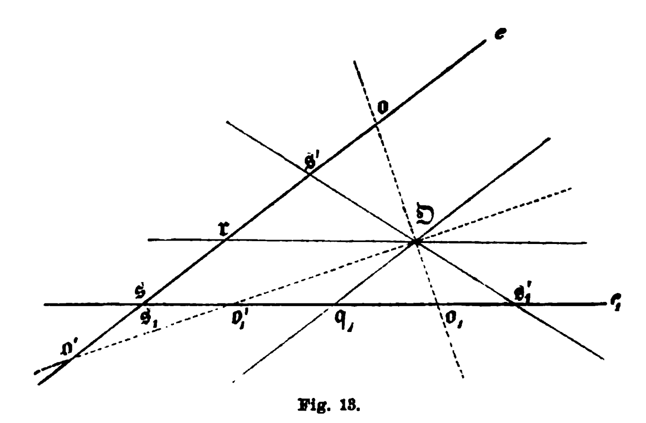


Fig. 13.

in der vorstehenden Figur e und e_1 die Durchschnittslinien mit den Ebenen ε und ε_1 dar, welche auf der Ebene des Papiers rechtwinklig stehen; der Strahl $s(s_1)$ steht in dem Durchschnittspunkt $\mathfrak{s}(\mathfrak{s}_1)$ der Geraden $e\,e_1$ normal auf der Ebene des Papiers; die durch $\mathfrak{O}$ parallel zu e und e_1 gezogenen Strahlen treffen in den Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ und die in diesen Punkten auf der Ebene des Papiers errichteten Normalen sind die Strahlen r und q_1. Die Halbierungslinien

der Winkel zwischen den Strahlen $|\mathfrak{O}\mathfrak{r}|$ und $|\mathfrak{O}\mathfrak{q}_1|$ treffen in den Punkten $\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}'\mathfrak{o}'_1$, von denen ersichtlich ist, daſs $\mathfrak{o}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{o}_1\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_1\mathfrak{o}'_1$, d. h. $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ die Mitten der Strecken $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}'_1$ sind.

Die Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}'\mathfrak{o}'_1$ sind nun von besonderer Art in den beiden kollinearen Ebenen; denn da $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1|$ gleich geneigt ist zu beiden Ebenen ε und ε_1, so wird ein Ebenenbüschel, dessen Axe $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1|$ ist, gleiche Strahlenbüschel aus den Ebenen ε und ε_1 ausschneiden. Es sind also $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$, ebenso $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{o}'_1$ die Mittelpunkte je zweier gleichen entsprechenden Strahlenbüschel in den beiden kollinearen Ebenen, und es ist ersichtlich, daſs diese die einzigen solcher Art sind, also nur zwei Paare von gleichen entsprechenden Strahlenbüscheln vorkommen; die Verbindungslinie $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}'|$ steht rechtwinklig auf r, ebenso wie die Verbindungslinie $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}'_1|$ rechtwinklig auf q_1 ist.

Ferner ist aus der perspektivischen Lage ersichtlich, daſs die koinzidierenden Strahlen s und s_1 Träger zweier gleichen entsprechenden Punktreihen in den beiden kollinearen Feldern sind und auſser diesem giebt es noch ein zweites Paar gleicher entsprechender Punktreihen s' und s'_1, die auf folgende Weise ermittelt werden:

Der unendlich-entfernte Punkt der Schnittlinie $s(s_1)$, welcher gleichzeitig der unendlich-entfernte Punkt von r und von q_1 ist, enthält zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{p}^\infty = \mathfrak{p}_1^\infty$; die unendlich-entfernten Punkte von r und q_1 sind also zwei entsprechende Punkte. Ziehen wir den Projektionsstrahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{p}^\infty| = |\mathfrak{O}\mathfrak{p}_1^\infty|$, so wird jede durch ihn gelegte Ebene die beiden Träger ε und ε_1 in zwei entsprechenden Strahlen schneiden, welche beziehungsweise parallel zu r und q_1 sind und die Träger zweier entsprechenden ähnlichen Punktreihen sein müssen, weil ihre unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{p}^\infty$ und $\mathfrak{p}_1^\infty$ entsprechende sind. Die Träger entsprechender ähnlicher Punktreihen laufen also parallel den Strahlen r und q_1, und unter diesen kommt insbesondere auſser dem Paare gleicher entsprechender Punktreihen auf s und s_1 noch ein zweites Paar gleicher entsprechender Punktreihen vor. Wir brauchen nur in der Ebene des Papiers durch $\mathfrak{O}$ denjenigen besonderen Strahl zu ziehen, für welchen $\mathfrak{O}$ in der Mitte liegt

zwischen den beiden Schnittpunkten $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}_1'$ mit e und e_1; dann werden die beiden in $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}_1'$ auf der Ebene des Papiers errichteten Senkrechten s' und s_1' dieses zweite Paar entsprechender gleicher Punktreihen sein, und es ist aus der Figur ersichtlich, dafs s und s' parallel zu r sind und gleich weit von r abstehen, ebenso wie s_1 und s_1' parallel zu q_1 sind und gleich weit von q_1 abstehen. Es giebt also zwei Paare von gleichen entsprechenden Punktreihen in den beiden kollinearen Ebenen, und die Figur zeigt unmittelbar, dafs der Abstand der beiden parallelen Geraden s und s' von einander gleich ist dem Abstand der beiden besonderen Punkte $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_1'$ von einander, während der Abstand der beiden parallelen Geraden s_1 und s_1' von einander gleich ist dem Abstand der beiden besonderen Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ von einander, indem einerseits s und s', $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ symmetrisch zu r, andererseits $\mathfrak{o}_1 \mathfrak{o}_1' s_1' s_1$ symmetrisch zu q_1 liegen und die Verbindungslinie $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}'|$ die Strahlen s und s' rechtwincklig durchschneidet, ebensowie $|\mathfrak{o}_1 \mathfrak{o}_1'|$ die Strahlen s_1 und s_1' rechtwinklig durschneidet.

Wenn man einen beliebigen Projektionsstrahl durch $\mathfrak{O}$ zieht, welcher in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ den Ebenen ε und ε_1 begegnet, und man läfst aus $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ die Perpendikel auf die Ebene des Papiers herab, so sind die Fufspunkte derselben bez. ebensoweit von den Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ entfernt, wie die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ bez. von den Strahlen r und q_1; die Fufspunkte in e und e_1 mögen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ heifsen, dann ist:

$$\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{y}}{\mathfrak{r}\mathfrak{O}} = \frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{O}}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{y}_1} \text{ oder } \mathfrak{r}\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{O} = \text{konst.}$$

d. h. das Rechteck aus den Abständen zweier entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ der beiden kollinearen Ebenen von den Durchschnittslinien der Parallelebenen (r und q_1) ist von unverändeter Gröfse.

Nennen wir dies konstante Rechteck die Potenz der kollinearen Beziehung, so ergeben sich als besondere Elementenpaare noch zwei Strahlenpaare g und g_1, h und h_1, welche die Eigenschaft besitzen, dafs g und h, die parallel zu r sind, ebenso weit von r abstehen, wie g_1 und h_1, die parallel zu q_1 laufen, von q_1 abstehen, für welche also das konstante Rechteck in ein Quadrat übergeht. Diese Strahlen-

paare sollen **Potenzstrahlen** heiſsen und lassen sich in elementarer Weise mittels des Kreises konstruieren. Die Potenzstrahlen gh und $g_1 h_1$ treffen offenbar das besondere Strahlenpaar e und e_1 in denjenigen Punkten $\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{h}_1$ welche die Potenzpunkte sind für die beiden projektivischen Punktreihen, deren Träger e und e_1 sind; auch sind für diese beiden Punktreihen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen oder die den unendlich-entfernten entsprechenden Punkte.

Wenn wir die kollineare Beziehung der beiden Ebenen ε und ε_1, welche durch die perspektivische Lage hervorgerufen wurde, und von der wir im Vorigen die wesentlichsten ausgezeichneten Elemente kennen gelernt haben, festhalten, aber den einen oder den andern Träger der beiden Gebilde um die gemeinschaftliche festbleibende Schnittlinie $s(s_1)$, beliebig drehen, so wird dadurch die perspektivische Lage nicht aufgehoben, d. h. es werden immer noch sämtliche Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{O}$ laufen; aber dieser Punkt $\mathfrak{O}$ verändert sich und zwar ist es leicht zu erkennen, wenn wir z. B. ε_1 festhalten und ε um die Schnittlinie $s(s_1)$ drehen, daſs der Ort von $\mathfrak{O}$ ein Kreis ist, welcher um den Punkt $\mathfrak{q}_1$ als Mittelpunkt beschrieben wird in einer Ebene, die normal steht auf der Ebene ε_1; ähnlich ist es, wenn wir ε festhalten und ε_1 drehen. Es geht hieraus hervor, daſs die **perspektivische Lage unabhängig ist von der Neigung der beiden Ebenen** ε und ε_1 zu einander, vielmehr als notwendige und hinreichende Bedingung erfordert, daſs in der Schnittlinie beider Träger zwei gleiche entsprechende Punktreihen identisch vereinigt liegen.

§ 42. Besondere Elemente zweier kollinearen Ebenen. Zurückführung auf die perspektivische Lage.

Die im vorigen Paragraphen vermittelst der perspektivischen Lage gefundenen ausgezeichneten Elemente zweier kollinearen Ebenen finden sich nun auch wieder, wenn wir uns die Gebilde allgemein etwa durch vier beliebige von einander unabhängige Elementenpaare gegeben denken.

Es seien

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1 \end{matrix}$$

vier Paare entsprechender Punkte der beiden kollinearen Ebenen ε und ε_1, von denen keine drei in gerader Linie liegen. Wir haben oben die allgemeine Konstruktion angegeben, um zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Ebene ε den entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}_1$ der Ebene ε_1 zu ermitteln. Demnach können wir auch zu den sämtlichen unendlich entfernten Punkten der Ebene ε_1 die entsprechenden Punkte der Ebene ε konstruieren, und da jene auf einer Geraden r_1^∞ liegen, so müssen diese auf der entsprechenden Geraden r liegen. Ebenso konstruieren wir zu der unendlich-entfernten Geraden q^∞ der Ebene ε die entsprechende Gerade q_1 der Ebene ε_1 und haben dadurch die Durchschnittslinien der Parallelebenen

$$r \text{ und } q_1$$

gefunden; diese werden im allgemeinen bestimmte im Endlichen liegende Strahlen der Ebenen ε und ε_1 sein. Die besondere Annahme, dafs sie selbst in die Unendlichkeit fallen (Affinität), wollen wir später betrachten. Der unendlich-entfernte Punkt der Geraden r mufs seinen entsprechenden Punkt auf der Geraden r_1^∞ haben, und da er zugleich auf q^∞ liegt, so mufs der entsprechende Punkt gleichzeitig auf q_1 liegen; also die unendlich-entfernten Punkte der Geraden r und q_1 sind entsprechende Punkte der beiden kollinearen Ebenen; wir wollen sie bezeichnen mit

$$\mathfrak{p}^\infty = (r, q^\infty) \text{ und } \mathfrak{p}_1^\infty = (r_1^\infty, q_1);$$

sie sind die einzigen beiden unendlich-entfernten Punkte der kollinearen Ebenen, welche einander entsprechen; jeder Geraden, welche zu r parallel ist, mufs daher eine Gerade entsprechen, welche zu q_1 parallel läuft, und solche zwei entsprechende Strahlen müssen die Träger zweier projektivisch-ähnlichen Punktreihen sein, weil ihre unendlich-entfernten Punkte einander entsprechen; andere entsprechende Strahlen, die Träger ähnlicher Punktreihen wären, können nicht vorkommen, weil es nur jenes einzige Paar entsprechender unendlich-entfernter Punkte $(\mathfrak{p}^\infty \mathfrak{p}_1^\infty)$ giebt. Unter den ähn-

lichen Punktreihen können aber auch gleiche vorkommen, die wir aufsuchen wollen.

Denken wir uns zunächst in der Ebene ε alle Strahlen, die rechtwinklig zu r gerichtet sind, also ein Parallelstrahlenbüschel, dessen unendlich-entfernter Punkt $\mathfrak{q}^\infty$ in einer zu der Richtung von $\mathfrak{p}^\infty$ rechtwinkligen Richtung liegt; dann entsprechen diesen parallelen Strahlen in der Ebene ε_1 solche, die alle durch einen bestimmten Punkt $\mathfrak{q}_1$ der Geraden q_1 laufen, der nämlich dem Punkte $\mathfrak{q}^\infty$ entspricht; $\mathfrak{q}_1$ wird im allgemeinen ein im Endlichen auf der Geraden q_1 liegender Punkt sein. Durch $\mathfrak{q}_1$ geht eine einzige bestimmte Gerade e_1, welche auf q_1 normal steht, und dieser entspricht in der Ebene ε eine bestimmte Gerade e, die unter dem vorigen Parallelstrahlenbüschel eine besondere Stelle einnimmt; die Gerade e treffe r in dem Punkte $\mathfrak{r}$; dann entspricht dem Punkte $\mathfrak{r} = (er)$ der Punkt $\mathfrak{r}_1^\infty = (e_1 r_1^\infty)$, d. h. der unendlich-entfernte Punkt der Geraden e_1. Wenn wir also andererseits in der Ebene ε_1 ein Büschel von parallelen Strahlen, die auf q_1 rechtwinklig stehen, gezogen hätten, so würde demselben in der Ebene ε ein Strahlenbüschel entsprochen haben, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{r}$ ist.

Die ausgezeichneten Strahlen e und e_1, welche einander entsprechen und außerdem normal stehen bez. auf r und q_1 in den Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$, sind die einzigen ihrer Art, wie hieraus erhellt; die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ sind die den unendlich-entfernten von ee_1 entsprechenden Punkte. Denken wir uns nun (Fig. 14) in einem beliebigen Abstande α zwei Parallele zu e gezogen, die Strahlen x und x', so entsprechen ihnen in der Ebene ε_1 zwei Strahlen x_1 und x'_1, die durch $\mathfrak{q}_1$ gehen und gleich geneigt sind zu e_1; denn da die vier Strahlen $x\,x'\,e\,q^\infty$ harmonisch liegen, so müssen auch die vier Strahlen $x_1\,x_1\,e_1\,q_1$ harmonisch liegen, und da e_1 zu q_1 rechtwinklig ist, so müssen e_1 und q_1 die Winkel zwischen x_1 und x'_1 halbieren. Denken wir uns ferner in dem gleichen Abstande α zwei Parallele y_1 und y'_1 zu e_1 gezogen, so entsprechen denselben in der Ebene ε zwei Strahlen y und y' durch $\mathfrak{r}$, die gleich geneigt sind zu e und r. Wir erhalten dadurch in jeder der beiden Ebenen ε und ε_1 ein Parallelogramm, und die Ecken dieser beiden Parallelogramme sind einander entsprechende Punkte:

$$(x\,y) \quad (x\,y') \quad (x'\,y) \quad (x'\,y')$$
$$(x_1\,y_1) \quad (x_1 y_1') \quad (x_1'\,y_1) \quad (x_1'\,y_1')$$

so zwar, daſs in dem Parallelogramm der Ebene ε x und x' ein Paar paralleler Seiten, y und y' die Diagonalen, dagegen

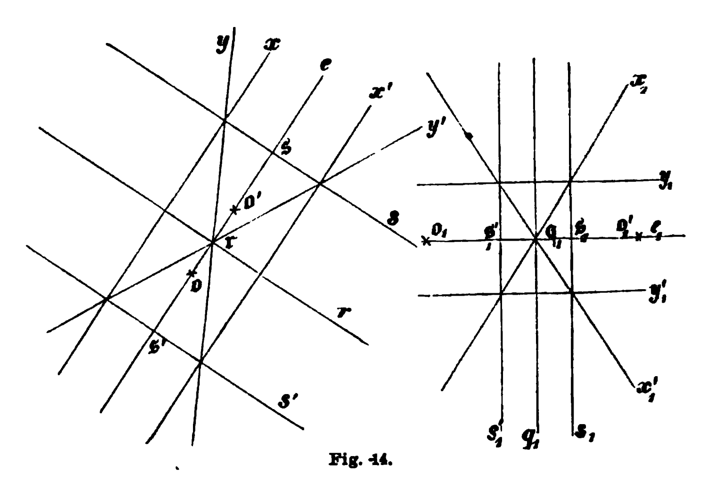


Fig. 44.

in dem Parallelogramm der Ebene ε_1 y_1 und y_1' ein Paar paralleler Seiten und x_1 x_1' die Diagonalen sind. Jedes dieser Parallelogramme hat noch ein zweites Paar paralleler Seiten, die einander entsprechen:

$$s \text{ und } s'$$
$$s_1 \text{ und } s_1',$$

die ersteren laufen parallel zu r, die letzteren parallel zu q_1; es sind daher sowohl s und s_1, als auch s' und s_1' Träger entsprechender ähnlicher Punktreihen; da aber die beiden Parallelogramme eine Seite gleich haben ($=\alpha$), so besitzt jedes der beiden Paare entsprechender ähnlicher Punktreihen ein Paar entsprechender gleicher Strecken, folglich sind die Punktreihen projektivisch-gleich. Wir haben also zwei Paare entsprechender gleicher Punktreihen:

$$s \text{ und } s_1, \quad s' \text{ und } s_1'$$

in den beiden kollinearen Feldern ε und ε_1 gefunden, wobei im allgemeinen der Abstand der Strahlen s und s' von einander ein anderer sein wird, als der Abstand der Strahlen

s_1 und s_1' von einander. Es ist auch unmittelbar ersichtlich, dass diese beiden Strahlenpaare die einzigen Träger entsprechender gleicher Punktreihen sind und keine andern weiter vorkommen, denn auf irgend einer andern zu q_1 parallel gezogenen Geraden wird durch die Strahlen $x_1\,x_1'$ eine Strecke abgeschnitten, welche verschieden ist von der Strecke, die auf der entsprechenden Geraden durch die parallelen Strahlen $x\,x'$ abgeschnitten wird.

Begegnen die Strahlen $s\,s'$ dem Strahle e in den Punkten $\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'$ und die Strahlen $s_1\,s_1'$ dem Strahle e_1 in den Punkten $\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_1'$, so sind auf den Trägern e und e_1 die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ die den unendlich-entfernten entsprechenden Punkte und aufserdem $\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}'\,\mathfrak{z}_1'$ zwei Paare entsprechender Punkte, also die konstante Potenz der projektivischen Beziehung:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{z}\,.\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{z}_1\,.$$

Wenn wir nun auf der Geraden e die Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ so bestimmen, dafs sie nach beiden Seiten von $\mathfrak{r}$ gleich weit um eine Strecke $= \mathfrak{q}_1\mathfrak{z}_1$ abstehen, so werden die entsprechenden Punkte $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_1'$ von $\mathfrak{q}_1$ nach entgegengesetzten Seiten hin gleich weit um eine Strecke $= \mathfrak{r}\mathfrak{z}$ abstehen. Diese beiden besonderen Punktepaare:

$$\mathfrak{o} \text{ und } \mathfrak{o}_1\,, \quad \mathfrak{o}' \text{ und } \mathfrak{o}_1'$$

besitzen die Eigenschaft, dafs sie die Mittelpunkte entsprechender gleicher Strahlenbüschel in den beiden kollinearen Ebenen sind, denn nehmen wir auf s und s_1 irgend zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$, so ist $\mathfrak{z}\mathfrak{x} = \mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1$, ferner ist nach der Konstruktion der Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1\mathfrak{o}_1$$

und die beiden bei $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ rechtwinkligen Dreiecke $\mathfrak{o}\mathfrak{z}\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{o}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1$ sind kongruent, folglich der Winkel, welchen die Strahlen $\mathfrak{o}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{o}\mathfrak{x}$ bilden, gleich dem Winkel, welchen die entsprechenden Strahlen $\mathfrak{o}_1\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}_1$ mit einander einschliefsen, und da dies für alle Punktepaare $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ der Strahlen $s\,s_1$ gilt, so sind die entsprechenden Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1$ sind, einander gleich; dasselbe gilt für die Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{o}_1'$. Wir haben also zwei Paare entsprechender gleicher Strahlenbüschel:

$$\mathfrak{o} \text{ und } \mathfrak{o}_1, \quad \mathfrak{o}' \text{ und } \mathfrak{o}'_1$$

in den beiden kollinearen Feldern ε und ε_1 gefunden; die Verbindungslinien $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}'|$ und $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}'_1|$ sind die vorhin gefundenen besonderen Strahlen e und e_1, welche bez. auf r und q_1 rechtwinklig stehen. Es geht aus der Konstruktion hervor, dafs dies die einzigen beiden Punktepaare sind, welche entsprechende gleiche Strahlenbüschel der beiden kollinearen Felder liefern.

Verwandeln wir endlich das konstante Rechteck:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{o}_1$$

in ein Quadrat und ziehen in einem Abstande gleich der Seite dieses Quadrats zwei Parallele g und h zu dem Strahle r, so werden die entsprechenden Strahlen g_1 und h_1 der Ebene ε_1 parallel zu q_1 laufen in demselben Abstande von q_1, wie g und h von r, und wir haben die Potenzstrahlen:

$$g \text{ und } g_1, \quad h \text{ und } h_1$$

der beiden kollinearen Ebenen. Dadurch sind sämtliche ausgezeichneten Elemente der kollinearen Ebenen ε und ε_1 wiedergefunden, welche wir früher aus der perspektivischen Lage heraus ermittelt haben.

Umgekehrt lassen sich nun die allgemein gegebenen beiden kollinearen Ebenen leicht in perspektivische Lage bringen. Wir brauchen sie nämlich nur im Raume so zu stellen, dafs ein Paar entsprechender gleicher Punktreihen, also entweder diejenigen, deren Träger s und s_1, oder diejenigen, deren Träger s' und s'_1 sind, in der Schnittlinie der Ebenen $\varepsilon\,\varepsilon_1$ identisch vereinigt liegen, dann werden die kollinearen Ebenen immer in perspektivischer Lage sich befinden, welches auch ihre Neigung zu einander sei. Denn bringen wir die gleichen projektivischen Punktreihen auf s und s_1 in der Schnittlinie $|\varepsilon\varepsilon_1|$ zur Koinzidenz, so fallen die Punkte $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ zusammen, folglich schneiden sich in diesem Punkte die Strahlen e und e_1, also liegen die vier Punkte $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'\,\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}'_1$ in einer Ebene, und es treffen sich die Strahlen $|\mathfrak{o}\mathfrak{o}_1|$ und $|\mathfrak{o}'\mathfrak{o}'_1|$ in einem Punkte $\mathfrak{O}$; nehmen wir noch auf $s(s_1)$ irgend zwei koinzidierende Punkte $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}_1)$ und $\mathfrak{b}(\mathfrak{b}_1)$, so haben wir einerseits vier von einander unabhängige Paare entsprechender Punkte:

$$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{o} \quad \mathfrak{o}'$$
$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{o}_1 \quad \mathfrak{o}_1',$$

welche die kollineare Beziehung vollständig bestimmen, und andererseits koinzidieren, die beiden Strahlenquadrupel, welche von $\mathfrak{O}$ aus nach dem ersten Punktquadrupel und nach dem zweiten Punktquadrupel hingehen; folglich müssen auch die ganzen Strahlenbündel, welche von $\mathfrak{O}$ aus nach den beiden Strahlenfeldern hingehen, identisch zusammenfallen, d. h. die kollinearen Felder liegen perspektivisch (S. 356). Wir haben also folgendes Resultat:

Es lassen sich zwei allgemein gegebene kollineare Ebenen allemal auf zwei wesentlich verschiedene Arten in perspektivische Lage bringen, indem entweder das eine Paar $s\,s_1$ oder das andere Paar $s'\,s_1'$ entsprechender gleicher Punktreihen in der Schnittlinie beider Ebenen zur Deckung gebracht wird; dann können die Ebenen selbst noch um die festgehaltene Schnittlinie beliebig gedreht werden, ohne dafs die perspektivische Lage aufhört. Hält man eine der beiden Ebenen fest und dreht die andere, so beschreibt das Perspektivitätszentrum einen Kreis, dessen Ebene normal steht auf der festgehaltenen Ebene, in welcher auch der Mittelpunkt des Kreises liegt; bei dieser Drehung können die Ebenen zweimal zur Deckung kommen; in dem einen Falle gelangen die ausgezeichneten Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$, in dem andern die Punkte $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{o}_1'$ zur Deckung, so dafs also die beiden koinzidierenden Ebenen in jedem der beiden Fälle, welche auch als perspektivische Lage aufzufassen sind, je einen einzelnen Doppelpunkt und eine Doppelgerade mit zwei identischen entsprechenden Punktreihen gemein haben.

Die vorige Untersuchung läfst sich auch als besondere Aufgabe so aussprechen:

Es sind zwei beliebige ebene Vierecke $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ entsprechend gegeben; die Ebenen derselben sollen im Raume so gestellt werden, dafs die vier Verbindungsstrahlen $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1|$, $|\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1|$ durch einen und denselben Punkt laufen.

Die Lösung derselben ist im Obigen enthalten.

§ 43. Zusammenfallende kollineare Ebenen. Doppelelemente.

Es ist eine fundamentale Frage, deren Beantwortung für die folgenden Betrachtungen unerläfslich ist:

Wenn zwei kollineare Ebenen mit ihren Trägern beliebig auf einander gelegt werden, giebt es Punkte und Strahlen, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen, und wie findet man solche Doppelelemente?

Sei die kollineare Beziehung der beiden Ebenen ε und ε_1 durch irgend vier von einander unabhängige Paare entsprechender Punkte:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1 \end{matrix}$$

gegeben und die Konstruktion eines beliebigen Paares entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ durch die beiden Paare projektivischer Strahlenbüschel:

$$\mathfrak{a}\,|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}| \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{a}_1\,|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{x}_1|$$
$$\mathfrak{b}\,|\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}| \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{b}_1\,|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{x}_1|$$

hergestellt, so würden, wenn wir die Träger der beiden Ebenen ε und ε_1 auf einander legen, alle vier Strahlenbüschel in derselben Ebene enthalten sein; sobald es nun vorkommt, dafs der Schnittpunkt zweier Strahlen $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{x}|$ mit dem Schnittpunkt der Strahlen $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}_1|$ und $|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{x}_1|$ zusammenfällt, d. h. alle vier Strahlen in demselben Punkte sich schneiden, so oft werden zwei entsprechende Punkte der beiden kollinearen Felder koinzidieren und umgekehrt.

Drehen wir um $\mathfrak{a}$ einen veränderlichen Strahl $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}|$, welcher ein Strahlenbüschel $(\mathfrak{a})$ beschreibt, so wird der entsprechende Strahl $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}_1|$ wegen der ersten Projektivität ein mit dem Strahlenbüschel $(\mathfrak{a})$ projektivisches Strahlenbüschel $(\mathfrak{a}_1)$ beschreiben und der Ort des Schnittpunktes $(|\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}|, |\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}_1|)$ ist das Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüschel, d. h. ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}^{(2)}$. Drehen wir um $\mathfrak{b}$ einen veränderlichen Strahl $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{x}|$, so beschreibt $|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{x}_1|$ in gleicher Weise ein Strahlenbüschel, welches mit dem von $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{x}|$ beschriebenen projektivisch ist; der Ort des Schnittpunktes $(|\mathfrak{b}\,\mathfrak{x}|, |\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{x}_1|)$ ist daher ein

zweiter Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{b}}^{(2)}$, und die beiden Kegelschnitte haben offenbar einen Punkt gemeinschaftlich, nämlich den Schnittpunkt:

$$(|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|) = (|\mathfrak{b}\mathfrak{a}|, |\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1|),$$

welcher ersichtlich kein Doppelpunkt ist. Außer diesem Punkte haben die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{b}}^{(2)}$ im allgemeinen noch drei Punkte gemeinschaftlich, die entweder alle drei reell sind, oder von denen einer reell ist und die beiden anderen konjugiert-imaginär auf einer reellen Geraden liegen. Jeder dieser drei Punkte besitzt die verlangte Eigenschaft, daſs sich in ihm vier Strahlen $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{x}|$, $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1|$, $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1|$ schneiden, ist also ein Doppelpunkt.

Die Konstruktion der drei Doppelpunkte ergiebt sich, sobald die beiden kollinearen Ebenen durch vier Punktepaare:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1 \end{matrix}$$

auf einander bezogen werden, folgendermaſsen:

Man lege durch die fünf Punkte:

$$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{a}_1 \quad (|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|) \quad (|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|, |\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1|) \quad (|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|, |\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1|)$$

einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}^{(2)}$ und durch die fünf Punkte:

$$\mathfrak{b} \quad \mathfrak{b}_1 \quad (|\mathfrak{b}\mathfrak{a}|, |\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1|) \quad (|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|, |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|) \quad (|\mathfrak{b}\mathfrak{d}|, |\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1|)$$

einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{b}}^{(2)}$; diese beiden Kegelschnitte haben außer dem Punkte $(|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|)$ noch drei andere gemeinschaftliche Punkte, welche die gesuchten Doppelpunkte sind.

Es versteht sich von selbst, daſs auch der durch die fünf Punkte:

$$\mathfrak{c} \quad \mathfrak{c}_1 \quad (|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|, |\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1|) \quad (|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|, |\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1|) \quad (|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|, |\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1|)$$

gelegte Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{c}}^{(2)}$ und der durch die fünf Punkte:

$$\mathfrak{d} \quad \mathfrak{d}_1 \quad (|\mathfrak{d}\mathfrak{a}|, |\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1|) \quad (|\mathfrak{d}\mathfrak{b}|, |\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}_1|) \quad (|\mathfrak{d}\mathfrak{c}|, |\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1|)$$

gelegte Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{d}}^{(2)}$ durch dieselben drei Doppelpunkte gehen muſs, woraus ein geometrischer Satz folgt.

Ferner ist ersichtlich, wenn wir die drei Doppelpunkte der zusammenfallenden kollinearen Ebenen durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_1 \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 \text{ bezeichnen,}$$

daſs die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ zu ihrem entsprechenden Strahl $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1|$ hat, d. h. mit demselben zusammenfällt; die Seiten des Dreiecks, welches von den drei Doppelpunkten gebildet wird, sind also drei Doppelstrahlen der beiden kollinearen Ebenen, und zwar sind dies im allgemeinen die einzigen, welche vorkommen können; denn führen wir die dual-gegenüberstehende Betrachtung aus, indem wir die kollineare Beziehung durch vier Paare entsprechender Strahlen fixieren, so zeigt sich, daſs nur drei solche Doppelstrahlen im allgemeinen vorhanden sind, die daher mit den vorigen Dreiecksseiten identisch sein müssen. Da notwendig eine und der Schnittpunkt der beiden andern reell ist, so stimmt dies Resultat mit dem vorigen überein und wir können sagen:

Werden zwei kollineare Ebenen ε und ε_1 mit ihren Trägern beliebig auf einander gelegt, so fällt immer ein reelles Paar entsprechender Punkte und ein reelles Paar entsprechender Strahlen auf einander; ist ersteres $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und letzteres xx_1, so sind $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ die Mittelpunkte zweier entsprechenden konzentrischen Strahlenbüschel; und xx_1 die Träger zweier entsprechenden zusammenfallenden Punktreihen; jene haben ein reelles oder konjugiert-imaginäres Paar Doppelstrahlen, diese ein reelles oder konjugiert-imaginäres Paar Doppelpunkte, die auf den vorigen Doppelstrahlen liegen; bezeichnen wir die Doppelstrahlen durch $y = y_1$ und $z = z_1$, welche bez. in den Doppelpunkten $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_1$ dem Doppelstrahl $x = x_1$ begegnen, so sind die Ecken des dadurch erhaltenen Dreiecks die drei Doppelpunkte, die Seiten desselben die drei Doppelstrahlen der beiden kollinearen Ebenen. Die beiden kollinearen zusammenfallenden Ebenen haben also im allgemeinen drei Doppelpunkte und drei Doppelstrahlen, die Ecken und Seiten desselben Dreiecks sind; dieses ist entweder ganz reell, oder hat nur

eine Ecke und die gegenüberliegende Seite reell, während die übrigen Ecken und Seiten konjugiert-imaginär sind.

Wir bemerken noch, dafs, sobald einer der drei Doppelpunkte gefunden ist, die Gerade, auf welcher die beiden übrigen liegen, linear zu konstruieren sein wird, indem man für zwei gegebene Kegelschnitte, von denen zwei gemeinschaftliche Punkte bekannt sind, die andere gemeinschaftliche Sekante zu suchen hat (Th. d. K. S. 238).

Eine Ausnahme hiervon macht der besondere Fall, welcher eintritt, wenn die beiden projektivischen Punktreihen, welche auf dem einen immer reellen Doppelstrahl $x = x_1$ liegen, identisch zusammenfallen, also auch die beiden projektivischen Strahlenbüschel, die ihren Mittelpunkt in dem reellen Doppelpunkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1$ haben, identisch auf einander liegen. Dann haben die beiden zusammenliegenden kollinearen Ebenen ε und ε_1 unendlich viele Doppelpunkte und unendlich viele Doppelstrahlen; die ersteren liegen sämtlich auf dem Doppelstrahle $x = x_1$, die letzteren gehen sämtlich durch den Doppelpunkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1$; diese selbst bilden noch je ein isoliert liegendes Paar Doppelpunkte und Doppelstrahlen. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $x\, x_1$ eines der beiden besonderen Paare entsprechender gleicher Punktreihen $s\, s_1$, also $\mathfrak{x}\, \mathfrak{x}_1$ eines der beiden besonderen Paare von Mittelpunkten entsprechender gleicher Strahlenbüschel $\mathfrak{o}\, \mathfrak{o}_1$ ist, welche wir oben (S. 366 u. 367) ermittelt haben; dies ist ein besonderer Fall von perspektivischer Lage, denn wir erkennen leicht, wenn wir irgend einen Punkt $\mathfrak{p}$ der Ebene ε mit dem Doppelpunkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1$ verbinden, dafs der entsprechende Punkt $\mathfrak{p}_1$, weil $|\mathfrak{p}\mathfrak{x}|$ ein Doppelstrahl ist, auch auf demselben liegen mufs; also: die Verbindungslinien aller Paare entsprechender Punkte laufen durch einen festen Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1$, und ebenso liegen die Schnittpunkte aller Paare entsprechender Strahlen auf einer festen Geraden $x = x_1$. In diesem Falle müssen auch die beiden Vierecke $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1 \end{matrix}\right\}$ eine solche besondere Lage haben, dafs nicht blofs die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken durch einen und denselben Punkt laufen, sondern auch die

Schnittpunkte ihrer entsprechenden Seiten auf einer und derselben Geraden liegen.

In diesem Falle müssen also die vorhin ermittelten Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{b}}^{(2)}$ in Linienpaare zerfallen, die eine Gerade gemeinschaftlich haben. Endlich ist noch der ganz specielle Fall denkbar, daſs die beiden oben ermittelten Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{b}}^{(2)}$, ohne zu zerfallen, identisch auf einander liegen. Da alsdann vier Punkte, von denen keine drei in gerader Linie liegen, mit ihren entsprechenden koinzidieren, so müssen die beiden kollinearen Felder ganz koinzidieren, d. h. identisch auf einander liegen, so daſs jeder Punkt als Doppelpunkt und jeder Strahl als Doppelstrahl anzusehen ist.

Wir können zu dem obigen allgemeinen Resultat auch durch folgende andere Betrachtung gelangen:

Seien ε und ε_1 zwei kollineare Felder, deren Ebenen beliebig auf einander gelegt werden, dann wird jede Gerade in doppeltem Sinne aufzufassen sein, nämlich einmal als der Ebene ε angehörig, $= l$, und zweitens als der Ebene ε_1 angehörig, $= g_1$, mithin

$$l = g_1.$$

Der Geraden l entspricht nun in der Ebene ε_1 eine einzige bestimmte Gerade l_1 und der Geraden g_1 entspricht vermöge der kollinearen Beziehung in der Ebene ε eine einzige bestimmte Gerade g; dem Schnittpunkte

$$\mathfrak{p} = (lg)$$

entspricht der Schnittpunkt

$$\mathfrak{p}_1 = (l_1 g_1)$$

und dies ist das einzige Paar entsprechender Punkte auf dem willkürlich gewählten Träger $l = g_1$; denn wäre noch ein zweites Paar entsprechender Punkte auf ihm vorhanden, so müſste er ein sich selbst entsprechender Strahl (Doppelstrahl) sein, was offenbar nicht der Fall ist, da er ganz beliebig gewählt war. Wir können also sagen:

Jede beliebige Gerade in der Ebene zweier zusammenliegenden kollinearen Felder enthält ein einziges, immer reelles Paar entsprechender Punkte.

Wenn wir jetzt die willkürlich angenommene Gerade $l = g_1$ um einen beliebig in ihr festgehaltenen Punkt drehen, der in beiderlei Sinn aufgefafst durch $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1$ bezeichnet werde, so ist leicht zu erkennen, wie das Punktepaar $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1)$ sich bei dieser Drehung verändert. Es wird offenbar wegen der kollinearen Beziehung l_1 sich um einen festen Punkt $\mathfrak{a}_1$ drehen und ein mit dem von l beschriebenen projektivisches Strahlenbüschel beschreiben; ebenso wird g sich um einen festen Punkt $\mathfrak{b}$ drehen und ein zweites projektivisches Strahlenbüschel beschreiben; der Punkt $\mathfrak{p} = (lg)$ durchläuft also einen Kegelschnitt und der Punkt $\mathfrak{p}_1 = (l_1 g_1)$ einen zweiten Kegelschnitt; beide haben den Punkt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1$ gemeinschaftlich, und jeder durch $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1)$ gezogene Strahl schneidet die beiden Kegelschnitte in dem Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1$. Da die beiden Kegelschnitte sich aufser in dem angenommenen Punkte $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1)$ im allgemeinen noch in drei andern Punkten schneiden, so kommt es dreimal vor, dafs zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1$ zusammenfallen; dies sind die drei gesuchten Doppelpunkte der beiden zusammenliegenden kollinearen Ebenen, ihre Verbindungslinien die drei Doppelstrahlen. Wenn insbesondere der Punkt $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1)$ mit den beiden Punkten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$ in einer Geraden liegt, so ist dies eine Doppelgerade; die beiden Kegelschnitte zerfallen in Linienpaare, deren einer Teil diese Doppelgerade und die beiden andern Teile die beiden andern Doppelstrahlen sind. Fallen ganz insbesondere diese beiden zusammen, so haben wir den obigen perspektivischen Fall, und sind die beiden Kegelschnitte, ohne zu zerfallen, identisch, so liegen die beiden kollinearen Ebenen identisch auf einander. Wir haben also die obigen Resultate vollständig wiedergefunden.*)

*) Wir gelangen hierbei zugleich zu einer gewissen Verwandtschaft zwischen den Punkten der Ebene und den Strahlen derselben, wenn wir der willkürlich gewählten Geraden $l = g_1$ den einzigen bestimmten Schnittpunkt der entsprechenden Geraden $\mathfrak{P} = (l_1 g)$ zuordnen. Dann entspricht jedem Strahl in der Ebene ein einziger bestimmter Punkt derselben; dreht sich der Strahl um einen festen Punkt, so beschreibt der entsprechende Punkt einen Kegelschnitt, der durch drei feste Punkte der Ebene geht. Jedem Punkte der Ebene entspricht also ein Kegelschnitt; bewegt sich der Punkt auf einer geraden Linie, so durchläuft der entsprechende Kegelschnitt ein Büschel mit vier

Mit der von uns gelösten Aufgabe sind zugleich einige andere gelöst, deren Ergebnisse wir im Folgenden brauchen; zunächst die dual-gegenüberstehende:

Bei zwei kollinearen Bündeln, die denselben Mittelpunkt $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_1$ haben, kommt es im allgemeinen dreimal vor, dafs zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, und dreimal, dafs zwei entsprechende Ebenen zusammenfallen; das Dreikant der drei Doppelstrahlen und das Dreiflach der drei Doppelebenen fallen zusammen. Von diesem Dreikant und Dreiflach sind entweder sämtliche Kanten und Flächen reell oder nur eine Kante und die gegenüberliegende Fläche, die beiden andern Paare aber konjugiert-imaginär. Es kann aber auch vorkommen, dafs die beiden konzentrischen kollinearen Bündel unendlich viele Doppelstrahlen und unendlich viele Doppelebenen haben (perspektivische Lage); von jenen liegt alsdann einer isoliert und durch ihn gehen nur Doppelebenen; alle übrigen sind dagegen in einer Ebene enthalten, welche selbst eine isolierte Doppelebene ist. Sind endlich die beiden konzentrischen Bündel identisch, so ist jeder Strahl in ihnen Doppelstrahl und jede Ebene Doppelebene.

Wenn wir andererseits ein ebenes Punktfeld ε und ein mit demselben kollineares Strahlenbündel $\mathfrak{O}_1$ nehmen, so wird die Frage, ob gewisse Punkte $\mathfrak{x}$ in den ihnen entsprechenden Strahlen x_1 liegen, auf die oben gelöste Frage zurückführen. Denn denken wir uns den Träger des Punktfeldes ε doppelt, d. h. gleichzeitig als Träger ε_1 eines zweiten Punktfeldes $\mathfrak{x}_1$, welches die Strahlen x_1 des Strahlenbündels $\mathfrak{O}_1$ auf ihm bestimmen, so ist die vorgelegte Frage mit der früheren identisch, ob die zusammenfallenden kollinearen Ebenen ε und ε_1

---

festen Grundpunkten, nämlich den vorigen drei festen Punkten (den einzigen in der Ebene, für welche eine Gerade durch den ihr entsprechenden Punkt geht) und aufserdem demjenigen als vierten Punkt, welcher der Geraden entspricht, auf der der ursprüngliche Punkt sich bewegt. Diese Verwandtschaft hängt nahe zusammen mit der bekannten Steinerschen Verwandtschaft (Th. d. K. S. 302), auf welche die Betrachtung eines Kegelschnittbüschels führt.

Doppelelemente haben. Wir können also folgendes Resultat aussprechen:

Wenn ein ebenes Punktfeld ε und ein mit demselben kollineares Strahlenbündel $\mathfrak{O}_1$ beliebig im Raume liegen, so kommt es im allgemeinen dreimal vor, dafs ein Punkt $\mathfrak{x}$ des Punktfeldes in dem ihm entsprechenden Strahle x_1 des Strahlenbündels liegt, und dreimal, dafs eine Gerade der Ebene ε in der ihr entsprechenden Ebene des Bündels $\mathfrak{O}_1$ liegt. Diese drei Strahlen sind die Seiten des von jenen drei Punkten gebildeten Dreiecks. Ecken und Seiten dieses Dreiecks sind entweder sämtlich reell, oder nur eine Ecke und die gegenüberliegende Seite sind reell, die beiden anderen Paare aber konjugiert-imaginär. Es kann aber auch vorkommen, dafs unendlich viele Punkte der Ebene ε in den ihnen entsprechenden Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}_1$ und unendlich viele Gerade der Ebene ε in den ihnen entsprechenden Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}_1$ liegen (ohne dafs sämtliche Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen); in diesem besonderen Falle liegt ein Punkt der Ebene ε, durch welchen sein entsprechender Strahl geht, isoliert und alle übrigen auf einer Geraden; durch ersteren gehen alle Strahlen, deren entsprechende Ebenen durch sie selbst gehen, in letzterer liegen alle Punkte, deren entsprechende Strahlen durch sie selbst gehen; sie ist daher selbst ein isolierter Strahl der Ebene ε, dessen entsprechende Ebene im Bündel $\mathfrak{O}_1$ durch ihn geht.

§ 44. Zwei kollineare Bündel in perspektivischer Lage; die ausgezeichneten Elemente derselben.

Nehmen wir eine beliebige Ebene ε und zwei aufserhalb derselben liegende Punkte $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ im Raume, so liefert jeder Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene mit $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ verbunden zwei entsprechende Strahlen $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{x}| = x$, $|\mathfrak{O}_1\,\mathfrak{x}| = x_1$, und jede Gerade g der Ebene ε mit $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ durch Ebenen verbunden zwei entsprechende Ebenen ξ und ξ_1 der beiden Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$, welche in perspektivischer Lage sich befinden und dadurch in kollineare Beziehung gesetzt werden (S. 356). Denn nehmen

wir irgend vier Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ der Ebene ε, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und bestimmen durch die vier Paare entsprechender Strahlen:

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{matrix}$$

die ganze kollineare Beziehung, so ist unmittelbar einzusehen, dafs alle übrigen Paare entsprechender Strahlen $x\,x_1$ sich in Punkten $\mathfrak{x}$ der Ebene ε treffen müssen. Aus der Projektivität:

$$a\,[b\,c\,d\,x] \;\overline{\wedge}\; a_1\,[b_1\,c_1\,d_1\,x_1]$$

folgt nämlich, weil die drei Ebenenpaare $[a\,b]$, $[a_1\,b_1]$; $[a\,c]$, $[a_1 c_1]$; $[a\,d]$, $[a_1\,d_1]$ sich in den drei Strahlen $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ einer Ebene schneiden, dafs auch das Ebenenpaar $[a\,x]$, $[a_1\,x_1]$ sich in einer Geraden der Ebene ε schneiden mufs (S. 8) und aus der Projektivität der Ebenenbüschel:

$$b\,[a\,c\,d\,x] \;\overline{\wedge}\; b_1\,[a_1\,c_1\,d_1\,x_1]$$

folgt, dafs das Ebenenpaar $[b x]$, $[b_1 x_1]$ sich in einer Geraden der Ebene ε schneiden mufs; diese beiden Geraden in der Ebene ε schneiden sich aber in einem Punkte $\mathfrak{x}$ derselben, durch welchen sowohl der Strahl x, als auch der Strahl x_1 gehen mufs, weil alle vier Ebenen sich in dem Punkte $\mathfrak{x}$ schneiden; folglich liegt der Schnittpunkt jeder zwei entsprechender Strahlen $x\,x_1$ der beiden Bündel in der Ebene ε (dem perspektivischen Durchschnitt); also stehen auch umgekehrt die beiden perspektivischen Bündel in kollinearer Beziehung. Wir können demgemäfs folgenden Satz aussprechen:

Wenn zwei kollineare Bündel so im Raume liegen, dafs vier Paare entsprechender Strahlen (von denen keine drei eines Bündels in einer Ebene liegen) sich in vier Punkten treffen, welche in einer Ebene enthalten sind, dann müssen alle Paare entsprechender Strahlen sich in Punkten treffen, die in derselben Ebene liegen; die beiden Bündel befinden sich dann in perspektivischer Lage.

Ist die kollineare Beziehung der Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ einmal hergestellt durch die perspektivische Lage, und wird sie festgehalten, so können die Gebilde noch in gewisser Weise ihre Lage verändern, ohne dafs sie aufhören perspektivisch

zu liegen. Wenn nämlich die Verbindungslinie der Mittelpunkte $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ fest bleibt und die Mittelpunkte $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ auf dieser festen Verbindungslinie mit den Bündeln sich so verschieben, dafs die Strahlen und Ebenen in der neuen und alten Lage einander parallel bleiben (was man also eine parallele Verschiebung ohne Drehung nennen kann), dann bleibt die unendlich-entfernte Gerade der Ebene ε unverändert; es bleiben also irgend zwei parallele entsprechende Strahlen auch nach der Verschiebung parallel; eine beliebige durch $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1|$ gelegte Ebene bleibt nach der Verschiebung ungeändert, also irgend ein Paar entsprechender Strahlen in dieser Ebene mufs sich auch nach der Verschiebung treffen; endlich bleiben die in der Verbindungslinie $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ vereinigten entsprechenden Strahlen auch nach der Verschiebung dieselben; wir erkennen also die Bedingung der perspektivischen Lage dadurch als erfüllt, dafs vier Paare entsprechender Strahlen sich in Punkten treffen, die in einer Ebene liegen. Der jedesmalige perspektivische Durchschnitt der beiden kollinearen Bündel ändert sich, aber bleibt sich beständig parallel. Wenn daher zwei kollineare Bündel einmal in perspektivische Lage gebracht werden können, so ist dies noch auf unzählig viele andere Arten möglich, die in einander durch parallele Verschiebung übergehen; insbesondere können auch $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ zur Deckung gelangen.

Gehen wir wiederum von der anfänglichen perspektivischen Lage der Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ aus, so ergeben sich aus derselben einige besondere Elementenpaare, die sich bei zwei allgemein gegebenen kollinearen Bündeln wiederfinden lassen. Es ist nämlich klar, dass die beiden entsprechenden Strahlen d und d_1, welche in der Verbindungslinie der Mittelpunkte $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ der beiden Bündel vereinigt sind, die Axen entsprechender gleicher Ebenenbüschel in den beiden kollinearen Bündeln sein müssen, und es ist ferner ersichtlich, dafs die beiden Ebenen, welche durch $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ parallel zu ε, d. h. durch die unendlich-entfernte Gerade der Ebene ε gelegt werden, zwei entsprechende Ebenen sein werden, welche die Träger entsprechender gleicher Strahlenbüschel sind, weil entsprechende Strahlen derselben parallel laufen. Es ist sodann leicht zu sehen, dafs es noch ein zweites Paar

entsprechender gleicher Strahlenbüschel und noch ein zweites Paar entsprechender gleicher Ebenenbüschel in den beiden Bündeln geben mufs. Wenn wir nämlich in der Mitte zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ eine Normalebene auf dem Strahle $|\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ errichten, so schneidet diese die Ebene ε in einer Geraden, deren Punkte mit $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ verbunden zwei gleiche projektivische Strahlenbüschel liefern müssen, die sich entsprechen, und wenn wir andererseits das Spiegelbild des Punktes $\mathfrak{D}$ in Bezug auf die Ebene ε mit dem Punkte $\mathfrak{D}_1$ verbinden, so schneidet diese Verbindungslinie die Ebene ε in einem Punkte, der mit $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ verbunden zwei Strahlen d' und d_1' liefert, welche die Axen eines zweiten Paares entsprechender gleicher Ebenenbüschel sein müssen, weil sie gegen den perspektivischen Durchschnitt gleich geneigt sind. Es ist auch ersichtlich, dafs diese beiden Paare gleicher entsprechender Strahlenbüschel und die beiden Paare gleicher entsprechender Ebenenbüschel die einzigen ihrer Art sind.

Wenn wir durch die Gerade $|\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1|$ eine Ebene legen normal zum perspektivischen Durchschnitt auf ε, es sei dies die Ebene des Papiers (Fig. 15), so sind die beiden Normalen

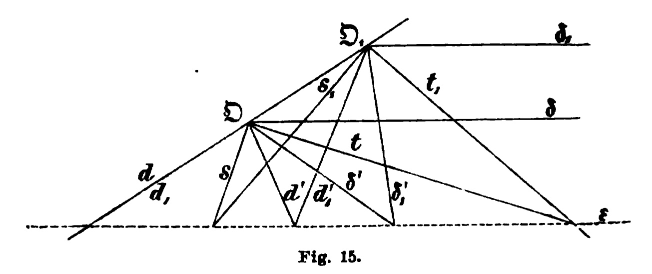


Fig. 15.

in $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ auf der Ebene des Papiers solche entsprechende Strahlen r und r_1, dafs gleichzeitig ihre Normalebenen entsprechende Ebenen sind, die mit der Ebene des Papiers zusammenfallen; wir haben daher in der Ebene des Papiers zwei projektivische Strahlenbüschel $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ in perspektivischer Lage; der perspektivische Durchschnitt ist die Schnittlinie der Ebene ε mit der Ebene des Papiers, und bei diesen beiden projektivischen Strahlenbüscheln giebt es bekanntlich ein einziges immer reelles rechtwinkliges Strahlenpaar $s\,t$, dessen entsprechende Strahlen $s_1\;t_1$ auch rechtwinklig zu ein-

ander sind (Th. d. K. S. 32.), die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel, welche gefunden werden, indem wir durch $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ den einzigen Kreis legen, welcher seinen Mittelpunkt in der Durchschnittslinie der Ebene ε mit der Ebene des Papiers, hat. Wir haben dadurch zwei entsprechende rechtwinklige Dreikante rst und $r_1 s_1 t_1$ gefunden, die wiederum einzig in den beiden Bündeln sind. Gleichzeitig sind die drei Ebenenpaare:

$$\varrho = [st] \quad \sigma = [tr] \quad \tau = [rs]$$
$$\varrho_1 = [s_1 t_1] \quad \sigma_1 = [t_1 r_1] \quad \tau_1 = [r_1 s_1]$$

entsprechende rechtwinklige Dreiflache in beiden kollinearen Ebenenbündeln $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$. Aus bekannten elementaren Eigenschaften der Figur (Fig. 15) folgt, dafs die Strahlen s und t Winkel und Nebenwinkel zwischen den Strahlen d und d' halbieren, und ebenso die Strahlen s_1 und t_1 Winkel und Nebenwinkel zwischen den Strahlen d_1 und d_1' halbieren. Wenn wir die oben ermittelten Paare von Ebenen mit den entsprechenden gleichen Strahlbüscheln in den beiden kollinearen Bündeln durch

$$\delta \text{ und } \delta_1, \quad \delta' \text{ und } \delta_1'$$

bezeichnen, so zeigt die Figur, dafs die Ebenen σ und τ Winkel und Nebenwinkel zwischen den Ebenen δ und δ', und gleichfalls die Ebenen σ_1 und τ_1 Winkel und Nebenwinkel zwischen den Ebenen δ_1 und δ_1' halbieren. Umgekehrt liegen die Axen der entsprechenden gleichen Ebenenbüschel in den Ebenen ϱ und ϱ_1 und sind gleich geneigt gegen die Normalstrahlen st und $s_1 t_1$ in diesen Ebenen; ferner gehen die Ebenen der entsprechenden gleichen Strahlenbüschel durch die Normalstrahlen r und r_1 und sind gleich geneigt gegen die Normalebenen $\sigma \tau$ und $\sigma_1 \tau_1$.

Aus den entsprechenden rechtwinkligen Dreikanten und Dreiflachen fliefsen noch metrische Relationen, welche die kollineare Beziehung in gleicher Weise beherrschen, wie die konstante Potenz die projektivische Beziehung einstufiger Gebilde. Seien x und x_1 ein beliebiges Paar entsprechender Strahlen der beiden kollinearen Bündel; dann wird die Ebene $[rx]$ zur entsprechenden Ebene $[r_1 x_1]$ haben; es sind aber r und r_1 die Axen zweier Ebenenbüschel, für welche die Ebenenpaare

$\sigma\,\tau$ und $\sigma_1\,\tau_1$ die entsprechenden rechtwinkligen Ebenenpaare (S. 10) sind, folglich gilt die Relation:

$$\operatorname{tg}([rx], [rs]) \,.\, \operatorname{tg}([r_1 x_1], [r_1 t_1]) = \text{konst.}$$

oder, wenn wir statt eines Winkels das Komplement desselben setzen, können wir anstatt des konstanten Produkts auch den konstanten Quotienten setzen; ähnliche Relationen gelten auch für die beiden übrigen Axenpaare ss_1, tt_1; wir erhalten also drei Konstanten:

$$\text{I.} \begin{cases} \operatorname{tg}([rx], [rs]) \,.\, \operatorname{tg}([r_1 x_1], [r_1 t_1]) = k_1 \\ \operatorname{tg}([sx], [st]) \,.\, \operatorname{tg}([s_1 x_1], [s_1 r_1]) = k_2 \\ \operatorname{tg}([tx], [tr]) \,.\, \operatorname{tg}([t_1 x_1], [t_1 s_1]) = k_3, \end{cases}$$

die aber, wie wir leicht erkennen, nicht von einander unabhängig sind, sondern von denen eine durch die beiden andern ausgedrückt werden kann.

In der That, wenn wir ein Dreikant auffassen, gebildet von zwei zu einander rechtwinkligen Strahlen, z. B. r und s und dem Strahle x, so gilt bekanntlich die Beziehung*):

*) Denn denken wir uns ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen drei in einer Ecke $\mathfrak{O}$ zusammenstofsende Kanten $r\,s\,t$ seien und dessen Raumdiagonale $\mathfrak{O}\mathfrak{P}$ der Strahl x sei, so folgt unmittelbar, wenn

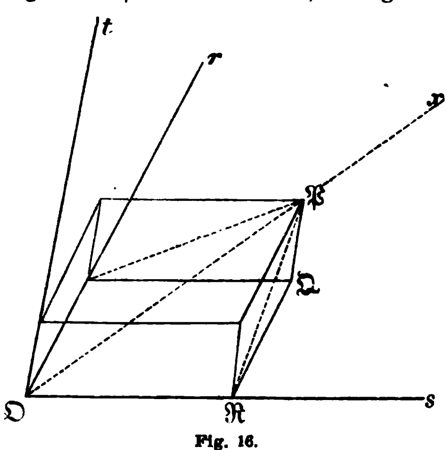


Fig. 16.

$\mathfrak{O}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ die Längen der drei Kanten des Parallelepipeds sind, aus der Figur (Fig. 16)

$$\cos(r, x) = \sin(s, x) \cos([sx], [sr]),$$

und solche Beziehungen können wir durch Vertauschung der Strahlen $r\ s\ t$ mit einander sechs herstellen, die also lauten:

$$1.\begin{cases}\cos(r,x) = \sin(s,x) . \cos([sx],[sr]) = \sin(t,x) . \cos([tx],[tr]) \\ \cos(s,x) = \sin(t,x) . \cos([tx],[ts]) = \sin(r,x) . \cos([rx],[rs]) \\ \cos(t,x) = \sin(r,x) . \cos([rx],[rt]) = \sin(s,x) . \cos([sx],[st]);\end{cases}$$

aus diesen Gleichungen ergeben sich eine grofse Anzahl anderer, von denen wir nur einige hervorheben wollen. Es folgt aus:

$$\sin(r, x) = \frac{\cos(tx)}{\cos([rx],[rt])} = \frac{\cos(s, x)}{\cos([rx],[rs])}$$

$$2. \qquad \frac{\cos(t, x)}{\cos(s, x)} = \frac{\cos([rx],[rt])}{\cos([rx],[rs])} = \operatorname{tg}([rx],[rs])$$

und weiter:

$$\frac{\cos(r, x)}{\cos(t, x)} = \operatorname{tg}([sx],[st])$$

$$\frac{\cos(s, x)}{\cos(r, x)} = \operatorname{tg}([tx],[tr]),$$

folglich:

$$3. \qquad \operatorname{tg}([rx],[rs]) . \operatorname{tg}([sx],[st]) . \operatorname{tg}([tx],[tr]) = 1,$$

und da in gleicher Weise:

$$\operatorname{tg}([r_1x_1],[r_1t_1]) . \operatorname{tg}([s_1x_1],[s_1r_1]) . \operatorname{tg}([t_1x_1],[t_1s_1]) = 1$$

ist, so folgt die Bedingung:

$$\text{(II)} \qquad k_1 . k_2 . k_3 = 1,$$

wonach eine der drei Konstanten der kollinearen Beziehung von den beiden andern abhängt.

Wir bemerken noch folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}\mathfrak{P} . \sin(s, x) &= \mathfrak{P}\mathfrak{R} \\ \mathfrak{P}\mathfrak{R} . \cos([sx],[sr]) &= \mathfrak{R}\mathfrak{O} \\ \mathfrak{R}\mathfrak{O} &= \mathfrak{O}\mathfrak{P} . \cos(r, x) \end{aligned}$$

folglich $\sin(sx) . \cos([sx],[sr]) = \cos(r, x)$

und auch

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}\mathfrak{P} . \sin(s, x) &= \mathfrak{P}\mathfrak{R} \\ \mathfrak{P}\mathfrak{R} . \sin([sx],[sr]) &= \mathfrak{P}\mathfrak{O} \\ \mathfrak{P}\mathfrak{O} &= \mathfrak{O}\mathfrak{P} . \cos(t, x) \end{aligned}$$

$$\sin(s, x) . \sin([sx],[sr]) = \cos(t, x),$$

woraus durch Quadrierung beider Gleichungen hervorgeht:

$$\cos^2(r, s) + \cos^2(s, x) + \cos^2(t, x) = 1.$$

Aus $$\sin(r, x) = \frac{\cos(s, x)}{\cos([rx], [rs])}$$
und
$$\cos(r, x) = \frac{\cos(s, x)}{\operatorname{tg}([tx], [tr])}$$
folgt:

$$4. \quad \begin{cases} \operatorname{tg}(r, x) = \dfrac{\operatorname{tg}([tx], [tr])}{\cos([rx], [rs])}, \text{ ebenso} \\ \operatorname{tg}(s, x) = \dfrac{\operatorname{tg}([rx], [rs])}{\cos([sx], [st])} \\ \operatorname{tg}(t, x) = \dfrac{\operatorname{tg}([sx], [st])}{\cos([tx], [tr])}, \end{cases}$$

woraus u. a. folgt:

$$5. \quad \operatorname{tg}(r, x) \cdot \operatorname{tg}(s, x) \cdot \operatorname{tg}(t, x) = \frac{1}{\cos([rx], [rs]) \cdot \cos([sx], [st]) \cdot \cos([tx], [tr])}$$

u. s. w.

Ähnliche Relationen lassen sich ableiten, wenn wir die beiden entsprechenden Dreiflache $\varrho\, \sigma\, \tau$ und $\varrho_1\, \sigma_1\, \tau_1$ nehmen, und irgend zwei entsprechende Ebenen ξ und ξ_1 der beiden kollinearen Bündel auffassen; da wir indessen von diesen Relationen im Folgenden keinen weiteren Gebrauch machen wollen, so übergehen wir sie hier. Ebenso wollen wir auch auf die Potenzebenen und Potenzstrahlen hier nicht weiter eingehen.

§ 45. Ermittelung der ausgezeichneten Elemente zweier kollinearen Bündel bei beliebiger Lage derselben.

Die im vorigen Paragraphen gefundenen ausgezeichneten Elemente zweier kollinearen Bündel: die entsprechenden rechtwinkligen Dreikante und Dreiflache, die beiden Paare entsprechender gleicher Strahlbüschel und die beiden Paare entsprechender gleicher Ebenenbüschel lassen sich auch unabhängig von der perspektivischen Lage bei zwei allgemein gegebenen kollinearen Bündeln ermitteln, und dadurch gelingt es, zwei allgemein gegebene kollineare Bündel in perspektivische Lage zu bringen.

Wenn zwei kollineare Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$, etwa durch vier Paare von einander unabhängiger entsprechender Elemente $\begin{Bmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{Bmatrix}$ gegeben sind, so beantworten wir zuerst die Frage,

ob es in dem Bündel $\mathfrak{O}$ einen solchen Strahl x und die Normalebene ξ desselben giebt, dafs die entsprechenden Elemente x_1 und ξ_1 im Bündel $\mathfrak{O}_1$ auch zu einander normal sind?

Nehmen wir zwei beliebige entsprechende Strahlen x und x_1 der beiden kollinearen Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$, so wird der zum Strahle x normal gelegten Ebene ξ des Bündels $\mathfrak{O}$ im allgemeinen eine Ebene ξ_1 entsprechen, welche nicht auf dem Strahle x_1 normal steht. Verändern wir aber den Strahl x, so verändert sich mit ihm auch ξ und beschreibt das komplementäre Bündel $\mathfrak{O}[\xi]$ zu dem Strahlenbündel $\mathfrak{O}|x|$ (S. 357), welches zu ihm in reziproker Beziehung steht; der Ebene ξ entspricht nun vermöge der gegebenen kollinearen Beziehung die Ebene ξ_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$; folglich stehen die Bündel $\mathfrak{O}[\xi]$ und $\mathfrak{O}_1[\xi_1]$ in kollinearer Beziehung; wenn wir nun auf dem Strahle x_1 eine Ebene ξ_1' im Bündel $\mathfrak{O}_1$ normal stellen, so beschreiben bei der Bewegung die Ebenen ξ_1 und ξ_1' konzentrische kollineare Bündel, denn es ist

Bündel $\mathfrak{O}_1[\xi_1]$ kollinear mit $\mathfrak{O}[\xi]$
" $\mathfrak{O}[\xi]$ reziprok mit $\mathfrak{O}|x|$
" $\mathfrak{O}|x|$ kollinear mit $\mathfrak{O}_1|x_1|$
" $\mathfrak{O}_1|x_1|$ reziprok mit $\mathfrak{O}_1[\xi_1']$,

folglich ist auch das Bündel $\mathfrak{O}_1[\xi_1]$ mit dem Bündel $\mathfrak{O}_1[\xi_1']$ kollinear und konzentrisch und sobald es sich ereignet, dafs zwei entsprechende Ebenen ξ_1 und ξ_1' zusammenfallen, ist offenbar die geforderte Bedingung erfüllt. Dies tritt aber, wie wir wissen (S. 376), im allgemeinen dreimal ein, und eine dieser drei Lösungen der Aufgabe ist immer reell; in unserem Falle zeigt sich aber, dafs die beiden andern Lösungen auch reell sein müssen; denn sei das eine immer reelle Paar entsprechender Strahlen r und r_1 gefunden, deren Normalebenen ϱ und ϱ_1 ebenfalls entsprechende Ebenen sind, so werden letztere die Träger zweier projektivischen Strahlenbüschel der beiden kollinearen Bündel sein, welche bekanntlich immer zwei reelle Paare entsprechender rechtwinkliger Strahlen ss_1 und tt_1 haben (die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel st und s_1t_1); da diese reell sind, so wird auch das Paar ss_1 die oben verlangte Eigenschaft besitzen, dafs die Normalebene $[rt] = \sigma$ des Strahles s zur entsprechenden

Ebene hat die Normalebene $[r_1 t_1] = \sigma_1$ des Strahles s_1, und dasselbe gilt von dem Strahlenpaar tt_1; sobald also eine Lösung der Aufgabe reell ist, müssen auch die beiden übrigen reell sein. Diese drei Strahlenpaare rr_1, ss_1 und tt_1 selbst zu finden ist natürlich ein Problem dritten Grades und von uns zurückgeführt auf das Fundamentalproblem des § 43. Bemerkenswert ist für unsere vorliegende Frage der Umstand, dafs die beiden entsprechenden rechtwinkligen Dreikante

$$rst \quad \text{und} \quad r_1 s_1 t_1$$

der kollinearen Bündel $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ immer reell vorhanden sind.

(Den besonderen Fall, dafs die in den Ebenen ϱ und ϱ_1 enthaltenen Strahlenbüschel einander gleich sind, dafs es also unendlich viele Tripel entsprechender rechtwinkliger Dreikante giebt, lassen wir hier bei Seite, um die allgemeine Untersuchung nicht zu unterbrechen.)

Mit diesen entsprechenden rechtwinkligen Dreikanten sind zugleich die entsprechenden rechtwinkligen Dreiflache gefunden:

$$\varrho = [st] \qquad \sigma = [tr] \qquad \tau = [rs]$$
$$\varrho_1 = [s_1 t_1] \quad \sigma_1 = [t_1 r_1] \quad \tau_1 = [r_1 s_1].$$

Um nun zu ermitteln, ob es entsprechende gleiche Strahlenbüschel in den beiden kollinearen Bündeln $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ giebt, bemerken wir im voraus, dafs die Träger derselben notwendig Ebenen sein müssen, welche durch ein Paar der entsprechenden Normalstrahlen $r\,r_1$ oder $s\,s_1$ oder tt_1 hindurchgehen; denn wäre dies nicht der Fall und $\xi\,\xi_1$ ein Ebenenpaar der gesuchten Art, so wären die Schnittlinien $|\xi\varrho|$ und $|\xi_1\varrho_1|$ entsprechende Strahlen und wegen der Gleichheit der Strahlenbüschel auch die auf diesen Schnittlinien rechtwinkligen Strahlen y und y_1 entsprechend in den Ebenen $\xi\,\xi_1$; dann müfsten sich also auch die Ebenen $[ry]$ und $[r_1 y_1]$ entsprechen und von diesen Ebenen sind die Normalstrahlen $|\xi\varrho|$ und $|\xi_1\varrho_1|$, welche sich auch entsprechen; folglich hätten wir ein viertes solches Paar, wie es zu Anfang der Untersuchung ermittelt wurde; es giebt aber im allgemeinen nur drei solcher Paare, folglich können die Strahlen

$|\xi\varrho|$ und $|\xi_1\varrho_1|$ nur entweder mit s und s_1, oder mit t und uns t_1 koinzidieren, oder die Ebenen $\xi\,\xi_1$ müssen durch r und r_1 gehen, in welchem Falle die Strahlen $y\,y_1$ mit $r\,r_1$ koinzidieren. In jedem Fall müssen also die Ebenen mit entsprechenden gleichen Strahlenbüscheln durch eines der drei Paare entsprechender Normalstrahlen gehen.

Legen wir demnach durch die Strahlen r und r_1 zwei entsprechende Ebenen ξ und ξ_1, so sind in den projektivischen Strahlenbüscheln, welche diese enthalten, nicht nur $r\,r_1$ sondern auch die Schnittlinien $|r\xi|$ und $|r_1\xi_1|$ entsprechende Strahlen, und diese Strahlenpaare schliefsen rechte, also gleiche Winkel ein; gäbe es nun irgend ein drittes Strahlenpaar $x\,x_1$ in diesen projektivischen Strahlenbüscheln von der Beschaffenheit, dafs der Winkel

$$(r, x) = (r_1, x_1)$$

wäre, so müfsten die Strahlenbüschel projektivisch-gleich sein; wir haben also die Ebenen ξ und ξ_1 so zu wählen, dafs dieser Fall eintritt.

Wenn wir uns der aus der Eigenschaft der konstanten Potenz entspringenden metrischen Beziehungen erinnern (S. 384), wonach

$$\operatorname{tg}(r, x) = \frac{\operatorname{tg}([tx], [tr])}{\cos([rx], [rs])},$$

so liefert die Bedingung $(r\,x) = (r_1\,x_1)$ folgende:

$$\frac{\operatorname{tg}([tx], [tr])}{\cos([rx], [rs])} = \frac{\operatorname{tg}([t_1x_1], [t_1r_1])}{\cos([r_1x_1], [r_1s_1])}$$

d. h.
$$k_3 = \frac{\cos([rx], [rs])}{\cos([r_1x_1], [r_1s_1])}$$

und aufserdem haben wir

$$k_1 = \frac{\operatorname{tg}([rx], [rs])}{\operatorname{tg}([r_1x_1], [r_1s_1])}.$$

Wenn wir daher die beiden Winkel:

$$([r\,x], [r\,s]) = \varphi \quad ([r_1\,x_1], [r_1\,s_1]) = \varphi_1$$

bezeichnen, so würden dieselben durch die Bedingungen zu bestimmen sein:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = k_3 \qquad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_1} = k_1$$

oder da die oben (S. 383) gefundene Bedingung zwischen den drei Konstanten $k_1\,k_2\,k_3$ stattfindet:

$$k_1 k_2 k_3 = 1$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = k_3 \cos\varphi_1 \\ k_2 \sin\varphi = \sin\varphi_1 \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich die Werte von φ und φ_1 ermitteln, nämlich:

$$\sin^2\varphi = \frac{1-k_3^2}{1-k_2^2 k_3^2} = \frac{k_3^2-1}{k_3^2 k_2^2-1} \qquad \sin^2\varphi_1 = \frac{k_2^2-k_2^2 k_3^2}{1-k_2^2 k_3^2} = \frac{k_2^2 k_3^2-k_2^2}{k_2^2 k_3^2-1}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{k_3^2-k_2^2 k_3^2}{1-k_2^2 k_3^2} = \frac{k_2^2 k_3^2-k_3^2}{k_2^2 k_3^2-1} \qquad \cos^2\varphi_1 = \frac{1-k_2^2}{1-k_2^2 k_3^2} = \frac{k_2^2-1}{k_2^2 k_3^2-1}$$

Damit hieraus reelle Werte für φ und φ_1 sich ergeben, ist einmal nötig, dafs die Werte für $\sin^2\varphi$ $\cos^2\varphi$ $\sin^2\varphi_1$ $\cos^2\varphi_1$ positiv, und zweitens, dafs sie kleiner als 1 seien. Dies wird nur der Fall sein, wenn

$$\text{entweder } k_2 > 1 \quad k_3 > 1$$
$$\text{oder } k_2 < 1 \quad k_3 < 1;$$

ob nun eine dieser Bedingungen erfüllt wird, d. h. ob durch r und r_1 zwei entsprechende Ebenen gehen, welche gleiche entsprechende Strahlenbüschel enthalten, läfst sich a priori nicht entscheiden, sobald wir die Werte der Konstanten k_2 und k_3 nicht kennen. Aber wir wissen, dafs zwischen den drei Konstanten $k_1 k_2 k_3$ die Bedingung besteht:

$$k_1 k_2 k_3 = 1,$$

aus welcher folgt, dafs weder alle drei gröfser, noch alle drei kleiner als 1 sein können; es sind daher nur folgende sechs Fälle möglich:

$k_1 < 1$	$k_1 < 1$	$k_1 < 1$	$k_1 > 1$	$k_1 > 1$	$k_1 > 1$
$k_2 > 1$	$k_2 < 1$	$k_2 > 1$	$k_2 > 1$	$k_2 < 1$	$k_2 > 1$
$k_3 > 1$	$k_3 > 1$	$k_3 < 1$	$k_3 < 1$	$k_3 > 1$	$k_3 < 1$

und diese sechs Fälle entsprechen gerade den sechs Bedingungen, welche erfüllt werden müssen, wenn es durch eines der drei Strahlenpaare rr_1, ss_1, tt_1 Ebenen mit entsprechenden gleichen Strahlenbüscheln geben soll, nämlich:

rr_1		ss_1		tt_1	
$k_2 > 1$	$k_2 < 1$	$k_3 > 1$	$k_3 < 1$	$k_1 > 1$	$k_1 < 1$
$k_3 > 1$	$k_3 < 1$	$k_1 > 1$	$k_1 < 1$	$k_2 > 1$	$k_2 < 1$.

Da nur einer der obigen sechs Fälle eintreten kann, und durch das Eintreten eines derselben die übrigen fünf ausgeschlossen sind, so giebt es auch nur durch ein Paar Normalstrahlen Ebenen von der verlangten Beschaffenheit. Wir nennen dieses besondere Paar rr_1, nehmen also den Fall an: $\begin{cases} k_1 < 1 \\ k_2 > 1 \\ k_3 > 1 \end{cases}$ und haben dann die reellen Winkel φ und φ_1 aus den obigen Gleichungen zu bestimmen oder einfacher durch folgende elementare Konstruktion zu ermitteln:

Denken wir uns (Fig. 17) die beiden gegebenen Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ so im Raume gestellt, daſs die besonderen Strahlen

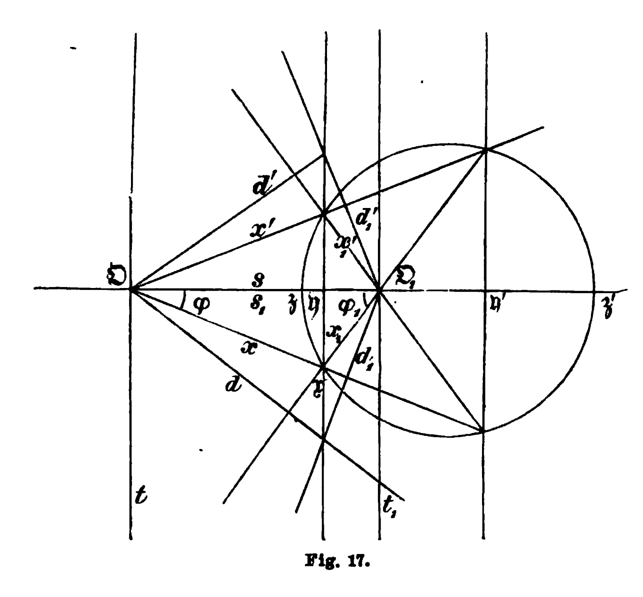


Fig. 17.

r und r_1 parallel laufen, und die besonderen Strahlen s und s_1 auf einander fallen, also auch t und t_1 parallel laufen, und sei die Ebene des Papiers diejenige, in welcher die Strahlenpaare ss_1, tt_1 liegen, während rr_1 normal auf der Ebene des Papiers stehen, dann sind die Winkel:

$$([rx], [rs]) = \varphi \quad \text{und} \quad ([r_1 x_1], [r_1 s_1]) = \varphi_1$$

durch die beiden Bedingungen:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} = \frac{1}{k_2} \quad (k_2 > 1)$$
$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_1} = k_1 \quad (k_1 < 1).$$

zu ermitteln oder was dasselbe ist, es sind in der Ebene $[st]$ oder $[s_1 t_1]$ zwei Strahlen x und x_1 durch $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ so zu ziehen, dafs $\angle (xs) = \varphi$ und $\angle (x_1 s_1) = \varphi_1$ wird. Schneiden sich zwei solche Strahlen im Punkte $\mathfrak{x}$, und ist $\mathfrak{y}$ der Fufspunkt des aus $\mathfrak{x}$ auf $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ herabgelassenen Perpendikels, so ist $\mathfrak{O}\mathfrak{y} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \mathfrak{O}_1\mathfrak{y} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{x} \cdot \sin \varphi = \mathfrak{O}_1\mathfrak{x} \cdot \sin \varphi_1$, also:

$$\frac{\mathfrak{O}_1\mathfrak{y}}{\mathfrak{O}\mathfrak{y}} = k_1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{x}}{\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}} = k_2;$$

durch die erste Bedingung sind zwei Punkte $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}'$ auf der Verbindungslinie $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ bestimmt, die durch $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ harmonisch getrennt werden, von denen also der eine $\mathfrak{y}$ zwischen, der andere $\mathfrak{y}'$ aufserhalb der Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ liegt, und da $k_1 < 1$ ist, so liegt $\mathfrak{y}$ näher an $\mathfrak{O}_1$ als an $\mathfrak{O}$. Denken wir uns in $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}'$ Perpendikel auf $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ errichtet, so mufs auf diesen der gesuchte Punkt $\mathfrak{x}$ liegen; aus der zweiten Bedingung folgt, dafs der Punkt $\mathfrak{x}$ auf einem bestimmten Kreise liegt, welcher seinen Mittelpunkt in der Geraden $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ hat, und für welchen die Endpunkte dieses Durchmessers durch $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ harmonisch getrennt werden. Nennen wir $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ die Endpunkte dieses Durchmessers, so teilen die Punkte $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ die Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ in dem gegebenen Verhältnis k_2; da aber $\frac{\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}}{\mathfrak{O}\mathfrak{x}} = \frac{1}{k_2} = k_1 k_3$ und $k_3 > 1$ ist, so schliefst das Punktepaar $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ das vorhin gefundene Punktepaar $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$ ganz ein; wenn wir also über $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ als Durchmesser einen Kreis beschreiben und in $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}'$ Normalen auf dem Durchmesser $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ errichten, so müssen diese Geraden den Kreis in reellen Punktepaaren schneiden; diese Schnittpunkte liegen aber paarweise mit $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ in vier Geraden, die symmetrisch liegen zu $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$, wie aus bekannten Eigenschaften des Kreises hervorgeht.

Wir finden also nur zwei Strahlenpaare xx_1 und $x'x_1'$, die symmetrisch liegen zu ss_1 als den Forderungen der Aufgabe genügend, und die Ebenenpaare $[rx] = \delta$ und $[r_1 x_1] = \delta_1$; $[rx'] = \delta'$ und $[r_1 x_1'] = \delta_1'$ sind die einzigen, reell vorhan-

denen Paare von entsprechenden Ebenen der beiden Bündel, welche die Träger projektivisch-gleicher Strahlenbüschel sind.

Sind diese nun ermittelt, so ist es sehr leicht, die Axen entsprechender gleicher Ebenenbüschel in den beiden kollinearen Bündeln zu finden. Halten wir die vorige Lage, in welche wir die beiden Bündel gebracht haben (Fig. 17), fest, so liegen die Ebenen $[st]$ und $[s_1 t_1]$ mit der Ebene des Papiers vereinigt, und da das Strahlenpaar ss_1 zusammenfällt, so liegen die in diesen Ebenen enthaltenen entsprechenden Strahlenbüschel perspektivisch; ihr perspektivischer Durchschnitt ist, da tt_1 parallel laufen, die Gerade $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$. Wenn wir nun von $\mathfrak{O}$ auf den Strahl x_1 das Perpendikel d und von $\mathfrak{O}_1$ auf den Strahl x das Perpendikel d_1 fällen, so schneiden sich d und d_1 offenbar auf der Geraden $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$, und sind daher entsprechende Strahlen der beiden Bündel. Die in den Ebenen $[rx] = \delta$ und $[r_1 x_1] = \delta_1$ enthaltenen Strahlenbüschel sind gleich; nehmen wir daher zwei beliebige entsprechende Strahlen yy_1 dieser gleichen Strahlenbüschel, so haben wir einmal:

$$\angle (x, y) = \angle (x_1, y_1),$$

ferner der Konstruktion zufolge

$$\angle (x, d) = \angle (x_1, d_1)$$

und drittens der Neigungswinkel

$$\angle ([xy], [xd]) = \angle ([x_1 y_1], [x_1 d_1]) = 90^0,$$

folglich sind die beiden Dreikante xyd und $x_1 y_1 d_1$ kongruent, und daraus folgt, dafs auch die Neigungswinkel:

$$\angle ([dx], [dy]) \quad \text{und} \quad \angle ([d_1 x_1], [d_1 y_1])$$

einander gleich sind. Dies heifst aber, wenn wir den Strahl y verändern, nichts anderes, als dafs die beiden Ebenenbüschel, deren Axen die entsprechenden Strahlen $d\, d_1$ sind in den kollinearen Bündeln einander gleich sind. In gleicher Weise finden wir das zweite Paar Axen $d' d_1'$ entsprechender gleicher Ebenenbüschel der beiden kollinearen Bündel, welche symmetrisch zu d und d_1 liegen in Bezug auf die Strahlenpaare st und $s_1 t_1$.

Wir können demgemäfs folgendes Resultat der vorigen Untersuchung aussprechen:

In zwei beliebig gegebenen kollinearen Bündeln $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ giebt es allemal ein Paar entsprechender rechtwinkliger Dreikante rst und $r_1 s_1 t_1$, deren Kanten (Normalstrahlen) paarweise durch Ebenen verbunden gleichzeitig ein Paar entsprechender rechtwinkliger Dreiflache $\varrho\sigma\tau$ und $\varrho_1\sigma_1\tau_1$ (Normalebenen) liefern. Ferner giebt es allemal zwei Paare entsprechender gleicher Strahlenbüschel in den Ebenen δ und δ_1, δ' und δ_1'; diese Ebenen gehen durch ein Paar Normalstrahlen (rr_1) und sind gleich geneigt zu den in diesen Normalstrahlen sich schneidenden Normalebenen. Endlich giebt es allemal zwei Paare Axen entsprechender gleicher Ebenenbüschel d und d_1, d' und d_1'; diese liegen in einem Paare Normalebenen $(\varrho\varrho_1)$ und zwar denjenigen, welche auf dem vorigen Paar Normalstrahlen (rr_1) senkrecht stehen. Die Strahlenpaare dd' und $d_1 d_1'$ sind gleich geneigt zu den Normalstrahlen st und $s_1 t_1$, in deren Ebenen sie liegen.

Nachdem wir diese ausgezeichneten Elemente zweier kollinearen Bündel ermittelt haben, ist es nun leicht, diese Bündel in perspektivische Lage zu bringen; wir brauchen sie nämlich nur so im Raume zu stellen, dafs entweder das ausgezeichnete Strahlenpaar dd_1 oder $d'd_1'$ in die Verbindungslinie der Mittelpunkte $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ hineinfällt und alsdann um diese zusammenfallenden entsprechenden Strahlen so zu drehen, dafs die entsprechenden gleichen Ebenenbüschel, deren Axen d und d_1 oder d' und d_1' sind, identisch auf einander fallen; dann befinden sich die Bündel allemal in perspektivischer Lage; denn legen wir durch $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ eine beliebige Ebene, so enthält sie zwei zusammenfallende entsprechende Ebenen, also müssen irgend zwei entsprechende Strahlen in diesen Ebenen sich treffen; legen wir aber drei solcher Ebenen durch $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ und fassen in jeder derselben ein beliebiges Strahlenpaar auf, so erhalten wir drei Treffpunkte, durch welche eine Ebene ε bestimmt wird; diese schneidet die in $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ vereinigten Strahlen in einem vierten Punkte, und wir können daher sagen, dafs vier Paare entsprechender

Strahlen sich in vier Punkten einer Ebene ε treffen, wodurch die perspektivische Lage nachgewiesen ist (S. 378). Haben wir auf die eine oder andere Weise, durch Vereinigung von dd_1 oder von $d'd'_1$ perspektivische Lage herbeigeführt, so können wir, wie schon auf S. 379 bemerkt wurde, die beiden Bündel, ohne sie zu drehen, parallel mit sich so verschieben, dafs die Strahlen dd_1 oder $d'd'_1$ und zugleich die ganzen Ebenenbüschel, deren Axen sie sind, unverändert bleiben; die perspektivische Lage bleibt dabei erhalten, während der perspektivische Durchschnitt sich parallel verschiebt. Hieraus folgt, dafs sich zwei kollineare Bündel immer auf unendlich-viele Arten in perspektivische Lage bringen lassen; diese zerfallen in zwei wesentlich verschiedene Gruppen, je nachdem die entsprechenden gleichen Ebenenbüschel, deren Axen d und d_1 sind, oder diejenigen, deren Axen d' und d'_1 sind, zur Deckung gebracht werden. Innerhalb derselben Gruppe können noch durch parallele Verschiebung die Mittelpunkte der Bündel zur Koinzidenz gebracht werden.

Während aus den vorhergehenden Untersuchungen erhellt, dafs sowohl zwei allgemein gegebene kollineare Punktfelder, als auch zwei allgemein gegebene kollineare Strahlenbündel allemal auf die perspektivische Lage zurückgeführt werden können, und wie dies bewerkstelligt wird, lassen sich dagegen zwei kollineare Gebilde, von denen eines ein ebenes Punktfeld ε und das andere ein Strahlenbündel $\mathfrak{O}_1$ ist, im allgemeinen nicht in perspektivische Lage bringen, d. h. in eine solche Lage bringen, dafs jeder Strahl des Bündels durch den ihm entsprechenden Punkt des Punktfeldes geht; denn wäre dies möglich, so müfste auch die Punktreihe, welche auf der unendlich-entfernten Geraden g_∞ der Ebene ε liegt, mit dem ihr entsprechenden bestimmten Strahlenbüschel des Bündels $\mathfrak{O}_1$ perspektivisch gelegt werden können. Dies ist aber im allgemeinen nicht möglich; denn die Punktreihe auf g_∞ mit jedem Punkte $\mathfrak{o}$ des Raumes verbunden liefert ein bestimmtes Strahlenbüschel $(\mathfrak{o})$, welches sich immer gleich bleibt, wo auch $\mathfrak{o}$ liegen mag (d. h. zwei Strahlen von irgend einem Punkte $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{a}_\infty$ und $\mathfrak{b}_\infty$ schliefsen denselben Winkel mit einander ein, wie zwei

Strahlen von einem andern Punkte $\mathfrak{o}'$ nach $\mathfrak{a}_\infty$ und $\mathfrak{b}_\infty$); wenn daher dieses Strahlenbüschel $\mathfrak{o}$ dem Strahlenbüschel im Bündel $\mathfrak{O}_1$, welches den Punkten von g_∞ entspricht, nicht projektivisch gleich ist, so läſst sich letzteres nicht mit der Punktreihe auf g_∞ perspektivisch legen: also lassen sich, da diese Bedingung im allgemeinen nicht erfüllt zu sein braucht, zwei kollineare Gebilde ε und $\mathfrak{O}_1$ nicht in perspektivische Lage bringen.

Ist aber insbesondere die Bedingung erfüllt, daſs irgend ein Strahlenbüschel, welches nach der Punktreihe auf g_∞ der Ebene ε hingeht, projektivisch-gleich ist mit demjenigen Strahlenbüschel in der entsprechenden Ebene γ_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$, welches den Punkten auf g_∞ entspricht, dann kann perspektivische Lage der beiden Gebilde auf folgende Art hergestellt werden:

Man errichte auf der Ebene γ_1 die Normale p_1 und suche denjenigen Punkt $\mathfrak{p}$ der Ebene ε, welcher dem Strahle p_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ entspricht. Dann stelle man das Bündel $\mathfrak{O}_1$ so, daſs der Strahl p_1 durch den Punkt $\mathfrak{p}$ geht, die Ebene γ_1 der Ebene ε parallel wird, und das Strahlenbüschel in der Ebene γ_1 mit der entsprechenden Punktreihe auf g_∞ perspektivisch liegt, was durch Drehung des Bündels $\mathfrak{O}_1$ um den Strahl p_1 immer möglich ist. Dadurch ist zwar noch nicht die perspektivische Lage erreicht; aber man kann jetzt den Mittelpunkt $\mathfrak{O}_1$ des Bündels, ohne dasselbe zu drehen, so auf dem Strahle p_1 parallel mit sich verschieben, daſs ein beliebiger Punkt $\mathfrak{r}$ der Ebene ε auf den ihm entsprechenden Strahl r_1 zu liegen kommt; denn nimmt man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{r}$ der Ebene ε, und trifft $|\mathfrak{p}\mathfrak{r}|$ die Gerade g_∞ in $\mathfrak{s}_\infty$, so entspricht dem Strahle $|\mathfrak{p}\mathfrak{r}\mathfrak{s}_\infty|$ eine Ebene des Bündels $\mathfrak{O}_1$, die durch p_1 und $\mathfrak{s}_\infty$, also auch durch $\mathfrak{r}$ geht, und in dieser Ebene liegt der Strahl r_1; man kann also durch parallele Verschiebung des Bündels $\mathfrak{O}_1$ längs des Strahles p_1 es bewirken, daſs r_1 durch $\mathfrak{r}$ geht; dann hat man vier Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}_1$, von denen keine drei in einer Ebene liegen, nämlich die Strahlen p_1 r_1 und irgend zwei Strahlen im Bündel $\mathfrak{O}_1$, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte auf g_∞ gehen, und solchen vier Strahlen entsprechen vier Punkte der Ebene ε, die bez. auf denselben liegen; folglich

müssen, wie oben nachgewiesen ist, sämtliche Strahlen des Bündels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Ebene gehen, d. h. es findet perspektivische Lage statt. Dieselbe wird auch noch durch eine zweite Stellung des Bündels erreicht, die wir dadurch erhalten, dafs wir von der eben erhaltenen Lage das Spiegelbild des Bündels nehmen in Bezug auf die Ebene ε. Es lassen sich demnach die beiden Gebilde, auch wenn die vorausgesetzte Bedingung erfüllt wird, nur auf zwei Arten in perspektivische Lage bringen.

§ 46. Involutorische Lage zweier zusammenliegenden kollinearen Ebenen.

Bekanntlich lassen sich zwei beliebige projektivische gerade Punktreihen mit ihren Trägern allemal so auf einander legen, dafs wenn in irgend einem Punkte derselben $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$ vereinigt sind, die entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ zusammenfallen, und sobald dies nur **einmal** stattfindet, tritt es immer ein, wo man auch die vereinigten Punkte $\mathfrak{x}\,(\mathfrak{y}_1)$ auf dem gemeinsamen Träger wählen mag. (Th. d. K. S. 49.)

Ein dieser involutorischen Lage der beiden projektivischen Punktreihen analoges Aufeinanderlegen zweier kollinearen Ebenen wollen wir jetzt aufsuchen. Seien zwei kollineare Ebenen ε und ε_1 so auf einander gelegt, dafs es zunächst nur einmal vorkomme, dafs den zusammenliegenden Punkten $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1$ die ebenfalls vereinigten Punkte $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}$ entsprechen; dann ist klar, dafs die Verbindungslinie $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| = |\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1|$ eine Doppelgerade der beiden kollinearen Ebenen sein mufs, und da die derselben angehörigen beiden projektivischen Punktreihen einmal das Paar $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ auf $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1|$ liegend haben, so liegen sie involutorisch, also sämtliche Paare entsprechender gleicher Strecken dieser beiden projektivischen Punktreihen fallen verkehrt auf einander (Th. d. K. § 16). Die beiden Doppelpunkte der kollinearen Ebenen auf der Doppelgeraden können entweder reell oder konjugiert-imaginär sein (hyperbolische oder elliptische Punktinvolution); der dritte Doppelpunkt mufs aber, wie wir wissen (S. 372), immer reell sein; nennen wir ihn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$, dann wird er der Mittelpunkt einer Strahleninvolution sein, welche mit der Punktinvolution auf der Doppelgeraden $g = g_1$ perspektivisch liegt. Nehmen wir

nun an, dafs aufser den auf der Doppelgeraden $g(g_1)$ involutorisch liegenden Punktepaaren $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ und $\mathfrak{x}_1(\mathfrak{y})$ noch irgend ein anderes Paar in der Ebene der beiden vereinigt liegenden kollinearen Felder $\varepsilon\ \varepsilon_1$ vorhanden wäre, welches die gleiche Eigenschaft besäfse, nämlich dafs

$$\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{d}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}_1 \equiv \mathfrak{d}$$

wäre, dann würde sogleich folgen, dass auch der Strahl $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}|$ mit seinem entsprechenden $|\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{c}_1|$ zusammenfiele; wir hätten also zwei Doppelstrahlen und ihr Schnittpunkt

$$(|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|,\ |\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}|) \equiv (|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_1|,\ |\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{c}_1|)$$

müfste daher ein Doppelpunkt der vereinigten kollinearen Ebenen sein (Fig. 18). Aus gleichem Grunde müsste aber auch der Punkt:

$$(|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|, |\mathfrak{b}\mathfrak{d}|) \equiv (|\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1|, |\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1|)$$

ebenfalls ein Doppelpunkt sein und der Punkt:

$$(|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|, |\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|) \equiv (|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1|, |\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1|)$$

auch ein Doppelpunkt; die Verbindungslinie der beiden letzten Punkte müfste mithin ein neuer Doppelstrahl $s \equiv s_1$ sein, und auf ihm würden nicht blofs die beiden eben verbundenen Punkte Doppelpunkte sein, sondern auch die beiden Schnittpunkte mit den vorigen Doppellinien $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}| \equiv |\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}| \equiv |\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{c}_1|$. Wir haben also auf $s \equiv s_1$ zwei zusammenliegende projektivische Punktreihen, welche vier Paare entsprechender Punkte zusammenliegend haben; folglich müssen s und s_1 identisch auf einander liegen. Es sind also s und s_1 ein Paar der besonderen oben (S. 366) ermittelten projektivisch gleichen sich entsprechenden Punktreihen,

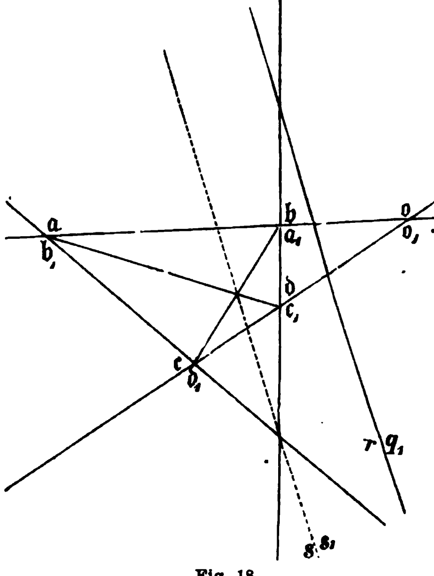


Fig. 18.

welche identisch auf einander liegen und der Schnittpunkt $(|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, |\mathfrak{c}\mathfrak{b}|) = \mathfrak{o} = (|\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1|, |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|) = \mathfrak{o}_1$ ist ein Doppelpunkt, welcher die beiden besonderen Punkte $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1$ (S. 367) vereinigt, in denen die Mittelpunkte entsprechender gleicher Strahlenbüschel der beiden kollinearen Ebenen liegen. Die beiden kollinearen Felder liegen also in der Weise auf einander, wie wir sie oben als einen besonderen Fall perspektivischer Lage erkannt haben (S. 369). Ferner bemerken wir, dafs auf dem Strahle $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| = |\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1|$ zwei involutorisch liegende Punktreihen vereinigt sind, also auch die den unendlich-entfernten Punkten dieses Strahls in beiderlei Sinn entsprechenden Punkte vereinigt sein müssen und zwar in demjenigen Punkte, welcher in der Mitte liegt zwischen den beiden Doppelpunkten; dasselbe gilt von den Strahlen $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}| = |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|$. Wenn wir daher zu dem Strahle $s = s_1$ eine Parallele ziehen, die ebensoweit von ihm absteht wie von dem Doppelpunkte $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$, so mufs diese Parallele $r = q_1$ diejenigen Geraden vereinigen, welche in doppeltem Sinne den unendlich-entfernten Geraden der Ebene ε und ε_1 entsprechen. Dies erfordert aber eine B e d i n g u n g, welche bei kollinearen Ebenen im allgemeinen nicht erfüllt ist, dafs nämlich die Gerade r gleichweit absteht von $\mathfrak{o}$ und s, und andererseits q_1 gleichweit absteht von $\mathfrak{o}_1$ und s_1. Wir wissen (S. 362), dafs im allgemeinen bei zwei kollinearen Ebenen die früher mit den Buchstaben $s\,s'$ $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'$ und $s_1\,s_1'$ $\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}_1'$ bezeichneten ausgezeichneten Elemente immer so liegen, dafs der Abstand der parallelen Geraden $s\,s'$ von einander so grofs ist, wie die Entfernung der Punkte $\mathfrak{o}_1\,\mathfrak{o}_1'$, der Abstand der Geraden $s_1\,s_1'$ von einander gleich ist der Entfernung der Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ von einander. Hier wird aber gefordert, dafs diese beiden im allgemeinen verschiedenen Abstände einander gleich seien, d. h. dafs

der Punkt $\mathfrak{o}$ in der Geraden s'
„ „ $\mathfrak{o}'$ „ „ „ s
„ „ $\mathfrak{o}_1$ „ „ „ s_1'
„ „ $\mathfrak{o}_1'$ „ „ „ s_1 liege;

ist dies der Fall, dann werden die Geraden r und q_1, welche zwischen den Paaren von Parallelen $s\,s'$ und $s\,s_1'$ in der Mitte

liegen, so auf einander gelegt werden können, daſs ein Paar entsprechender gleicher Punktreihen ($s s_1$) identisch zusammenfallen, dagegen das andere Paar entsprechender gleicher Punktreihen ($s' s'_1$) zu einer gleichseitig-hyperbolischen Punktinvolution sich gruppieren, deren Doppelpunkte der unendlich-entfernte Punkt und der endliche Doppelpunkt $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$ sind, (denn verfolgen wir auf s und s' zwei gleiche und gleichlaufende Punktreihen, so sind der Konstruktion zufolge die entsprechenden Punktreihen auf s_1 und s'_1 gleich, aber ungleichlaufend). Dies ist aber die vorhin geforderte Lage, für welche die beiden Paare von Punkten existieren:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b}; & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1; & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{c}_1. \end{matrix}$$

Ist nun die angegebene metrische Bedingung für die beiden kollinearen Felder erfüllt, und sind sie in solche Lage gebracht, daſs gleichzeitig $s = s_1$ und $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$ auf einander liegen, dann befinden sie sich in involutorischer Lage, denn alsdann wird immer, wo auch ein Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ in doppeltem Sinne aufgefaſst wird, der entsprechende $\mathfrak{x}_1$ mit dem entsprechenden $\mathfrak{y}$ zusammenfallen. In der That, alle durch $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$ gehenden Strahlen müssen Doppelstrahlen sein; auf jedem solchen Strahl sind also zwei entsprechende projektivische Punktreihen vereinigt, und dieselben müssen involutorisch liegen, weil der Schnittpunkt des Strahls mit den vereinigten Strahlen $r = q_1$ diejenigen Punkte enthält, welche den unendlich-entfernten Punkten entsprechen; da diese also zusammenliegen, so ist die involutorische Lage nachgewiesen; nehmen wir nun einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ der zusammenliegenden kollinearen Ebenen, so muſs dem Strahl $|\mathfrak{o}\mathfrak{x}|$ derselbe Strahl $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}_1|$ entsprechen, d. h. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ müssen mit $\mathfrak{o}$ in gerader Linie liegen, und wegen der involutorischen Eigenschaft der beiden zusammenliegenden projektivischen Punktreihen muſs, wenn $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}_1$ koinzidiert, auch $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{x}_1$ zusammenfallen, w. z. b. w. Noch bemerken wir, daſs ein solches Punktepaar $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}_1}$ und $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{y}}$ immer harmonisch getrennt wird durch den Punkt $\mathfrak{o}$ und die Gerade s, weil diese die Doppel-

punkte der Involution enthalten, deren Träger die Doppelgerade $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = |\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1|$ ist.

Das Resultat der vorigen Untersuchung läßt sich also zusammenfassen:

Wenn zwei kollineare Ebenen so auf einander gelegt werden können, daſs zweimal die involutorische Bedingung erfüllt wird, d. h. dem in doppeltem Sinne aufgefaſsten Punkte $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1$ zusammenfallende Punkte $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}$ und noch ein zweites Mal einem Punkte $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}_1$ (der nicht auf der Verbindungslinie des vorigen Paares liegt) zusammenfallende Punkte $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{d}$ entsprechen, dann wird sie immer erfüllt, und die kollinearen Ebenen liegen involutorisch, d. h. jedem Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ entprechen zusammenfallende Punkte $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{y}$. Die Verbindungslinien aller solcher Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{y}$ laufen durch einen festen Punkt $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$, einen Doppelpunkt; gleichzeitig entsprechen jedem in doppeltem Sinne aufgefaſsten Strahl $x = y_1$ der kollinearen Ebenen zwei zusammenfallende Strahlen $x_1 = y$ und die Schnittpunkte solcher Paare konjugierter Strahlen $x = y_1$ und $x_1 = y$ liegen sämtlich auf einer festen Geraden $s = s_1$, einem Doppelstrahle. Alle durch den festen Punkt $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$ gehenden Strahlen sind Doppelstrahlen und alle auf der festen Geraden $s = s_1$ liegenden Punkte sind Doppelpunkte der zusammenliegenden kollinearen Ebenen. Jedes Paar konjugierter Punkte wird durch $\mathfrak{o}$ und s harmonisch getrennt und jedes Paar konjugierter Strahlen ebenfalls. Da durch zwei nicht in derselben Geraden liegende Paare $\begin{matrix}\mathfrak{a} & \mathfrak{b}\\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1\end{matrix}$ und $\begin{matrix}\mathfrak{c} & \mathfrak{d}\\ \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{c}_1\end{matrix}$ die kollineare Beziehung der beiden Ebenen $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d}\\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1\end{matrix}\right\}$ vollständig bestimmt ist, so ist auch die kollineare Involution von Punktepaaren in der Ebene durch zwei Paare konjugierter Punkte vollständig bestimmt.

Eine solche Beziehung, wie sie die involutorische Lage

zweier kollinearen Ebenen liefert, ist auch „harmonische Verwandtschaft“*) genannt worden und liefert als Transformationsprinzip aufgefaſst bemerkenswerte Resultate, z. B. bewegt sich der Punkt $\mathfrak{x}$ auf einem Kreise, so beschreibt der entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ einen Kegelschnitt; hat jener Kreis zum Mittelpunkt den reellen Doppelpunkt $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$, so hat der entsprechende Kegelschnitt diesen Punkt zum Brennpunkt, und dies ist eine Quelle, aus welcher in ungezwungener Weise die Brennpunktseigenschaften des Kegelschnitts aus den Eigenschaften des Kreises abgeleitet werden können. Was die Möglichkeit der involutorischen Lage zweier kollinearen zusammenfallenden Ebenen betrifft, so zeigte unsere Betrachtung Folgendes:

Zwei allgemein gegebene kollineare Ebenen lassen sich nicht involutorisch aufeinander legen; vielmehr müssen sie die Bedingung erfüllen, daſs die besonderen Strahlenpaare ss' und s_1s_1', welche die Träger entsprechender gleicher Punktreihen der beiden kollinearen Ebenen sind, in der einen Ebene denselben Abstand von einander haben, wie in der andern Ebene. Ist diese Bedingung erfüllt, und werden die Ebenen alsdann so zusammengelegt, daſs das eine Paar ss_1 identisch zur Deckung gelangt, dann befinden sie sich in involutorischer Lage, und es fallen die der unendlich-entfernten entsprechenden Geraden r und q_1 zusammen, sowie ein Paar entsprechender gleicher Strahlenbüschel $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$.

Hieraus folgt, daſs die involutorische Lage zweier kollinearen Ebenen, insbesondere aus der perspektivischen Lage auf folgende einfache Weise hervorgebracht werden kann:

Man versetze zwei beliebig liegende ebene Träger ε und ε_1 dadurch in kollineare Beziehung zu einander, daſs man durch einen Punkt $\mathfrak{O}$, der von beiden Ebenen gleich weit absteht, Strahlen zieht und jeden Strahl in zwei entsprechen-

*) Milinowski: Zur Theorie der Kegelschnitte, Borchardt's Journal f. reine u. angew. Mathematik. Bd. 86, S. 290.

den Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ die Ebenen ε und ε_1 treffen läſst. Dreht man hierauf die eine Ebene mit ihren Punkten um die festgehaltene Durchschnittslinie $s(s_1)$ so weit herum, bis die anfänglich dem Punkte $\mathfrak{O}$ zugekehrten Seiten beider Ebenen zusammenfallen, dann befinden sich die zusammenliegenden kollinearen Ebenen in involutorischer Lage.*)

Die dual-gegenüberstehende Untersuchung zweier kollinearen Bündel, welche konzentrisch in involutorische Lage gestellt werden sollen, wird hier unterlassen, weil sie der vorstehenden ohne Schwierigkeit nachgebildet werden kann oder durch die Perspektive zweier involutorisch-zusammenliegenden kollinearen Ebenen erhalten wird. Wir heben nur das Resultat hervor:

Gehen durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ ein fester Strahl d und eine feste Ebene δ, so lassen sich alle Strahlen und Ebenen durch $\mathfrak{O}$ dergestalt paarweise einander zuordnen, daſs irgend einem Strahle x derjenige Strahl x_1 entspricht, welcher zu den drei Strahlen d, $|\delta[dx]|$, x der vierte harmonische dem x zugeordnete ist, und irgend einer Ebene ξ diejenige Ebene ξ_1 entspricht, welche zu den drei Ebenen δ, $[d,|\delta\xi|]$, ξ die vierte harmonische der Ebene ξ zugeordnete ist. Dann bilden xx_1 und $\xi\xi_1$ entsprechende Elemente zweier konzentrischen kollinearen Bündel in involutorischer Lage. Der Strahl d und alle Strahlen in der Ebene δ (durch $\mathfrak{O}$) sind Doppelstrahlen, die Ebene δ und alle Ebenen durch d sind Doppelebenen der konzentrischen kollinearen Bündel. Zwei allgemein gegebene kollineare Bündel lassen sich nicht in eine solche involutorische Lage bringen, sondern nur dann, wenn sie die Bedingung erfüllen, daſs die beiden besonderen Strahlenpaare dd' und d_1d_1', welche die Axen entsprechender gleicher Ebenenbüschel sind, (S. 380) in beiden Bündeln gleiche Winkel einschlieſsen.

Hiernach ergiebt sich vermittelst der perspektivischen Lage folgende einfache Konstruktion für die involutorische Lage zweier kollinearen Bündel:

---

*) Siehe A. F. Möbius: Theorie der collinearen Involution von Punktepaaren in der Ebene und im Raume; Berichte d. K. Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften, 26. Okt. 1856.

Man nehme zwei beliebige Punkte $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ und lege durch die Mitte $\mathfrak{M}$ zwischen denselben eine beliebige Ebene ε. Bezieht man zwei kollineare Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ so auf einander, daſs jeder Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene ε mit $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ verbunden zwei entsprechende Strahlen x und x_1 der beiden Bündel liefert und verschiebt darauf das eine Bündel auf der festgehaltenen Verbindungslinie $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1|$, ohne es zu drehen, parallel mit sich, bis $\mathfrak{O}_1$ mit $\mathfrak{O}$ zusammenfällt, dann befinden sich die beiden kollinearen Bündel in involutorischer Lage.

§ 47. Trilineare Lage zweier zusammenliegenden kollinearen Ebenen.

Da zwei allgemein gegebene kollineare Ebenen nicht in involutorische Lage gebracht werden können, so wollen wir die Frage in folgender Art erweitern:

Lassen sich zwei kollineare Ebenen so auf einander legen, daſs entsprechende Punkte in der Weise auf einander fallen:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \text{auf resp.} \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_1, & \end{matrix}$$

d. h. wenn in einem beliebigen Punkte zwei nicht entsprechende Punkte $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}_1$ vereinigt sind, die ihnen entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$ auf ein anderes Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ fallen, oder daſs zwei entsprechende kongruente Dreiecke in cyklischer Vertauschung auf einander fallen.

Hier zeigt sich zunächst, *daſs dies immer stattfindet, sobald es einmal eintritt.* In der That, nehmen wir an, daſs die drei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ zweier zusammenliegenden kollinearen Ebenen in der Weise auf einander fallen:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \text{auf resp.} \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_1, & \end{matrix}$$

und sei $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ ein beliebiges viertes Paar entsprechender Punkte, wodurch die kollineare Beziehung gerade bestimmt ist; bezeichnen wir den mit $\mathfrak{x}$ zusammenfallenden Punkt der Ebene ε_1 durch $\mathfrak{y}_1$ und den mit $\mathfrak{x}_1$ zusammenfallenden Punkt der Ebene

ε durch $\mathfrak{z}$, so lassen sich die entsprechenden Punkte $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}_1$ konstruieren, und es zeigt sich, dafs dieselben zusammenfallen müssen; denn wir haben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}|\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}\mathfrak{y}| &\barwedge \mathfrak{a}_1|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1| \\ &\barwedge \mathfrak{c}|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}| \\ &\barwedge \mathfrak{c}|\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|, \end{aligned}$$

woraus folgt, dafs sich die drei Geraden:

$$|\mathfrak{b}\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{c}\mathfrak{x}_1|,\ |\mathfrak{a}\mathfrak{y}|$$

in einem Punkte schneiden müssen; zweitens ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}|\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{y}| &\barwedge \mathfrak{b}_1|\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1| \\ &\barwedge \mathfrak{a}|\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}| \\ &\barwedge \mathfrak{a}|\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|, \end{aligned}$$

woraus folgt, dafs sich die drei Geraden:

$$|\mathfrak{c}\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{a}\mathfrak{x}_1|,\ |\mathfrak{b}\mathfrak{y}|$$

in einem Punkte schneiden müssen; endlich ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}\mathfrak{y}| &\barwedge \mathfrak{c}_1|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1| \\ &\barwedge \mathfrak{b}|\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}| \\ &\barwedge \mathfrak{b}|\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|, \end{aligned}$$

woraus folgt, dafs sich die drei Geraden:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1|,\ |\mathfrak{c}\mathfrak{y}|$$

in einem Punkte schneiden müssen; von den drei Bedingungen, dafs sich

$$1.\quad \begin{cases} |\mathfrak{a}\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1|,\ |\mathfrak{c}\mathfrak{y}| \text{ in einem Punkte treffen,} \\ |\mathfrak{b}\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{c}\mathfrak{x}_1|,\ |\mathfrak{a}\mathfrak{y}| \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \\ |\mathfrak{c}\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{a}\mathfrak{x}_1|,\ |\mathfrak{b}\mathfrak{y}| \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \end{cases}$$

reichen schon zwei zur Bestimmung des Punktes $\mathfrak{y}$ aus, sobald wir die vier Paare entsprechender Punkte $\begin{cases} \mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{x} \\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1 \end{cases}$ zur Beziehung beider Ebenen auf einander als gegeben auffassen.

Wir können nun in analoger Weise den Punkt $\mathfrak{z}_1$ konstruieren, denn wir haben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_1|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1| &\barwedge \mathfrak{a}|\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}\mathfrak{z}|\\ &\barwedge \mathfrak{b}_1|\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1|\\ &\barwedge \mathfrak{b}_1|\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1|,\end{aligned}$$

also schneiden sich $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1|$, $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{y}_1|$, $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{z}_1|$ in einem Punkte; ferner ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_1|\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1| &\barwedge \mathfrak{b}|\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{z}|\\ &\barwedge \mathfrak{c}_1|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1|\\ &\barwedge \mathfrak{c}_1|\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1|,\end{aligned}$$

also schneiden sich $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1|$, $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{y}_1|$, $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{z}_1|$ in einem Punkte; endlich ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_1|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1| &\barwedge \mathfrak{c}|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}\mathfrak{z}|\\ &\barwedge \mathfrak{a}_1|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1|\\ &\barwedge \mathfrak{a}_1|\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1|,\end{aligned}$$

also schneiden sich $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1|$, $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{y}_1|$, $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{z}_1|$ in einem Punkte. Von den drei Bedingungen, dafs sich

$$2. \quad \begin{cases}|\mathfrak{b}_1\mathfrak{y}_1|,\ |\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1|,\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{z}_1| \text{ in einem Punkte treffen,}\\ |\mathfrak{c}_1\mathfrak{y}_1|,\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1|,\ |\mathfrak{b}_1\mathfrak{z}_1| \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}\\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{y}_1|,\ |\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1|,\ |\mathfrak{c}_1\mathfrak{z}_1| \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}\end{cases}$$

reichen schon zwei zur Bestimmung des Punktes $\mathfrak{z}_1$ aus, und wir erkennen durch Vergleichung der Bedingungen 2. und 1., dafs die je drei Linien in 2. identisch sind mit den gleichstelligen Linien in 1., folglich ist auch der Punkt $\mathfrak{y}$ mit dem Punkt $\mathfrak{z}_1$ identisch, d. h. es liegen die Dreiecke:

$$\begin{matrix}\mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z} & \text{und}\\ \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{x}_1 & \end{matrix}$$

cyklisch auf einander w. z. b. w.

Wir haben also den Satz:

Wenn zwei kollineare Ebenen so auf einander liegen, dafs einmal die Dreiecke:

$$\begin{matrix}\mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \text{und}\\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_1 & \end{matrix}$$

(wo $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ Paare entsprechender Punkte sind) cyklisch sich decken, so findet dies immer statt, d. h. wenn irgend einem in doppeltem Sinne aufgefafsten Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ ent-

sprechen, so liegen dieselben immer mit einem Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}_1$ zusammen, nämlich $\mathfrak{x}_1$ mit $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{z}_1$.

Es gruppieren sich demgemäfs zwei in dieser Weise auf einander liegende kollineare Ebenen zu Tripeln von Punkten, und wir wollen das dadurch entstehende Doppelgebilde trilineare Lage der beiden zusammenliegenden kollinearen Ebenen nennen.

Fassen wir zwei solche cyklisch auf einander liegende Dreieckspaare, wie oben, auf:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{x}_1, \end{matrix}$$

so wissen wir, dafs diese beiden Dreiecke auf dreifache Art perspektivisch*) liegen, nämlich:

$$\begin{cases} |\mathfrak{a}\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{b}\mathfrak{z}|,\ |\mathfrak{c}\mathfrak{y}| & \text{treffen sich in einem Punkte.} \\ |\mathfrak{a}\mathfrak{y}|,\ |\mathfrak{b}\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{c}\mathfrak{z}| & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \\ |\mathfrak{a}\mathfrak{z}|,\ |\mathfrak{b}\mathfrak{y}|,\ |\mathfrak{c}\mathfrak{x}| & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \end{cases}$$

Diese drei Punkte bilden ein neues drittes Dreieck, welches von den beiden ersten abhängt; bezeichnen wir seine Ecken durch

$$\begin{aligned} (|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|, |\mathfrak{b}\mathfrak{z}|) &= \mathfrak{l}, \quad \text{so ist } (|\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1|, |\mathfrak{b}_1\mathfrak{z}_1|) = \mathfrak{l}_1 = (|\mathfrak{c}\mathfrak{z}|, |\mathfrak{a}\mathfrak{y}|) = \mathfrak{n} \\ (|\mathfrak{a}\mathfrak{z}|, |\mathfrak{b}\mathfrak{y}|) &= \mathfrak{m}, \quad \text{,, \quad ,,} \quad (|\mathfrak{a}_1\mathfrak{z}_1|, |\mathfrak{b}_1\mathfrak{y}_1|) = \mathfrak{m}_1 = (|\mathfrak{c}\mathfrak{y}|, |\mathfrak{a}\mathfrak{x}|) = \mathfrak{l} \\ (|\mathfrak{a}\mathfrak{y}|, |\mathfrak{b}\mathfrak{x}|) &= \mathfrak{n}, \quad \text{,, \quad ,,} \quad (|\mathfrak{a}_1\mathfrak{y}_1|, |\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1|) = \mathfrak{n}_1 = (|\mathfrak{c}\mathfrak{x}|, |\mathfrak{a}\mathfrak{z}|) = \mathfrak{m}, \end{aligned}$$

wir haben also gefunden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} &= \mathfrak{m}_1 \\ \mathfrak{m} &= \mathfrak{n}_1 \\ \mathfrak{n} &= \mathfrak{l}_1, \end{aligned}$$

d. h. wir haben ein drittes Paar cyklisch auf einander liegender entsprechender Dreiecke:

$$\begin{matrix} \mathfrak{l} & \mathfrak{m} & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{m}_1 & \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{l}_1. \end{matrix}$$

Wir können also den Satz aussprechen:

---

*) Vergl. J. Rosanes: Über Dreiecke in perspektivischer Lage und H. Schröter: Über perspektivisch liegende Dreiecke, Math. Annalen v. Clebsch und Neumann. Bd. II, S. 549 u. 558.

Wenn man bei zwei auf einander liegenden kollinearen Ebenen in trilinearer Lage zwei cyklisch auf einander liegende Dreiecke auffaſst, so liegen dieselben auf drei verschiedene Arten perspektivisch, d. h. so, daſs drei Verbindungslinien ihrer Ecken durch einen Punkt laufen. Die drei dadurch erhaltenen Perspektivitätscentra bilden ein drittes Dreieck, welches gleichfalls aus drei cyklisch auf einander liegenden entsprechenden Punktepaaren der beiden kollinearen Ebenen besteht. Solche drei Dreiecke bilden eine in sich zurückkehrende Gruppe, indem je zwei dieser drei Dreiecke dreimal perspektivisch liegen, und die drei Perspektivitätscentra die Ecken des dritten Dreiecks sind.

Die letzte Behauptung lesen wir unmittelbar aus unseren obigen Bezeichnungen ab, indem wir erkennen, daſs

$|\mathfrak{a}\mathfrak{l}|$ $|\mathfrak{b}\mathfrak{n}|$ $|\mathfrak{c}\mathfrak{m}|$ sich im Punkte $\mathfrak{x}$ schneiden,
$|\mathfrak{b}\mathfrak{m}|$ $|\mathfrak{c}\mathfrak{l}|$ $|\mathfrak{a}\mathfrak{n}|$ „ „ „ $\mathfrak{y}$ „ ,
$|\mathfrak{c}\mathfrak{n}|$ $|\mathfrak{a}\mathfrak{m}|$ $|\mathfrak{b}\mathfrak{l}|$ „ „ „ $\mathfrak{z}$ „ ,

und ebenso:

$|\mathfrak{l}\mathfrak{x}|$ $|\mathfrak{m}\mathfrak{z}|$ $|\mathfrak{n}\mathfrak{y}|$ sich im Punkte $\mathfrak{a}$ schneiden,
$|\mathfrak{l}\mathfrak{z}|$ $|\mathfrak{m}\mathfrak{y}|$ $|\mathfrak{n}\mathfrak{x}|$ „ „ „ $\mathfrak{b}$ „ ,
$|\mathfrak{l}\mathfrak{y}|$ $|\mathfrak{m}\mathfrak{x}|$ $|\mathfrak{n}\mathfrak{z}|$ „ „ „ $\mathfrak{c}$ „ .

Wir wissen ferner, daſs wenn zwei Dreiecke perspektivisch liegen, die drei Schnittpunkte ihrer entsprechenden Seiten sich auf einer Geraden befinden (Th. d. K. S. 26). Bezeichnen wir demgemäſs die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ durch

$$a = |\mathfrak{b}\mathfrak{c}| \quad b = |\mathfrak{c}\mathfrak{a}| \quad c = |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$$

und des Dreiecks $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ durch

$$x = |\mathfrak{y}\mathfrak{z}| \quad y = |\mathfrak{z}\mathfrak{x}| \quad z = |\mathfrak{x}\mathfrak{y}|,$$

so werden die entsprechenden Strahlen a_1 b_1 c_1 x_1 y_1 z_1 zu a b c x y z folgende sein:

$$a_1 = |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| = |\mathfrak{a}\mathfrak{b}| = c \qquad x_1 = |\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1| = |\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = z$$
$$b_1 = |\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1| = |\mathfrak{b}\mathfrak{c}| = a \qquad y_1 = |\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1| = |\mathfrak{y}\mathfrak{z}| = x$$
$$c_1 = |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1| = |\mathfrak{c}\mathfrak{a}| = b \qquad z_1 = |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1| = |\mathfrak{z}\mathfrak{x}| = y,$$

woraus zunächst folgt, dafs die Dreiseite:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} x & y & z \\ y_1 & z_1 & x_1 \end{matrix}$$

cyklisch auf einander liegen, d. h.:

Wenn zwei zusammenliegende kollineare Felder rücksichtlich ihrer Punkte in trilinearer Lage sich befinden, so befinden sie sich auch rücksichtlich ihrer Strahlen in trilinearer Lage.

Aus der dreifach perspektivischen Lage folgt, dafs die Schnittpunkte:

(ax) (bz) (cy) auf einer Geraden l liegen,
(az) (by) (cx) „ „ „ m „
(ay) (bx) (cz) „ „ „ n „

Diese drei Geraden bilden selbst wieder ein neues Dreiseit, welches mit seinem entsprechenden cyklisch sich deckt:

$$\begin{matrix} l & m & n \\ m_1 & n_1 & l_1 \end{matrix};$$

da diese auf einander liegenden Dreiseite ein zyklisches Strahlentripel bilden, so bilden ihre Ecken wieder ein zyklisches Punkttripel, wie aus der Umkehrung des vorigen Resultates folgt; wir haben also zwei neue Tripel:

$$\begin{matrix} \mathfrak{l} & \mathfrak{m} & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{m}_1 & \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{l}_1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} l & m & n \\ m_1 & n_1 & l_1 \end{matrix}$$

aus den beiden gegebenen abgeleitet und können nun aus diesen in gleicher Weise wieder zwei neue ableiten, und indem wir sie mit den früheren paarweise in Verbindung setzen und die daraus entstehenden neuen Tripel wiederum unter einander verbinden, können wir immer mehr und mehr solcher Tripel konstruieren, welche allmählich das Operationsfeld der Ebene immer enger überspinnen.

Es drängt sich jetzt die Frage auf, ob zwei allgemein gegebene kollineare Felder sich immer in trilinearer Lage zur Deckung bringen lassen, und wie dies geschieht?

Es ist hierzu nur nötig, ein einziges Paar entsprechender

Tripel zu cyklischer Deckung zu bringen, dann wird dies bei allen übrigen von selbst der Fall sein. Werfen wir also zwei gegebene kollineare Ebenen zunächst beliebig auf einander, so haben die ausgezeichneten Geraden r und q_1, welche den unendlich-entfernten Geraden entsprechen, die Eigenschaft, daſs ihre unendlich-entfernten Punkte entsprechende sind; wir bezeichnen sie durch

$$\mathfrak{a}^{\infty} \text{ und } \mathfrak{a}_1^{\infty}.$$

Der Punkt $\mathfrak{a}^{\infty}$ liegt vereinigt mit einem gewissen Punkte $\mathfrak{b}_1^{\infty}$ des andern Feldes, und der Punkt $\mathfrak{a}_1^{\infty}$ liegt vereinigt mit einem gewissen Punkte $\mathfrak{c}^{\infty}$ des andern Feldes; den Punkten $\mathfrak{b}_1^{\infty}$ und $\mathfrak{c}^{\infty}$ entsprechen zwei bestimmte auf den Geraden r und q_1 liegende Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}_1$; wenn wir nun die beiden auf einander liegenden kollinearen Ebenen, ohne sie zu drehen, parallel mit sich, d. h. so, daſs jede der Geraden r und q_1 mit sich parallel bleibt, auf einander verschieben, bis $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}_1$ zusammenfallen, dann haben wir zwei auf einander liegende cyklisch sich entsprechende Dreiecke:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}^{\infty} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c}^{\infty} \\ \mathfrak{b}_1^{\infty} & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_1^{\infty}, \end{matrix}$$

also ist die trilineare Lage erreicht.

Wir können dazu noch auf eine andere Art gelangen; es giebt nämlich, wie wir wissen, zwei besondere Gerade e und e_1 in den beiden kollinearen Ebenen, welche sich entsprechen und beziehungsweise rechtwinklig stehen auf den Geraden r und q_1 (S. 365). Legen wir nun die gegebenen beiden kollinearen Ebenen so auf einander, daſs die Gerade e auf q_1 fällt und die Gerade e_1 auf r, dann liegen die beiden Dreiseite:

$$\begin{matrix} e & q^{\infty} & r \\ q_1 & r_1^{\infty} & e_1 \end{matrix}$$

cyklisch auf einander und bilden drei Paare entsprechender Strahlen, folglich befinden sich die zusammengelegten kollinearen Ebenen wiederum in trilinearer Lage. Wir können uns statt des besonderen Strahlenpaares $e\,e_1$ auch eines andern Strahlenpaares bedienen. Wenn wir durch irgend einen Punkt $\mathfrak{a}$ der Geraden r Strahlen ziehen in der Ebene ε, so

entsprechen denselben in der Ebene ε_1 Strahlen, welche sämtlich parallel laufen nach einem Punkte $\mathfrak{a}_1^\infty$ hin, also mit q_1 einen gewissen Winkel φ bilden. Ziehen wir nun durch $\mathfrak{a}$ einen solchen Strahl l, der mit r auch den Winkel φ bildet, und nehmen seinen entsprechenden Strahl l_1, so lassen sich die beiden Ebenen ε und ε_1 derartig auf einander legen, dafs r mit l_1 und q_1 mit l zusammen liegt, weil beide Paare denselben Winkel einschliefsen, also liegen die beiden Dreiseite:

$$\begin{matrix} r & l & q^\infty \\ l_1 & q_1 & r_1^\infty \end{matrix}$$

cyklisch auf einander, und wir haben wieder trilineare Lage. Wir haben also das Resultat:

Zwei allgemein gegebene kollineare Ebenen lassen sich auf unendlich-viele Arten zu trilinearer Lage vereinigen.

Es bleibt jetzt noch die Frage übrig, wie die Doppelelemente bei zwei zu trilinearer Lage vereinigten kollinearen Ebenen beschaffen sind; da im allgemeinen immer ein reeller Doppelpunkt $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$ und ein reeller Doppelstrahl $l = l_1$ vorhanden ist, so braucht nur die Frage beantwortet zu werden, wie die Doppelpunkte auf diesem reellen Doppelstrahl beschaffen sind, und hier zeigt sich, dafs dieselben immer konjugiert-imaginär sein müssen. Denn nehmen wir irgend einen Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ dieses Doppelstrahles $l = l_1$, so müssen die in beiderlei Sinn ihm entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ auch auf dem Doppelstrahle liegen, weil die Verbindungslinien $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = l$ und $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1| = l_1$ auf einander liegen; die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ müssen ferner wegen der trilinearen Lage auf einem Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ sich befinden, folglich liegen die beiden in dem Doppelstrahle $l = l_1$ befindlichen projektivischen Punktreihen selbst trilinear zusammen (Th. d. K. S. 81). Fassen wir insbesondere die zusammenliegenden unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{q}^\infty$ und $\mathfrak{r}_1^\infty$ des Doppelstrahls $l = l_1$ auf, so müssen die ihnen entsprechenden Punkte $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{r}$ (die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen) auf einem Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ liegen wegen der trilinearen Lage; da aber wegen der konstanten Potenz $\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 =$ konst. ist, und zugleich $\mathfrak{r}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1$ wird, so

müssen $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ die besonderen Punkte $\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}_1$ oder $\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}_1$ der projektivischen Punktreihen sein, welche wir Potenzpunkte genannt haben. Für die trilineare Lage der beiden auf $l = l_1$ zusammenliegenden projektivischen Punktreihen gilt also als Bedingung die Lage:

$$\begin{matrix} \mathfrak{r} & \mathfrak{g} & \mathfrak{q}^{\infty} & \text{auf resp.} \\ \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{r}_1^{\infty}, & \end{matrix}$$

daher sind sie gleichlaufend und der Abstand

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{g}\mathfrak{h},$$

mithin $\mathfrak{r}\mathfrak{q} < \mathfrak{g}\mathfrak{h}$; dies ist aber die Bedingung dafür, daſs die Doppelpunkte der beiden zusammenliegenden projektivischen Punktreihen $l\,l_1$ konjugiert-imaginär sind (Th. d. K. S. 42). Wir schlieſsen also:

Bei zwei in trilinearer Lage zusammenliegenden kollinearen Ebenen ist allemal nur einer der drei Doppelpunkte und einer der drei Doppelstrahlen reell; die auf diesem liegenden beiden andern Doppelpunkte sind konjugiert-imaginär, und die auf dem Doppelstrahl vereinigten projektivischen Punktreihen befinden sich selbst in trilinearer Lage.

Die dual-gegenüberstehende Untersuchung für zwei konzentrisch gelegte kollineare Bündel in trilinearer Lage wollen wir hier nicht mehr durchführen, weil sie ohne Schwierigkeit der vorigen nachgebildet werden kann oder durch die Perspektive des vorigen Resultats erhalten wird. Wir bemerken nur, daſs sich zwei kollineare Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ dadurch am einfachsten in trilineare Lage bringen lassen, daſs man die entsprechenden rechtwinkligen Dreikante derselben (S. 381) $r\,s\,t$ und $r_1\,s_1\,t_1$ ermittelt und dieselben so zur Deckung bringt, daſs auf einander fallen

$$\begin{matrix} r & s & t & \text{auf resp.} \\ s_1 & t_1 & r_1, & \end{matrix}$$

was immer möglich ist.

Die im Vorigen behandelte Frage läſst sich verallgemeinern und zeigen, daſs, wenn zwei kollineare Ebenen so auf einander liegen, daſs einmal entsprechende Vielecke cyklisch zur Deckung gelangen:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} & \ldots & \mathfrak{m} & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{e}_1 & \ldots & \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{a}_1 \end{matrix}$$

alsdann dies immer eintritt, mit welchem Punkte $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ man auch beginnen mag. Am einfachsten ist der zunächst liegende Fall:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{a}_1, \end{matrix}$$

in welchem diese vier Paare entsprechender Punkte gerade zur Bestimmung der kollinearen Beziehung ausreichend sind; hier ergeben sich der reelle Doppelpunkt und der reelle Doppelstrahl der zusammenliegenden kollinearen Ebenen unmittelbar, nämlich als Doppelpunkt:

$$(|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|, |\mathfrak{b}\mathfrak{d}|) = (|\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1|, |\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1|)$$

und als Doppelstrahl:

$$|(|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|), (|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|, |\mathfrak{b}\mathfrak{c}|)| = |(|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|, |\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1|), (|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|, |\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1|)|,$$

und es zeigt sich, dafs die auf dem Doppelstrahl vereinigten projektivischen Punktreihen involutorisch liegen und zwar eine elliptische Punktinvolution bilden.

Wenn man durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ denjenigen einzigen und völlig bestimmten Kegelschnitt legt, für welchen die Punktepaare $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ einander harmonisch trennen (harmonischer Kegelschnitt), so sind für diesen Kegelschnitt jener Doppelpunkt und jener Doppelstrahl Pol und Polare, und alle in gleicher Weise durch eine beliebige Punktgruppe $\begin{Bmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z} & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{t}_1 & \mathfrak{x}_1 \end{Bmatrix}$ gelegten Kegelschnitte haben dieselbe ideelle doppelte Berührung, indem für sämtliche der obige Doppelpunkt und Doppelstrahl Pol und Polare sind; jedoch müssen wir hier darauf verzichten, auf die allgemeine Frage weiter einzugehen, vielmehr den Leser auf die darüber veröffentlichten Arbeiten verweisen.*)

---

*) Siehe J. Lüroth: Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Math. Ann. Bd. XI, S. 84, und: Über cyklisch-projektivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume, Math. Ann. Bd. XIII, S. 303, sowie H. Reim: Wie müssen zwei projektivische Punktfelder auf einander gelegt werden, damit entsprechende kongruente Polygone cyklisch zusammenfallen? Inaug.-Dissertation. Breslau 1879.

§ 48. Besondere Fälle kollinearer Beziehung: Affinität, Ähnlichkeit, Gleichheit.

Wir ziehen jetzt den bisher (S. 364) ausgeschlossenen Fall in Betracht, wenn bei zwei kollinearen Ebenen die unendlich-entfernten Geraden einander entsprechen, also r mit q^∞ und q_1 mit r_1^∞ zusammenfallen (ohne daſs dabei die Punktreihen auf diesen unendlich-entfernten entsprechenden Geraden gleich zu sein brauchen); in diesem Falle nennen wir die kollineare Beziehung **Affinität**, und die ebenen Felder selbst **affin**. Nehmen wir irgend zwei entsprechende Strahlen x und x_1 der affinen Ebenen ε und ε_1, so sehen wir, daſs dieselben Träger projektivisch-ähnlicher Punktreihen sein müssen, weil die unendlich-entfernten Punkte (xq^∞) und $(x_1 q_1^\infty)$ entsprechende sind. Da bei ähnlichen Punktreihen entsprechende Strecken in konstantem Verhältnis zu einander stehen, so wird, wenn $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ irgend drei Punkte des Strahles x und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ die entsprechenden Punkte des Strahles x_1 sind, die Beziehung gelten:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}.$$

Da bei affinen Ebenen die unendlich-entfernten Geraden einander entsprechen, so genügen zur Bestimmung der Beziehung **drei beliebig angenommene Paare** entsprechender Strahlen abc und $a_1 b_1 c_1$ (die nicht durch einen Punkt gehen), also ein wirkliches Dreiseit oder Dreieck in jeder der Ebenen ε und ε_1 bilden (S. 347); dann ist zu jeder beliebigen Geraden g in der Ebene ε die entsprechende Gerade g_1 in der Ebene ε_1 zu konstruieren etwa auf folgende Art:

Seien $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ die Ecken der beiden zur Beziehung der affinen Ebenen ε und ε_1 gegebenen Dreiecke, und möge eine beliebige Gerade g den Seiten $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ des ersten Dreiecks in den Punkten $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ begegnen, so daſs also bekanntlich:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{b}}{\mathfrak{x}\mathfrak{c}} \cdot \frac{\mathfrak{y}\mathfrak{c}}{\mathfrak{y}\mathfrak{a}} \cdot \frac{\mathfrak{z}\mathfrak{a}}{\mathfrak{z}\mathfrak{b}} = 1$$

ist, dann bestimme man auf den Seiten des entsprechenden Dreiecks $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ die Punkte $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1$ so, daſs die Verhältnisse

$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{b}}{\mathfrak{x}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{c}_1}$; $\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{c}}{\mathfrak{y}\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{y}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{a}_1}$; $\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{a}}{\mathfrak{z}\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{z}_1\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{z}_1\mathfrak{b}_1}$ ihrem Werte und Vorzeichen nach dieselben werden, dann werden die drei Punkte $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1$ der Ebene ε_1 in der entsprechenden Geraden g_1 liegen, denn es ist auch:

$$\frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{c}_1} \cdot \frac{\mathfrak{y}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{a}_1} \cdot \frac{\mathfrak{z}_1\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{z}_1\mathfrak{b}_1} = 1;$$

durch zwei dieser Verhältnisse ist also das dritte schon bestimmt, wie denn auch durch zwei der Punkte $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1$ die Gerade g_1 schon bestimmt wird. Da man zu jeder Geraden g der Ebene ε die entsprechende Gerade g_1 der Ebene ε_1 konstruieren kann, so kann man auch zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ den entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}_1$ konstruieren etwa wie folgt:

Man bestimme den Schnittpunkt $(|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|, |\mathfrak{b}\mathfrak{c}|) = \mathfrak{d}$ und $(|\mathfrak{b}\mathfrak{x}|, |\mathfrak{c}\mathfrak{a}|) = \mathfrak{e}$ und bestimme die Punkte $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{e}_1$ in der Ebene ε_1, so daſs

$$\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1}; \quad \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}\mathfrak{e}} = \frac{\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{e}_1}, \text{ dann ist}$$

$$(|\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1|, |\mathfrak{b}_1\mathfrak{e}_1|) = \mathfrak{x}_1.$$

Da jedes Paar entsprechender Geraden die Träger ähnlicher Punktreihen sind, so fragt sich, ob unter diesen ähnlichen Punktreihen auch g l e i c h e vorkommen. Dies wird der Fall sein, sobald nur irgend ein Paar entsprechender gleicher Strecken $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ in den affinen Ebenen vorkommt; tritt dies nämlich ein, so werden die Verbindungslinien $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ und $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1|$ die Träger entsprechender ähnlicher Punktreihen sein und, da das Verhältnis $\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1} = 1$ ist, so müssen die Punktreihen gleich sein; aber nicht nur diese, sondern jede Gerade, die zu $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ parallel ist, wird zur entsprechenden Geraden in der Ebene ε_1 eine Parallele zu $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1|$ haben, und diese beiden neuen Geraden werden ebenfalls Träger entsprechender gleicher Punktreihen sein, wie offenbar einleuchtet. Wir erhalten also zugleich ein ganzes System von entsprechenden gleichen Punktreihen, die in jeder der Ebenen ε und ε_1 ein Büschel von Parallelstrahlen bilden. Die vorliegende Frage läſst sich also auf folgende reduzieren:

Wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ die zur Bestimmung der affinen

Ebenen ε und ε_1 beliebig angenommenen Dreiecke sind, so

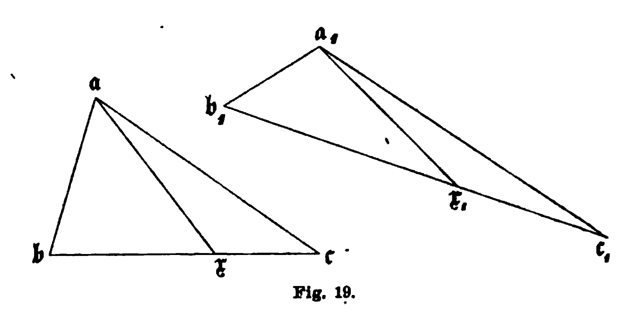


Fig. 19.

sollen in den Seiten $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|$ zwei solche Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ bestimmt werden, dafs

$$1)\qquad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1} \text{ und}$$

$$2)\qquad \mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1$$

wird, dann sind die Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1|$ offenbar Träger entsprechender gleicher Punktreihen (Fig. 19).

Um diese elementare Aufgabe zu lösen, stellen wir zunächst folgende kleine Rechnung an:

Bekanntlich gelten die Beziehungen:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{x}\mathfrak{c}} + \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{b}\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}} + \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{c}\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = 1,$$

$$\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1^2}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{b}_1\,.\,\mathfrak{x}_1\mathfrak{c}_1} + \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1^2}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1\,.\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1} + \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1^2}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1\,.\,\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1} = 1.$$

Aus der Bedingung $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1$ folgt:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{x}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2\,.\,\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{x}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}^2\,.\,\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$$

$$= \mathfrak{x}_1\mathfrak{b}_1\,.\,\mathfrak{x}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1^2\,.\,\frac{\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1} + \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1^2\,.\,\frac{\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1}.$$

Bezeichnen wir den unbekannten Wert:

$$\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = w = \frac{\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1}, \text{ also}$$

$$\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{x}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = 1 - w = \frac{\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{c}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}^2} = w(w-1) = \frac{\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1\,.\,\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1^2},$$

so ergiebt sich:

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1^2 - \mathfrak{b}\mathfrak{c}^2)\, w\,(w - 1) + (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{c}\mathfrak{a}^2)\, w$$
$$+ (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\,(1 - w) = 0;$$

bezeichnen wir die drei gegebenen Werte:

$$\begin{cases} \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1^2 - \mathfrak{b}\mathfrak{c}^2 = \alpha \\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{c}\mathfrak{a}^2 = \beta \\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2 = \gamma, \end{cases}$$

so ergiebt sich für w die quadratische Gleichung:

$$\alpha w^2 + (\beta - \gamma - \alpha)\, w + \gamma = 0,$$

welche nur dann reelle Wurzeln hat, wenn

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\,(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) > 0.^{*})$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so giebt es durch den Punkt $\mathfrak{a}$ zwei reelle Strahlen, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. In gleicher Weise können wir von der Ecke $\mathfrak{b}$ oder der Ecke $\mathfrak{c}$ des Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ausgehen und die analoge Betrachtung anstellen. Wie aus der Symmetrie der gefundenen Bedingung hervorgeht rücksichtlich der Gröfsen $\alpha\ \beta\ \gamma$, bleibt diese dabei ungeändert; es giebt also auch durch $\mathfrak{b}$ und durch $\mathfrak{c}$ zwei Strahlen von der verlangten Art. Es ist aber leicht zu erkennen, dafs diese keine neuen Richtungen liefern; denn ist $\mathfrak{x}$ einer der beiden auf $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ gefundenen Punkte von der verlangten Art und ziehen wir durch $\mathfrak{b}$ eine Parallele zu $\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}$, welche der Gegenseite $\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}$ in dem Punkte $\mathfrak{y}$ begegnet, so wird der entsprechende Punkt $\mathfrak{y}_1$ wegen der Affinität der Ebenen durch die Bedingung gefunden:

$$\frac{\mathfrak{c}_1\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1} = \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{y}}{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1},$$

folglich ist $|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{y}_1|$ parallel $|\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{a}_1|$; da sich ferner verhält

$$\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1} = \frac{\mathfrak{y}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1}$$

und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}_1$ ist, so folgt auch $\mathfrak{y}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{y}_1\,\mathfrak{b}_1$; folglich sind $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ die gesuchten Punkte auf $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1|$; ziehen wir drittens durch $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ Parallele zu $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}_1|$, welche den Gegenseiten $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1|$ in $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$

---

*) Eine Bedingung, welche Möbius im barycentrischen Calcul S. 328 ohne Beweis angegeben hat.

begegnen, so sind dies die gesuchten Punkte auf der dritten Dreiecksseite. Die neuen Richtungen fallen also mit den früheren zusammen; wir können mithin sagen, es giebt nur zwei bestimmte Richtungen in der Ebene ε und die entsprechenden in der Ebene ε_1 von solcher Beschaffenheit, dafs zwei entsprechende Gerade in den affinen Ebenen, die diesen Richtungen parallel laufen, die Träger entsprechender gleicher Punktreihen sind. Wird die vorige Bedingung dagegen nicht erfüllt, so giebt es überhaupt keine gleichen entsprechenden Punktreihen in den affinen Ebenen. (Welches ist die einfachste geometrische Interpretation dieser Bedingung?)

Nachdem wir uns über die Möglichkeit der Auflösung unserer vorliegenden Aufgabe orientiert haben, läfst sich nun die Konstruktion selbst auf rein-geometrischem Wege, etwa wie folgt, herstellen:

Wenn wir in dem Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}$ das Perpendikel $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ herablassen, so lassen sich die Punkte der Geraden $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$ paarweise ordnen, symmetrisch liegend zu $\mathfrak{p}$, d. h. wenn $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ ein solches Punktepaar ist, so wird

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{x}'$$

sein; die Punktepaare $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ bilden dann eine gleichseitig-hyperbolische Punktinvolution. Dieser entspricht in der Ebene ε_1 auf der Geraden $|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1|$ ebenfalls eine gleichseitig-hyperbolische Punktinvolution, gebildet von denjenigen Punktepaaren $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_1'$, welche gleich weit abstehen von dem Punkte $\mathfrak{p}_1$, der dem Punkte $\mathfrak{p}$ entspricht. Dies folgt aus der Ähnlichkeit der Punktreihen auf $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1|$, welche durch die Affinität der Ebenen gegeben ist. Zweitens können wir aber auf der Geraden $|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1|$ eine zweite gleichseitig-hyperbolische Punktinvolution herstellen, deren einer Doppelpunkt der Fufspunkt $\mathfrak{q}_1$ des aus $\mathfrak{a}_1$ auf $|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1|$ herabgelassenen Perpendikels ist; die Punktepaare $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1'$ genügen also der Bedingung:

$$\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_1\,\mathfrak{y}_1'\,.$$

Wir können endlich die Punktinvolution $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}')$ zu der Punktinvolution $(\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1')$ dadurch in Beziehung setzen, dafs wir mit demselben Radius einmal um $\mathfrak{a}$ einen Kreis schlagen, welcher die Gerade $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$ in dem Punktepaar $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ trifft, und zweitens um $\mathfrak{a}_1$ einen Kreis schlagen, welcher die Gerade

$|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1|$ in dem Punktepaar $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1'$ schneidet; demgemäſs entspricht dem Punktepaar $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ das Punktepaar $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1'$, und die beiden von diesen Punktepaaren beschriebenen Involutionen werden dadurch in projektivische Beziehung gesetzt. Um dies zu erkennen, brauchen wir uns nur ein Büschel konzentrischer Kreise zu denken und durch dieselben einmal in dem Abstande $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}$ vom Mittelpunkte eine Sekante und zweitens in dem Abstande $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{q}_1$ vom Mittelpunkte eine andere Sekante zu ziehen, dann schneidet ein und derselbe Kreis immer entsprechende Punktepaare $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1'$ auf den beiden Sekanten aus; die beiden Involutionen werden also durch dasselbe Büschel konzentrischer Kreise ausgeschnitten und ein solches Büschel ist ein specieller Fall eines Kegelschnittbüschels (Th. d. K. S. 345); die Involutionen, welche $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1'$ beschreiben, sind daher projektivisch. Ferner sind auch die von den Punktepaaren $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_1'$ beschriebenen Punktinvolutionen projektivisch, wie unmittelbar aus der Ähnlichkeit der Punktreihen hervorgeht, deren Träger $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1|$ sind; folglich müssen auch die von $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1'$ und $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_1'$ beschriebenen Punktinvolutionen auf demselben Träger $|\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1|$ projektivisch sein, d. h. es gehört nach unserer Konstruktion zu jedem Punktepaar $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1'$ ein bestimmtes entsprechendes Punktepaar $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_1'$. Sobald es nun einmal vorkommt, daſs einer der Punkte $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1'$ mit einem des entsprechenden Punktepaars $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_1'$ zusammenfällt, wird die Aufgabe gelöst sein. Wir reduzieren die Punktinvolutionen $(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_1')$ und $(\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1')$ leicht auf einfache Strahlenbüschel (Th. d. K. S. 266), indem wir uns in bekannter Weise eines Hilfskegelschnitts bedienen. Legen wir z. B. durch $\mathfrak{a}_1$ einen beliebigen Kegelschnitt $C^{(2)}$ (oder Kreis), so durchbohren die Strahlenpaare $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}_1|$ und $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}_1'|$ den Kegelschnitt in Punktepaaren, deren Sehnen durch einen festen Punkt $\mathfrak{x}_0$ der Ebene ε_1 laufen; ebenso durchbohren die Strahlenpaare $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{y}_1|$ und $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{y}_1'|$ den Kegelschnitt $C^{(2)}$ in Punktepaaren, deren Sehnen durch einen zweiten festen Punkt $\mathfrak{y}_0$ der Ebene ε_1 laufen; dadurch erhalten wir $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ als Mittelpunkte zweier einfachen Strahlenbüschel, welche projektivisch sein müssen wegen der Projektivität der Punktinvolutionen; diese projektivischen Strahlenbüschel liegen aber perspektivisch; denn in dem un-

endlich-entfernten Punkte von $|\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1|$ fällt sowohl ein Punktepaar der Involution $(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_1')$, als auch das entsprechende Punktepaar der Involution $(\mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_1')$ zusammen; ziehen wir also durch $\mathfrak{a}_1$ eine Parallele zu $|\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1|$, so durchbohrt dieselbe den Kegelschnitt $C^{(2)}$ in einem Punkte, dessen Tangente sowohl $\mathfrak{x}_0$ als $\mathfrak{y}_0$ enthält und zwei entsprechende Strahlen der beiden Strahlenbüschel vereinigt; diese liegen also perspektivisch, und ihr perspektivischer Durchschnitt wird eine Gerade sein, welche dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ in zwei Punkten begegnet, die mit $\mathfrak{a}_1$ verbunden auf $|\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1|$ die beiden gesuchten Punkte bestimmen, welche die Lösungen der Aufgabe enthalten; je nachdem die konstruierte Gerade den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten schneidet, berührt oder nicht schneidet, werden die beiden Auflösungen reell oder zusammenfallend oder konjugiert-imaginär sein, wofür die algebraische Bedingung vorhin ermittelt ist.

Wir haben also folgendes Resultat:

Es giebt in zwei affinen Ebenen entweder gar keine oder in jeder Ebene zwei bestimmte Richtungen (die auch zusammenfallen können) von der Beschaffenheit, dafs jede zu einer solchen Richtung parallele Gerade und die ihr entsprechende die Träger projektivisch-gleicher Punktreihen der affinen Ebenen sind. Die Bedingung dafür, dafs der eine oder der andere Fall eintritt, ist auf S. 415 angegeben worden.

Sind in den beiden gegebenen affinen Ebenen ε und ε_1 zwei gleiche entsprechende Punktreihen vorhanden und vermittelst der vorigen Konstruktion gefunden, so lassen sich die Ebenen allemal in perspektivische Lage bringen dadurch, dafs wir in der Schnittlinie der Träger zwei entsprechende gleiche Punktreihen identisch vereinigen; dann befinden sie sich allemal in perspektivischer Lage, unabhängig von ihrer Neigung zu einander. Denn die in der Schnittlinie $l(l_1)$ vereinigten gleichen entsprechenden Punktreihen vertreten zwei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$; nehmen wir noch ein drittes Paar $(\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1)$ beliebig an, so ist die affine Beziehung vollständig bestimmt; da die unendlich-entfernten Geraden g^∞ und g_1^∞ beider Ebenen entsprechende sind und in einer Ebene ε^∞ liegen, so trifft diese den Verbindungsstrahl $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1|$ in dem

unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{O}^\infty$, welcher Projektionspunkt der beiden affinen Ebenen ist. Jede durch $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1|$ gelegte Ebene schneidet nicht nur $l = l_1$ in zwei vereinigten entsprechenden Punkten, sondern auch g^∞ und g_1^∞ in entsprechenden Punkten; folglich liegen die entsprechenden Punktreihen auf g^∞ und g_1^∞ perspektivisch und haben zu ihrem Projektionspunkt den unendlich-entfernten Punkt $\mathfrak{O}^\infty$ von $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1|$. Hieraus folgt, dafs alle übrigen Projektionsstrahlen $|\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1|$ durch denselben Punkt $\mathfrak{O}^\infty$ laufen müssen, also die affinen Ebenen in perspektivischer Lage sich befinden. Wir haben also folgendes Ergebnis:

Zwei affine Ebenen lassen sich entweder gar nicht oder auf zwiefach-unendlich-viele Arten in perspektivische Lage bringen, indem in der Schnittlinie ihrer Träger zwei entsprechende gleiche Punktreihen derselben zur Deckung gebracht werden. Die Verbindungslinien aller Paare entsprechender Punkte bilden dann allemal ein Bündel von Parallelstrahlen.

Die im Vorigen gelöste Aufgabe läfst sich demnach auch so aussprechen:

Es sind zwei beliebige ebene Dreiecke $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ gegeben; dieselben sollen im Raume so gestellt werden, dafs die drei Verbindungsstrahlen $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1|$, $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1|$ parallel laufen.

Es ist unmittelbar einzusehen, dafs entsprechende gleiche Strahlenbüschel bei zwei affinen Ebenen nicht vorkommen können, denn wären $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ die Mittelpunkte entsprechender gleicher Strahlenbüschel der affinen Ebenen $\varepsilon\,\varepsilon_1$, so müfsten die unendlich-entfernten Geraden g^∞ und g_1^∞ in entsprechenden gleichen Punktreihen geschnitten werden, was im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht. Oder anders ausgedrückt: Sind $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1$ entsprechende Dreiecke der affinen Ebenen, und sollen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ die Mittelpunkte entsprechender gleicher Strahlenbüschel sein, so müssen nicht allein die Winkel zwischen den Strahlen $|\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}|$, $|\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}|$ und $|\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1|$, $|\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{z}_1|$ gleich sein, sondern auch die durch $\mathfrak{x}$ zu $|\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}|$ parallel gezogene Gerade mufs mit $|\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}|$ und $|\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}|$ dieselben Winkel bilden, wie die durch $\mathfrak{x}_1$ mit $|\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1|$ parallel gezogene Gerade

mit den Strahlen $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1|$ und $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{z}_1|$, weil die unendlich-entfernten Punkte von $|\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$ und $|\mathfrak{y}_1 \mathfrak{z}_1|$ entsprechende sind. Daraus würde aber folgen, dafs die Dreiecke $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{z}_1$, weil sie gleiche Winkel haben, einander ähnlich sein müfsten, und da alsdann jedes Paar entsprechender Punkte mit den entsprechenden Punktreihen auf g^∞ und g_1^∞ verbunden zwei gleiche Strahlenbüschel liefern müfste, so müfsten alle entsprechenden Dreiecke ähnlich sein, also auch die zur Bestimmung der affinen Beziehung gegebenen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1$, was nicht der Fall zu sein braucht: Wir schliefsen also:

Wenn bei zwei affinen Ebenen ein Paar entsprechender gleicher Strahlenbüschel vorkommt, so sind sämtliche Paare entsprechender Strahlenbüschel einander gleich und sämtliche entsprechende Dreiecke einander ähnlich, also je zwei entsprechende Strecken stehen in konstantem Verhältnis zu einander.

Wir nennen in diesem Falle die affinen Ebenen ähnlich und bemerken, dafs zur Ähnlichkeit zweier ebenen Felder nicht allein erforderlich ist, dafs die unendlich-entfernten Geraden g^∞ und g_1^∞ einander entsprechen, sondern aufserdem die projektivischen Punktreihen, deren Träger g^∞ und g_1^∞ sind, einander gleich sind, d. h. wenn man von irgend einem endlichen Punkte $\mathfrak{p}$ ein Strahlenbüschel zieht nach der Punktreihe auf g^∞, dieses Strahlenbüschel gleich ist demjenigen, welches man erhält, wenn man irgend einen endlichen Punkt $\mathfrak{p}_1$ mit den entsprechenden Punkten auf g_1^∞ verbindet. Wir wollen dies kurz dadurch ausdrücken, dafs wir die entsprechenden Punktreihen auf g^∞ und g_1^∞ gleich nennen. Bei zwei projektivisch-ähnlichen Feldern sind also sämtliche Paare entsprechender Strahlenbüschel einander gleich und irgend zwei entsprechende Strecken stehen in demselben konstanten Verhältnis zu einander:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1} = \text{konst.},$$

was bei affinen Ebenen nicht der Fall ist. Daher können bei ähnlichen Feldern keine zwei gleichen entsprechenden Punktreihen vorkommen, es sei denn, dafs der konstante Wert $= 1$ sei, alsdann sind aber alle entsprechenden Strecken

einander gleich und in diesem Falle heifsen die kollinearen Ebenen gleich (oder kongruent).

Zur Bestimmung zweier projektivisch-ähnlichen Ebenen, bei denen die unendlich-entfernten Geraden g^∞ und g_1^∞ entsprechend und die Träger gegebener gleicher Punktreihen sind, genügen zwei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$; man erhält zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Ebene ε den entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}_1$ der Ebene ε_1, indem man ein dem Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}$ ähnliches Dreieck $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1$ konstruiert, von dem die Seite $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ gegeben ist; die dabei eintretende Zweideutigkeit wird dadurch gehoben, dafs man die auf g^∞ und g_1^∞ gegebenen gleichen Punktreihen fixiert; das Verhältnis $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}$ giebt den konstanten Wert des Verhältnisses je zweier entsprechenden Strecken.

Zur Bestimmung zweier projektivisch-gleichen Ebenen ist nur ein Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ notwendig, weil der Wert des konstanten Verhältnisses $= 1$ gegeben ist.

Zwei projektivisch-ähnliche Punktfelder lassen sich sehr leicht dadurch in perspektivische Lage bringen, dafs man die unendlich-entfernten Geraden g^∞ und g_1^∞ mit ihren gleichen entsprechenden Punktreihen zur Deckung bringt, wobei also die Träger ε und ε_1 selbst in parallele Lage kommen; alsdann müssen die Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|$, deren unendlich-entfernte Punkte entsprechende sind, also auf $g^\infty = g_1^\infty$ zusammenfallen, parallel sein, folglich in einer Ebene liegen; es müssen also auch $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ in einem Punkte $\mathfrak{O}$ sich treffen, und durch diesen gehen offenbar alle Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte; der Punkt $\mathfrak{O}$ liegt im Endlichen, so lange $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ nicht einander gleich sind, d. h. so lange das Verhältnis $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}$ von 1 verschieden ist. Zwei ähnliche Punktfelder lassen sich also immer auffassen als die Durchschnitte zweier parallelen Ebenen durch ein Strahlenbündel. Sind endlich die in perspektivische Lage gebrachten projektivisch-ähnlichen Punktfelder insbesondere gleich, so geht der Projektionspunkt $\mathfrak{O}$ in die Unendlichkeit oder steht gleich weit von den beiden parallelen Trägern ab. Zwei gleiche Punktfelder

lassen sich also immer auffassen als die Durchschnitte zweier parallelen Ebenen durch ein Strahlenbündel von Parallelstrahlen, während irgend zwei nicht parallele Ebenen durch dasselbe nur in affinen Punktfeldern geschnitten werden.

Aber wir können zwei gleiche Punktfelder auch noch auf andere Art in perspektivische Lage bringen, indem wir ihre Träger so stellen, dafs irgend zwei endliche entsprechende gleiche Punktreihen in der Schnittlinie zur Deckung gelangen. Dann wird zwar auch noch der Projektionspunkt $\mathfrak{O}$ in die Unendlichkeit gehen, aber in eine der beiden besonderen unendlich-entfernten Geraden hineinfallen, in welchen die Halbierungsebenen der Winkel und Nebenwinkel zwischen den gegebenen Trägern die unendlich-entfernte Ebene ε^{∞} schneiden, und zwar wird $\mathfrak{O}$ einer derjenigen beiden Punkte sein, in welchen die eben genannten Linien von einer Ebene getroffen werden, die auf der Schnittlinie beider Träger normal steht.

§ 49. Ausgezeichnete Elemente zweier reziproken Gebilde.

Fassen wir zuerst zwei reziproke Ebenen ε und ε_1 ins Auge, bei denen also sämtlichen Punkten $\mathfrak{x}$ der Ebene ε die Strahlen x_1 in der Ebene ε_1, und gleichzeitig sämtlichen Strahlen y in der Ebene ε die Punkte $\mathfrak{y}_1$ der Ebene ε_1 dergestalt eindeutig entsprechen, dafs, wenn $\mathfrak{x}$ in y liegt, x_1 durch $\mathfrak{y}_1$ gehen mufs, und wenn $\mathfrak{x}$ eine gerade Punktreihe auf y beschreibt, x_1 ein mit derselben projektivisches Strahlenbüschel um $\mathfrak{y}_1$ beschreibt u. s. w. (S. 350). Bei den in solcher reziproken Beziehung rücksichtlich ihrer ungleichartigen Elemente zu einander stehenden Ebenen ε und ε_1 entspricht insbesondere der unendlich-entfernten Geraden q^{∞} der Ebene ε der Punkt $\mathfrak{q}_1$ der Ebene ε_1 und der unendlich-entfernten Geraden r_1^{∞} der Ebene ε_1 der Punkt $\mathfrak{r}$ der Ebene ε. Diese besonderen Punkte:

$$\mathfrak{r} \text{ und } \mathfrak{q}_1,$$

welche den unendlich-entfernten Geraden r_1^{∞} und q^{∞} der Ebenen ε_1 und ε entsprechen, sollen die Mittelpunkte der reziproken ebenen Felder heifsen. Zieht man durch $\mathfrak{r}$ Strahlen in der Ebene ε, welche Durchmesser heissen mögen, so entsprechen denselben die unendlich-ent-

fernten Punkte der Geraden r_1^∞, also dem durch $\mathfrak{r}$ gehenden Strahl x der auf r_1^∞ liegende Punkt $\mathfrak{x}_1^\infty$; wir nennen zwei Durchmesser x und $|\mathfrak{q}_1 \mathfrak{x}_1^\infty| = y_1$ konjugierte Durchmesser, weil auch dem Durchmesser $y_1 = |\mathfrak{q}_1 \mathfrak{x}_1^\infty|$ der Punkt $(q^\infty x)$, d. h. der unendlich-entfernte Punkt von x entspricht, also der Durchmesser x, welcher $\mathfrak{r}$ mit diesem unendlich-entfernten Punkte verbindet, konjugiert ist dem Durchmesser y_1. Wir erhalten dadurch mit $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ als Mittelpunkten zwei projektivische Strahlenbüschel, welche von je zwei konjugierten Durchmessern in den beiden Ebenen ε und ε_1 beschrieben werden. In jedem dieser beiden projektivischen Strahlenbüschel giebt es bekanntlich ein einziges bestimmtes Paar Strahlen, welche rechtwinklig zu einander sind, und deren entsprechende Strahlen auch zu einander rechtwinklig sind, die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel. Es giebt also in der Ebene ε zwei rechtwinklige Durchmesser a und b, deren konjugierte Durchmesser a_1 und b_1 in der Ebene ε_1 auch zu einander rechtwinklig sind, d. h. für die reziproke Beziehung entspricht dem Strahle a der unendlich-entfernte Punkt von a_1 und dem Strahle a_1 der

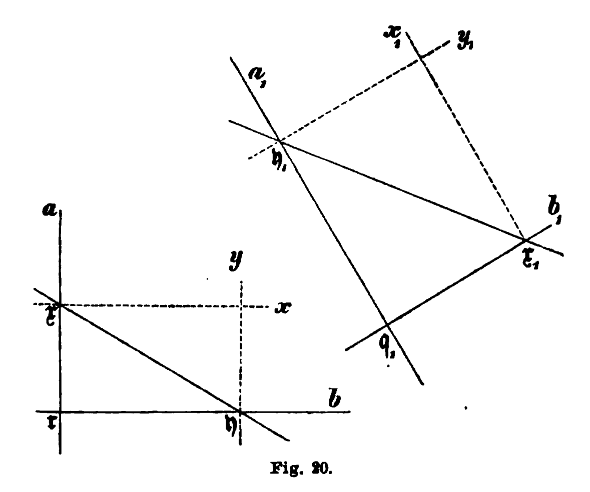


Fig. 20.

unendlich-entfernte Punkt von a und ebenso für b und b_1. Diese besonderen Paare konjugierter Durchmesser ab und $a_1 b_1$ sollen die Axen der reziproken Ebenen genannt werden;

bezeichnen wir die unendlich-entfernten Punkte derselben durch $\mathfrak{a}^\infty \mathfrak{b}^\infty \mathfrak{a}_1^\infty \mathfrak{b}_1^\infty$, so sind entsprechende Elementenpaare der beiden reziproken Ebenen:

$$\begin{array}{lcl} a & \text{und} & \mathfrak{a}_1^\infty \\ a_1 & \text{und} & \mathfrak{a}^\infty \\ b & \text{und} & \mathfrak{b}_1^\infty \\ b_1 & \text{und} & \mathfrak{b}^\infty. \end{array}$$

Vermittelst dieser besonderen Elemente ist es nun sehr leicht, Paare entsprechender Elemente der beiden reziproken Ebenen zu konstruieren; denn (Fig. 20) bewegen wir einen Punkt $\mathfrak{x}$ auf dem Strahle a, so beschreibt der entsprechende Strahl x_1 ein Parallelstrahlenbüschel (durch $\mathfrak{a}_1^\infty$), welches projektivisch ist mit der von $\mathfrak{x}$ beschriebenen Punktreihe. Nennen wir $\mathfrak{x}_1$ den Durchschnittspunkt von x_1 und b_1, so durchlaufen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ auf den geraden Trägern a und b_1 projektivische Punktreihen, deren Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ sind; folglich haben wir wegen der konstanten Potenz:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1 \mathfrak{x}_1 = c_1,$$

wo die Konstante c_1 durch die reziproke Beziehung gegeben wird.

Bewegen wir zweitens einen beliebigen Punkt $\mathfrak{y}$ auf dem Strahl b, so beschreibt der entsprechende Strahl y_1 ein Büschel von Parallestrahlen (durch $\mathfrak{b}_1^\infty$), welches projektivisch ist mit der von $\mathfrak{y}$ beschriebenen Punktreihe. Nennen wir $\mathfrak{y}_1$ den Durchschnittspunkt von y_1 und a_1, so durchlaufen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ auf den geraden Trägern b und a_1 projektivische Punktreihen, für welche $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ den unendlich-entfernten Punkten entsprechen, folglich haben wir wegen der konstanten Potenz:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{q}_1 \mathfrak{y}_1 = c_2,$$

wo die Konstante c_2 ebenfalls durch die reziproke Beziehung gegeben wird; gleichzeitig entsprechen den Punkten $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ der Ebene ε_1 die Strahlen x und y, welche durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bez. parallel zu b und a gezogen werden.

Demnach entspricht der Geraden $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ der Punkt $(x_1 y_1)$

und dem Punkt (xy) die Gerade $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1|$. Sobald also die Axen der reziproken Beziehung aba_1b_1 und die Werte der konstanten Potenzen c_1 und c_2 gegeben sind, können wir zu jeder Geraden der Ebene ε den entsprechenden Punkt der Ebene ε_1 und zu jedem Punkte der Ebene ε die entsprechende Gerade der Ebene ε_1 in einfachster Weise konstruieren, was nicht weiter ausgeführt zu werden braucht.

In noch einfacherer Art gestaltet sich die Abhängigkeit entsprechender Elemente bei zwei reziproken Ebenen, (und wir werden auf ein bekanntes Gebilde der Ebene, das ebene Polarsystem, zurückgeführt), wenn wir uns die Träger ε und ε_1 so auf einander gelegt denken, dafs die Axen a und b_1 und gleichzeitig b und a_1 auf einander fallen, indem $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{q}_1$ koinzidiert. Dann liegen nämlich die projektivischen Punktreihen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ auf a und b_1 involutorisch, und ebenso liegen die projektivischen Punktreihen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ auf b und a_1 involutorisch; die beiden projektivischen Strahlenbüschel der konjugierten Durchmesser, deren Mittelpunkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ sind, liegen gleichfalls involutorisch. Hieraus folgt unmittelbar, dafs bei den in solcher Weise zusammengelegten reziproken Ebenen jedem Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$, der in doppeltem Sinne als der einen und der anderen Ebene angehörig aufgefafst werden kann, eine und dieselbe Gerade $x_1 = y$ entspricht, und wir erkennen aus unserer Konstruktion, dafs die zusammengehörigen Elemente $\mathfrak{x}$ und x_1 nichts anderes sind als Pol und Polare eines ebenen Polarsystems (Th. d. K. § 56), in welchem $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_1$ der Mittelpunkt und ab oder b_1a_1 die Axen mit den ihnen zugehörigen Punktinvolutionen sind, wodurch das Polarsystem vollständig bestimmt wird. Wir schliefsen also folgendes Resultat:

Zwei allgemein gegebene reziproke Ebenen lassen sich allemal so auf einander legen, dafs je zwei entsprechende Elemente $\mathfrak{x}$ und x_1 Pol und Polare eines ebenen Polarsystems werden. Wir bemerken noch, dafs sich dies auf vier verschiedene Arten bewerkstelligen läfst, indem man bei den Axen ab, a_1b_1, welche durch die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ in je zwei Hälften geteilt werden, diese Halbaxen durch die Vorzeichen $+$ und $-$ unterscheidet und dann die beiden Ebenen ε und ε_1 so zur Deckung

bringt, daſs $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ auf einander fallen und auſserdem

entweder	$+a$ mit $+b_1$	und gleichzeitig		$+a_1$ mit $+b$
oder	$+a$ mit $-b_1$	„	„	$+a_1$ mit $+b$
„	$-a$ mit $+b_1$	„	„	$-a_1$ mit $+b$
„	$-a$ mit $-b_1$	„	„	$-a_1$ mit $+b$

zusammenfallen. Die hierbei auftretenden vier Polarsysteme stehen in einem eigentümlichen Zusammenhang mit einander (vergl. Th. d. K. § 55). —

Um zweitens die ausgezeichneten Elemente bei zwei reziproken Bündeln $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ zu ermitteln, können wir uns der schon oben (S. 357) gemachten Bemerkung bedienen, wodurch ein Ebenenbündel durch das komplementäre Strahlenbündel (sämtliche Normalen der Ebenen) oder ein Strahlenbündel durch das komplementäre Ebenenbündel (die Normalebenen zu sämtlichen Strahlen) ersetzt und dadurch statt der reziproken Beziehung die kollineare eingeführt wird.

Seien zwei Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ in reziproker Beziehung gegeben, so entspricht jedem Strahle x des Bündels $\mathfrak{O}$ eine bestimmte Ebene ξ_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ und jeder Ebene ξ des Bündels $\mathfrak{O}$ ein bestimmter Strahl x_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ (S. 353). Wenn wir jetzt auf der Ebene ξ_1 eine Normale y_1 in dem Punkte $\mathfrak{O}_1$ errichten, so wird, wenn das Paar entsprechender Elemente x und ξ_1 der reziproken Beziehung gemäſs sich verändert, das Paar entsprechender Strahlen x und y_1 zwei kollineare Bündel durchlaufen, wie aus der oben angegebenen Konstruktion hervorgeht. Die besonderen Elemente, welche diesen beiden kollinearen Bündeln zukommen (S. 381), führen nun zugleich auf die besonderen Elemente der reziproken Bündel $\mathfrak{O}|x|$ und $\mathfrak{O}_1[\xi_1]$. Wir haben gesehen, daſs es immer in den beiden kollinearen Bündeln zwei entsprechende rechtwinklige Dreikante $r\,s\,t$ und $r_1\,s_1\,t_1$ giebt; nehmen wir daher zu r_1 die Normalebene ϱ_1, welche mit der Ebene $[s_1 t_1]$ zusammenfällt u. s. w., also die drei Ebenen:

$$\varrho_1 = [s_1 t_1] \quad \sigma_1 = [t_1 r_1] \quad \tau_1 = [r_1 s_1],$$

so entsprechen sich in den gegebenen reziproken Bündeln $\mathfrak{O}|x|$ und $\mathfrak{O}_1[\xi_1]$ das rechtwinklige Dreikant $r\,s\,t$ und das rechtwinklige Dreiflach $\varrho_1\,\sigma_1\,\tau_1$, und wenn wir andererseits

die drei Ebenen:

$$[st] = \varrho \quad [tr] = \sigma \quad [rs] = \tau$$

bezeichnen, so entsprechen sich in den gegebenen reziproken Bündeln $\mathfrak{O}[\xi]$ und $\mathfrak{O}_1 |x_1|$ das rechtwinklige Dreiflach $\varrho\,\sigma\,\tau$ und das rechtwinklige Dreikant $r_1\, s_1\, t_1$, also:

Zwei allgemein gegebene reziproke Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ besitzen allemal ein einziges bestimmtes Paar entsprechender rechtwinkliger Dreikante und Dreiflache, so dafs drei bestimmten rechtwinkligen Strahlen $r\,s\,t$ des einen Bündels $\mathfrak{O}$ drei bestimmte zu einander rechtwinklige Ebenen $\varrho_1\,\sigma_1\,\tau_1$ des anderen Bündels $\mathfrak{O}_1$ und gleichzeitig den Schnittstrahlen der letzteren die Verbindungsebenen der ersteren entsprechen.

Diese besonderen Strahlen und Ebenen sollen die Hauptaxen und Hauptebenen der beiden reziproken Bündel heifsen. Vermittelst derselben lassen sich nach § 44 metrische Relationen zwischen entsprechenden Elementen der beiden reziproken Bündel ermitteln, welche die ganze Beziehung beherrschen. Ist z. B. x ein beliebiger Strahl des Bündels $\mathfrak{O}$ und ξ_1 die entsprechende Ebene des Bündels $\mathfrak{O}_1$, so wird sein:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}([rx], \tau) \,.\, \operatorname{tg}(|\varrho_1 \xi_1|, s_1) = k_1 \\ \operatorname{tg}([sx], \varrho) \,.\, \operatorname{tg}(|\sigma_1 \xi_1|, t_1) = k_2 \\ \operatorname{tg}([tx], \sigma) \,.\, \operatorname{tg}(|\tau_1 \xi_1|, r_1) = k_3\,, \end{cases}$$

wo die drei Konstanten $k_1\, k_2\, k_3$, welche durch die reziproke Beziehung gegeben werden, der Bedingung unterworfen sind:

$$k_1 k_2 k_3 = 1\,.$$

Durch dieselbe Hilfsbetrachtung der Einführung eines komplementären Bündels, wodurch die reziproke Beziehung auf die kollineare zurückgeführt wird, können wir noch andere ausgezeichnete Elementenpaare der gegebenen reziproken Bündel ermitteln, nämlich zwei besondere Strahlenbüschel in dem Bündel $\mathfrak{O}$, die ihren entsprechenden Ebenenbüscheln im Bündel $\mathfrak{O}_1$ gleich sind, und zwei besondere Ebenenbüschel im Bündel $\mathfrak{O}$, die ihren entsprechenden Strahlenbüscheln im Bündel $\mathfrak{O}_1$ gleich sind; doch erscheinen dieselben von geringerer Bedeutung und können leicht aus § 45 abgeleitet werden,

so dafs wir hier von einer näheren Untersuchung derselben Abstand nehmen. Dagegen müssen wir noch hervorheben, dafs sich zwei allgemein gegebene reziproke Bündel immer mit ihren Mittelpunkten so vereinigen lassen, dafs ein beliebiger Strahl x und seine entsprechende Ebene $\mathfrak{x}_1$ Polarstrahl und Polarebene eines und desselben Polarbündels werden (S. 34). Dies geschieht dadurch, dafs wir nach Vereinigung der Mittelpunkte $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ die Hauptaxen $r\,s\,t$ und die sie verbindenden Ebenen $[st] = \varrho$, $[tr] = \sigma$, $[rs] = \tau$ mit den entsprechenden Hauptebenen $\varrho_1\,\sigma_1\,\tau_1$ und deren Schnittstrahlen $|\sigma_1\tau_1| = r_1$, $|\tau_1\varrho_1| = s_1$, $|\varrho_1\sigma_1| = t_1$ derart zur Deckung bringen, dafs r mit r_1, s mit s_1, t mit t_1, also auch ϱ mit ϱ_1, σ mit σ_1, τ mit τ_1 zusammenfallen. Die Hauptaxen und Hauptebenen der reziproken Bündel werden bei dieser konzentrischen (polaren) Lage Hauptaxen und Hauptebenen des Polarbündels, und die Beziehung der Reziprozität geht über in die bekannte Polaritätsbeziehung beim Polarbündel. Diese polare Lage zweier konzentrischen reziproken Bündel läfst sich auf vier verschiedene Arten bewerkstelligen, und die dadurch erhaltenen vier verschiedenen Polarbündel stehen in der oben erwähnten eigentümlichen Abhängigkeit von einander.

§ 50. Zusammenliegende reziproke Gebilde; incidente Elemente.

Werden zwei reziproke Ebenen ε und ε_1 mit ihren Trägern beliebig zusammengelegt, so entsteht die Frage, ob Punkte der einen Ebene in die entsprechenden Strahlen der andern zu liegen kommen, oder Strahlen der einen Ebene durch die entsprechenden Punkte der andern gehen; solche Elementenpaare sollen incidente Elemente heifsen, und es ist leicht zu erkennen, dafs es deren im allgemeinen unendlich-viele geben wird, nämlich auf jeder beliebigen Geraden zwei Punkte, deren entsprechende Strahlen durch sie selbst gehen; denn lassen wir auf irgend einer Geraden a einen Punkt $\mathfrak{x}$ laufen, so beschreibt der entsprechende Strahl x_1 ein Strahlenbüschel um den festen Mittelpunkt $\mathfrak{a}_1$, welches projektivisch ist mit der von $\mathfrak{x}$ durchlaufenen Punktreihe; durchbohrt also x_1 den Strahl a in dem Punkte $\mathfrak{x}_1$, so haben wir auf dem Träger a

zwei zusammenfallende projektivische Punktreihen, welche im allgemeinen zwei Doppelelemente haben; diese genügen der Bedingung, dafs ihre entsprechenden Strahlen durch sie selbst gehen. Hieraus läfst sich erkennen, dafs der Ort aller solcher Punkte $\mathfrak{x}$, deren entsprechende Strahlen x_1 durch sie selbst gehen, ein Kegelschnitt sein wird. Allein diese Bemerkung giebt uns keinen im Sinne der synthetischen Geometrie befriedigenden Aufschlufs, indem sie keine Konstruktion dieses Kegelschnittes giebt, und läfst uns ganz im Stich, sobald derselbe imaginär ist, d. h. gar keine incidenten Elemente vorkommen. Es ist daher wünschenswert, eine Konstruktion zu besitzen, welche das einen (reellen oder imaginären) Kegelschnitt immer vertretende Polarsystem liefert (Th. d. K. § 56, 57); zu einer solchen Konstruktion gelangen wir auf folgende Weise*):

In zwei auf einander liegenden reziproken Ebenen ε und ε_1 ist jeder Punkt und jeder Strahl doppelt aufzufassen gleichzeitig als der einen und der andern Ebene angehörig. Nehmen wir einen beliebigen Strahl $x = y_1$, so entspricht ihm in beiderlei Sinn der Punkt $\mathfrak{x}_1$ und der Punkt $\mathfrak{y}$; die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}|$ trifft ihn in einem dritten Punkte $\mathfrak{z}$, zu welchem man den vierten harmonischen zugeordneten Punkt $\mathfrak{x}'$ bestimme, so dafs

$$(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y} \mathfrak{z} \mathfrak{x}') = -1$$

wird, dann kann man dem Strahle x den so konstruierten Punkt $\mathfrak{x}'$ zuordnen und nachweisen, dafs $\mathfrak{x}'$ und x Pol und Polare eines bestimmten ebenen Polarsystems sind (vergl. S. 30 ff.).

In der That zeigt sich zunächst, dafs, wenn der willkürlich angenommene Strahl $x = y_1$ sich um einen festen Punkt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1$ dreht, der ihm zugeordnete Punkt $\mathfrak{x}'$ eine mit diesem Strahlenbüschel projektivische gerade Punktreihe beschreibt, denn die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ beschreiben zwei projektivische gerade Punktreihen auf den Trägern a_1 und b, welche dem Punkte $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1$ vermöge der gegebenen reziproken Beziehung

*) Vergl. H. Schröter: Untersuchung zusammenfallender reziproker Gebilde in der Ebene und im Raume, Borchardt's Journal f. Math. Bd. 77. S. 105.

entsprechen (Fig. 21); bezeichnen wir noch die Schnittpunkte des veränderlichen Strahles $x = y_1$ mit b und a_1 durch

$$(xb) = \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad (y_1 a_1) = \mathfrak{y}_1,$$

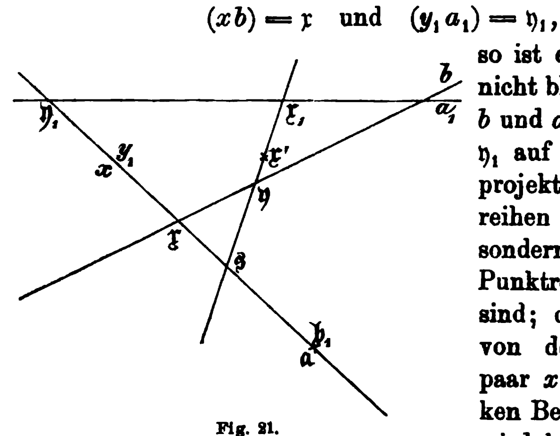


Fig. 21.

so ist ersichtlich, dafs nicht blofs $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ auf b und a_1, sowie $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ auf diesen Trägern projektivische Punktreihen durchlaufen, sondern auch, dafs diese Punktreihen dieselben sind; denn gehen wir von dem Elementenpaar $x\ \mathfrak{x}_1$ der reziproken Beziehung aus, so wird bei der Drehung von x um $\mathfrak{a}$ der Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf a_1 sich bewegen und der Schnittpunkt $\mathfrak{x} = (x, b)$ des veränderlichen Strahls x mit dem festen Strahl b eine mit $\mathfrak{x}_1$ projektivische gerade Punktreihe beschreiben. Derselben projektivischen Beziehung gehört aber auch das Punktepaar $\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1$ an, welches wir erhalten, wenn wir x als y_1 auffassen und $\mathfrak{a}$ als $\mathfrak{b}_1$ und dem Schnittpunkte $(y_1 a_1) = \mathfrak{y}_1$ den Punkt $\mathfrak{y}$ entsprechen lassen, welcher vermöge der reziproken Beziehung dem Strahle y_1 entspricht; denn dem Strahle $|\mathfrak{a}\mathfrak{y}|$ mufs der Punkt $(a_1 y_1) = \mathfrak{y}_1$ entsprechen. Wir haben also auf den Trägern b und a_1 nur zwei projektivische Punktreihen aufzufassen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ oder $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ und deren Elemente paarweise so zu vereinigen, dafs $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$ auf einem um $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1$ gedrehten Strahle liegen; die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}|$ der entsprechenden Punkte trifft der Strahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1|$ in einem Punkte:

$$\mathfrak{s} = (|\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1|, |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|),$$

dessen Ort (Th. d. K. S. 93) bekanntlich eine feste Gerade s ist, welche durch diejenigen beiden Punkte geht, die den im Schnittpunkte $(b a_1)$ vereinigten Punkten entsprechen. Bei der Bewegung umhüllt die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}|$ einen Kegelschnitt, der $b\ a_1\ s$ zu festen Tangenten hat, und auf der vierten veränderlichen Tangente $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}|$ wird allemal der zu den drei Schnitt-

punkten vierte harmonische dem $\mathfrak{s}$ zugeordnete Punkt $\mathfrak{x}'$ ermittelt. Dieser Punkt durchläuft daher eine feste vierte Tangente des vorigen Kegelschnitts, und da zwei feste Tangenten eines Kegelschnitts von einer veränderlichen allemal in zwei projektivischen Punktreihen geschnitten werden, so durchlaufen die Punkte $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}_1$, also auch der Punkt $\mathfrak{x}'$ und der Strahl x projektivische Gebilde.

Diese beiden Gebilde liegen involutorisch, d. h. einem durch $\mathfrak{x}'$ gezogenen Strahl u entspricht ein Punkt $\mathfrak{u}'$, welcher auf x liegt; ziehen wir nämlich von $\mathfrak{a}$ aus den Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}'|$, welcher den Trägern b und a_1 in den Punkten $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{t}_1$ begegnen möge, deren entsprechende $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{t}$ seien, so werden infolge der projektivischen Beziehung die Doppelverhältnisse gleich sein:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) = (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{t}_1) \quad \text{also auch}$$
$$= (\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1),$$

mithin auch die Strahlenbüschel projektivisch:

$$\mathfrak{a}\,|\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}| \;\barwedge\; \mathfrak{a}\,|\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1| \quad \text{oder}$$
$$\barwedge\; \mathfrak{a}\,|\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1|.$$

Da aber $\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_1$ auf einem Strahle und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{t}_1$ auch auf einem Strahle liegen, so liegen die beiden Strahlenbüschel involutorisch und bilden eine Strahleninvolution, deren Paare konjugierte Strahlen sind:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{x}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{z}|$$
$$|\mathfrak{a}\mathfrak{y}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{z}_1|$$
$$|\mathfrak{a}\mathfrak{x}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{t}|,$$

folglich werden auch die Strahlenbüschel projektivisch sein:

$$\mathfrak{a}\,|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{z}| \;\barwedge\; \mathfrak{a}\,|\mathfrak{t}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}\mathfrak{x}|;$$

nun koinzidiert aber der Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{z}|$ mit $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}'|$ und wegen der vier harmonischen Punkte $\mathfrak{x}_1\;\mathfrak{y}\;\mathfrak{s}\;\mathfrak{x}'$ ist auch

$$\mathfrak{a}\,|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{z}| = -1,$$

daher

$$\mathfrak{a}\,|\mathfrak{t}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}\mathfrak{x}| = -1,$$

d. h. wenn wir zu $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{z}_1$ und dem Schnittpunkt $(\mathfrak{z}\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}\mathfrak{z}_1) = \mathfrak{s}'$ den zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{u}'$ konstruieren, so wird der Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|$ durch den Punkt $\mathfrak{u}'$ gehen müssen,

d. h. wenn $\mathfrak{x}$ auf u liegt, so mufs $\mathfrak{u}'$ auf x liegen; dadurch ist die involutorische Lage beider Gebilde nachgewiesen, und dadurch ist denn auch der Nachweis geführt, dafs x und $\mathfrak{x}'$ Polare und Pol für ein bestimmtes ebenes Polarsystem sind, welches einen reellen oder imaginären Kegelschnitt zum Kern hat, d. h. solche besondere Gerade x, deren Pole $\mathfrak{x}'$ in ihnen liegen, sind die Tangenten eines Kegelschnitts und die Punkte $\mathfrak{x}'$ ihre Berührungspunkte. Sobald aber der Fall eintritt, dafs von den vier harmonischen Punkten $\mathfrak{z}\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}$ zwei zugeordnete, nämlich $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}'$ zusammenfallen, mufs in diesen auch einer der beiden andern zugeordneten hineinfallen, also entweder $\mathfrak{x}_1$ oder $\mathfrak{y}$; hieraus folgt für unsere ursprüngliche reziproke Beziehung, dafs ein solcher Strahl x seinen entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}_1$ enthält oder, als y_1 aufgefafst, durch $\mathfrak{y}$ geht. Hier findet nun offenbar beides statt, denn, wenn x durch $\mathfrak{x}_1$ geht, und wir fassen x als y_1 auf, so wird $\mathfrak{y}$ auf x liegen, weil y_1 durch $\mathfrak{x}_1$ geht; also enthält der Strahl $x = y_1$, beide ihm in doppeltem Sinne entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$; ein solcher Strahl $x = y_1$ mufs also Tangente des Kernkegelschnitts $K^{(2)}$ sein für das oben konstruierte Polarsystem; der Berührungspunkt ist der Punkt $\mathfrak{x}'$, und der Punkt $\mathfrak{z}$ geht in die Lage des vierten harmonischen zu $\mathfrak{x}'$ zugeordneten Punktes über, während $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ das andere Paar zugeordneter Punkte ist.

Wir können demnach folgendes Resultat aussprechen:

Werden zwei gegebene reziproke Felder $\varepsilon\varepsilon_1$ beliebig auf einander gelegt, so kommt es im allgemeinen unendlich oft vor, dafs ein Strahl x der Ebene ε durch den entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}_1$ der Ebene ε_1 geht, und wenn dies der Fall ist, so geht auch derselbe Strahl, als y_1 aufgefafst, durch den ihm entsprechenden Punkt $\mathfrak{y}$. Diese besonderen Strahlen $x = y_1$ umhüllen im allgemeinen einen bestimmten Kegelschnitt $K^{(2)}$, den Kernkegelschnitt eines ebenen Polarsystems, welches auf folgende Art konstruiert wird: Irgend einem Strahle $x = y_1$ der zusammenliegenden reziproken Ebenen ε und ε_1 entsprechen, in doppeltem Sinne aufgefafst, im allgemeinen zwei aufser ihm liegende verschie-

dene Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$, deren Verbindungslinie den Strahl in einem Punkte $\mathfrak{z}$ trifft; konstruiert man zu diesen drei Punkten $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{y}\, \mathfrak{z}$ den vierten harmonischen dem $\mathfrak{z}$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{x}'$, so sind $\mathfrak{x}'$ und x Pol und Polare des gesuchten Polarsystems. Hat dasselbe einen reellen Kernkegelschnitt, so sind die Tangenten desselben die gesuchten Strahlen der besonderen Art; ist der Kernkegelschnitt imaginär, so giebt es keine solchen, aber das immer reelle Polarsystem vertritt den imaginären Kegelschnitt.

Diesem Resultat steht nun ein duales gegenüber, welches auf ganz gleiche Weise abgeleitet werden kann und so lautet:

Werden zwei gegebene reziproke Felder $\varepsilon\, \varepsilon_1$ beliebig auf einander gelegt, so kommt es im allgemeinen unendlich oft vor, dafs ein Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene ε in dem entsprechenden Strahle x_1 der Ebene ε_1 liegt, und wenn dies der Fall ist, so liegt derselbe Punkt als $\mathfrak{y}_1$ aufgefafst auch in dem entsprechenden Strahle y. Diese besonderen Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ erfüllen im allgemeinen einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, den Kernkegelschnitt eines ebenen Polarsystems, welches auf folgende Art konstruiert wird: Irgend einem Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ der zusammenliegenden reziproken Ebenen $\varepsilon\, \varepsilon_1$ entsprechen, in doppeltem Sinne aufgefafst, im allgemeinen zwei nicht durch ihn gehende verschiedene Strahlen x_1 und y, deren Schnittpunkt mit $\mathfrak{x}\,(\mathfrak{y}_1)$ verbunden, einen dritten Strahl s giebt; konstruiert man zu diesen drei Strahlen $x_1\, y\, s$ den vierten harmonischen dem s zugeordneten Strahl x', so sind $\mathfrak{x}$ und x' Pol und Polare des gesuchten Polarsystems. Hat dasselbe einen reellen Kernkegelschnitt, so sind die Punkte desselben die gesuchten Punkte der besonderen Art; ist der Kernkegelschnitt imaginär, so giebt es keine solchen, aber das immer reelle Polarsystem vertritt den imaginären Kegelschnitt.

Die beiden so konstruierten Polarsysteme, deren Kernkegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ sind, fallen keineswegs zusammen, haben aber eine eigentümliche Beziehung zu einander, die wir sogleich aufsuchen wollen. Es ist ersichtlich, dafs entweder beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ reell oder beide imaginär sein müssen, und dafs in dem ersteren Fall jede Tangente von $K^{(2)}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in denjenigen beiden Punkten schneidet, welche ihr in doppeltem Sinne der reziproken Beziehung entsprechen, sowie dafs durch jeden Punkt des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ zwei Tangenten an den Kegelschnitt $K^{(2)}$ gehen, welche die dem Punkte in doppeltem Sinne der reziproken Beziehung entsprechenden Strahlen sind.

Wenn wir die vorige Betrachtung dadurch modifizieren, dafs wir einen beliebigen Strahl in doppeltem Sinne aufgefafst $x = y_1$, dem die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ vermöge der reziproken Beziehung entsprechen, nicht um einen beliebigen auf ihm festgehaltenen Punkt $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1)$, sondern um den

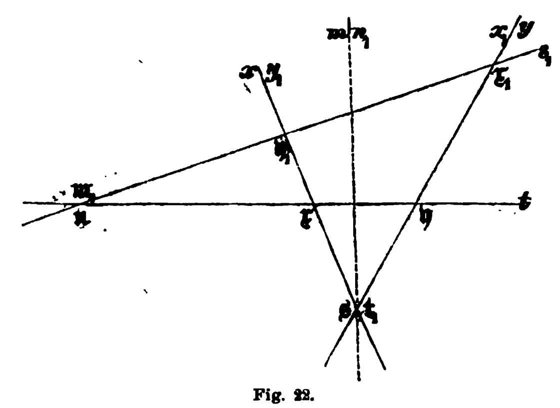


Fig. 22.

besonderen Punkt $\mathfrak{s}$ drehen, in welchem er von der Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}|$ getroffen wird, dann vereinfacht sich die Betrachtung. Wird nämlich (Fig. 22) der Schnittpunkt des Strahles $x = y_1$ mit der Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}|$ in doppeltem Sinne durch $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}_1$ bezeichnet, und entsprechen ihm die Strahlen s_1 und t, so wird auch dem Schnittpunkt $(xt) = \mathfrak{x}$ der Strahl $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{t}_1| = x_1$ und dem Schnittpunkt $(y_1 s_1) = \mathfrak{y}_1$ der Strahl $|\mathfrak{y}\mathfrak{s}| = y$ entsprechen; die Strahlen y und x_1 fallen aber zusammen, wie wir sehen. Hieraus folgt, dafs, wenn der Strahl x um den

Punkt $\mathfrak{z}$ gedreht wird, das von ihm beschriebene Strahlenbüschel mit der von $\mathfrak{x}_1$ auf s_1 durchlaufenen Punktreihe nicht blos projektivisch ist, sondern auch involutorisch liegt; die Strahlen x und x_1 beschreiben also eine Strahleninvolution, welche zusammenfällt mit der Strahleninvolution, die y_1 und y beschreiben. Zugleich ergiebt sich, dafs die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|$ durch den festen Punkt $\mathfrak{z}(\mathfrak{t}_1)$ laufen mufs; denn sei ein beliebiger anderer durch den Punkt $\mathfrak{z}(\mathfrak{t}_1)$ gezogener Strahl $u = v_1$, die Durchschnittspunkte desselben mit s_1 und t die Punkte $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{u}$, ferner die ihm in doppeltem Sinne entsprechenden Punkte $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{v}$, endlich die Verbindungsstrahlen $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{u}_1| = u_1$ und $|\mathfrak{z}\mathfrak{v}| = v$, so wird wegen der reziproken Beziehung sein:

$$\mathfrak{z}\,(xyuv) \barwedge s_1\,(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1) \barwedge s_1\,(\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{v}_1\mathfrak{u}_1)$$

und da der Strahl x durch $\mathfrak{y}_1$, y durch $\mathfrak{x}_1$, u durch $\mathfrak{v}_1$ geht, so mufs auch v durch $\mathfrak{u}_1$ gehen, d. h. $|\mathfrak{v}\mathfrak{u}_1|$ durch $\mathfrak{z}$. Demnach beschreiben die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ perspektivisch liegende Punktreihen auf s_1 und t, also sind in dem Schnittpunkte $(s_1 t)$, den wir, in doppeltem Sinne aufgefafst bezeichnen wollen:

$$(s_1 t) = \mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1$$

zwei entsprechende Punkte vereinigt, d. h. die ihm entsprechenden Strahlen m und n_1 fallen zusammen; dieser Strahl $m = n_1$ ist leicht zu ermitteln aus der Strahleninvolution $|xx_1|$; er ist der dem Verbindungsstrahl der Punkte $\mathfrak{z}(\mathfrak{t}_1)$ und $\mathfrak{n}(\mathfrak{m}_1)$ konjugierte Strahl unserer Strahleninvolution und besitzt daher die ausgezeichnete Eigenschaft, dafs ihm, in doppeltem Sinne der reziproken Beziehung als m und n_1 aufgefafst, ein und derselbe Punkt $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1$ entspricht.

Dies ausgezeichnete Elementenpaar $m(n_1)$ und $\mathfrak{m}_1(\mathfrak{n})$ ist in der Ebene der zusammengelegten reziproken Gebilde das e i n z i g e von der Beschaffenheit, dafs die Elemente in doppeltem Sinne sich entsprechen. Denn es läfst sich leicht zeigen, dafs wir immer auf dasselbe Elementenpaar geführt werden, wie wir auch die vorige Konstruktion abändern mögen. Wir konstruierten nämlich das ausgezeichnete Elementenpaar $m(n_1)$ und $\mathfrak{m}_1(\mathfrak{n})$ so: Dem beliebigen Strahl $x = y_1$ entsprechen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$; der Schnittpunkt $(x, |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|) = \mathfrak{z} = \mathfrak{t}_1$

hat zu entsprechenden Strahlen s_1 und t; der Schnittpunkt $(s_1 t) = \mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1$ ist der gesuchte Punkt, dessen entsprechende Strahlen $m = n_1$ zusammenfallen.

Nehmen wir nun dieselbe Konstruktion noch einmal vor und bezeichnen die analogen Gröfsen durch einen hinzugefügten Accent, so wird ein beliebiger Strahl $x' = y'_1$ der vorhin gefundenen Geraden $m = n_1$ in einem Punkte $\mathfrak{z}' = \mathfrak{t}'_1$ begegnen, und weil dieser Punkt sowohl auf m als auch auf n_1 liegt, so müssen die ihm entsprechenden Strahlen s'_1 und t' sowohl durch $\mathfrak{m}_1$ als auch durch $\mathfrak{n}$ gehen, deshalb sich in demselben Punkte $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n}$ schneiden; sind nun $\mathfrak{x}'_1$ und $\mathfrak{y}'$ die den Strahlen $x' = y'_1$ entsprechenden Punkte, so folgt aus der Gleichheit des Doppelverhältnisses der Punkte:

$\mathfrak{m}_1 \quad (s'_1 y'_1) \quad (s'_1 n_1) \quad \mathfrak{x}'_1$ mit dem der Strahlen

$m \quad |\mathfrak{z}'\mathfrak{y}'| \quad |\mathfrak{z}'\mathfrak{n}| \quad x'$, die auch so umgestellt werden können

$|\mathfrak{z}'\mathfrak{n}| \quad x' \quad m \quad |\mathfrak{z}'\mathfrak{y}'|$,

dafs die Punktreihe mit dem Strahlenbüschel perspektivisch liegt, weil der Strahl $|\mathfrak{z}'\mathfrak{n}|$ durch $\mathfrak{m}_1$ geht, der Strahl x' mit y'_1, der Strahl m mit n_1 zusammenfällt, dafs folglich auch der Strahl $|\mathfrak{z}'\mathfrak{y}'|$ durch $\mathfrak{x}'_1$ gehen mufs, oder umgekehrt $|\mathfrak{x}'_1\mathfrak{y}'|$ durch $\mathfrak{z}'$ geht. Hierdurch erkennen wir aber, dafs der Schnittpunkt $(x', |\mathfrak{x}'_1\mathfrak{y}'|) = \mathfrak{z}' = \mathfrak{t}'_1$ auf derselben Geraden $m(n_1)$ liegt, wie der frühere $\mathfrak{z} = \mathfrak{t}_1$, d. h.:

Wenn man in dem ganzen Gebiete der beiden auf einander liegenden reziproken Felder $\varepsilon\,\varepsilon_1$ zu jedem beliebigen Strahle, als x und y_1 aufgefafst, die entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ aufsucht, so trifft die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|$ jenen Strahl in einem Punkte $\mathfrak{z}$, dessen gesamter Ort eine feste Gerade $m = n_1$ ist, der in beiderlei Sinn der reziproken Beziehung ein und derselbe Punkt $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1$ entspricht. Dreht man den Strahl $x(y_1)$ um einen festen Punkt $\mathfrak{z}$ der Geraden $m(n_1)$, so dreht sich auch die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|$ um diesen festen Punkt, und die dadurch erhaltenen Strahlenpaare bilden eine Strahleninvolution.

In ganz analoger Weise läfst sich das dual gegenüber-

stehende Resultat ableiten, was nicht weiter ausgeführt zu werden braucht:

Wenn man in dem ganzen Gebiete der beiden auf einander liegenden reziproken Felder $\varepsilon\,\varepsilon_1$ für jeden beliebigen Punkt, als $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$ aufgefafst, die entsprechenden Strahlen x_1 und y aufsucht und ihren Schnittpunkt mit dem anfänglichen Punkte verbindet, so geht diese Verbindungslinie durch einen und denselben festen Punkt $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1$, dem in beiderlei Sinn der reziproken Beziehung ein und derselbe Strahl $m = n_1$ entspricht. Verändert man den willkürlich gewählten Punkt $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ auf einem beliebigen durch den festen Punkt $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1$ gezogenen Strahl, so bewegt sich auch der Schnittpunkt $(x_1 y)$ auf diesem Strahle und die dadurch erhaltenen Punktepaare bilden eine Punktinvolution.

Dieses ausgezeichnete Paar entsprechender Elemente $m(n_1)$ und $\mathfrak{m}_1(\mathfrak{n})$, welche sich gleichzeitig in beiderlei Sinn der reziproken Beziehung entsprechen, hat nun auch zu den vorhin gefundenen Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine eigentümliche Beziehung. Da nämlich dem Punkte $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1$ zwei zusammenfallende Strahlen $m = n_1$ entsprechen, so kann jeder Punkt derselben als ihr Schnittpunkt $\mathfrak{z}$ aufgefafst werden, und von den vier harmonischen Strahlen fallen zwei zugeordnete zusammen, folglich auch einer der beiden andern zugeordneten in denselben, d. h. $\mathfrak{m}_1$ und m sind Pol und Polare für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ und gleichzeitig n_1 und $\mathfrak{n}$ Polare und Pol für den Kegelschnitt $K^{(2)}$, wie in analoger Weise folgt; mithin sind diese beiden ausgezeichneten Elemente Pol und Polare für beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ gleichzeitig; aber noch mehr: Nimmt man auf dem Strahle $m(n_1)$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{z} = \mathfrak{t}_1$, dessen entsprechende Strahlen s_1 und t sich in dem Punkte $\mathfrak{n}(\mathfrak{m}_1)$ schneiden, und konstruiert zu s_1, t, $|\mathfrak{n}\mathfrak{z}|$ den vierten harmonischen dem $|\mathfrak{n}\mathfrak{z}|$ zugeordneten Strahl s', der in $\mathfrak{z}'$ der Geraden $m(n_1)$ begegnet, so sind $\mathfrak{z}$ und s' Pol und Polare für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$; folglich sind $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ konjugierte Punkte für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$; in ganz derselben Weise folgt aber auch, dafs $|\mathfrak{n}\mathfrak{z}|$ und $|\mathfrak{n}\mathfrak{z}'|$ konjugierte Strahlen für den Kegelschnitt $K^{(2)}$ sein müssen, und da dies

für alle so konstruierten Paare von Punkten $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ gilt, so haben beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ (oder die sie vertretenden Polarsysteme) die Strahleninvolutionen, welche dem Punkte $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1$ rücksichtlich beider zugehören und die Punktinvolutionen auf $m = n_1$, welche diesem Strahle rücksichtlich beider Kegelschnitte zugehören, gemeinschaftlich, d. h. die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ haben eine (reelle oder ideelle) doppelte Berührung (Th. d. K. S. 344) oder den Punkt $\mathfrak{n}(\mathfrak{m}_1)$ und den Strahl $m_1(n)$ gemeinschaftlich als Pol und Polare mit den ihnen zugehörigen Strahlen- und Punktinvolutionen.

Wir können daher folgendes Ergebnis aussprechen:

Die beiden oben konstruierten Polarsysteme, deren Kernkegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ sind, haben ein ausgezeichnetes Paar Pol und Polare: $\mathfrak{n}(\mathfrak{m}_1)$ und $n_1(m)$ gemeinschaftlich, und es fallen sowohl die beiden Strahleninvolutionen, welche dem Punkte $\mathfrak{n}(\mathfrak{m}_1)$ in beiden Polarsystemen zugehören, zusammen, wie auch die beiden Punktinvolutionen auf der Geraden $m(n_1)$, welche den beiden Polarsystemen zugehören und mit jenen perspektivisch liegen. Sind die Kernkegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ reell, so haben sie also eine reelle oder ideelle doppelte Berührung.

Ist die doppelte Berührung der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine reelle, so sind offenbar die beiden Berührungspunkte von der besonderen Beschaffenheit, dafs für jeden derselben die durch ihn gehende Tangente (von beiden Kegelschnitten) in doppeltem Sinne der reziproken Beziehung der entsprechende Strahl ist, eine Eigenschaft, die zwar übereinstimmt mit der dem ausgezeichneten Paare $m(n_1)$ und $\mathfrak{m}_1(\mathfrak{n})$ zukommenden Eigentümlichkeit, aber dadurch abweicht, dafs hier die Punkte und die ihnen entsprechenden Strahlen incident sind, was dort nicht der Fall war.

Es ist klar, dafs dies die einzigen Elementenpaare sind, welche im allgemeinen bei zwei beliebig auf einander gelegten reziproken Feldern in doppeltem Sinne sich entsprechen. Denn käme noch irgend ein zweites Paar $p(q_1)$ und $\mathfrak{p}_1(\mathfrak{q})$ derselben Art vor, so müfste dasselbe auch ein Paar Pol nud Polare für beide Polarsysteme oder die durch sie ver-

tretenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ sein, und dies wäre nicht anders möglich, als wenn die Kegelschnitte identisch zusammenfielen, denn dadurch wären schon mehr Bedingungen gegeben, als zur Bestimmung eines Polarsystems erforderlich sind. Wenn aber die beiden Polarsysteme identisch zusammenfallen, so entspricht auch jedem Strahle $x(y_1)$ ein und derselbe Punkt $\mathfrak{x}_1(\mathfrak{y})$ und umgekehrt. Wir haben alsdann den schon auf S. 425 betrachteten Fall der polaren Lage zweier zusammenliegenden reziproken Felder und haben dort gesehen, wie derselbe immer erreicht werden kann. Wir können also hier hinzufügen:

Wenn bei zwei zusammenliegenden reziproken Feldern $\varepsilon\,\varepsilon_1$ zweimal der Fall eintritt, dafs ein nicht incidentes Elementenpaar $x(y_1)$ und $\mathfrak{x}_1(\mathfrak{y})$ in doppeltem Sinne der reziproken Beziehung sich entspricht, dann ist dies immer der Fall, und die beiden Felder befinden sich in polarer Lage.

Die dual gegenüberstehende Untersuchung zweier mit ihren Mittelpunkten vereinigten reziproken Bündel, welche der vorigen durchaus nachgebildet werden kann, oder durch die Perspektive von irgend einem aufserhalb liegenden Punkte $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_1$ erhalten wird, braucht hier ebenso wenig ausgeführt zu werden, wie die Anführung der hier sich ergebenden Resultate erforderlich scheint, die nur ermüden würde und in bekannter Weise ohne alle Schwierigkeit hergestellt werden kann.

§ 51. Die Raumkurve dritter Ordnung als Erzeugnis zweier kollinearen Bündel.

Wenn zwei kollineare Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ beliebig im Raume gegeben sind, so dafs jedem Strahl x des Bündels $\mathfrak{O}$ ein bestimmter Strahl x_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ und jeder Ebene ξ des Bündels $\mathfrak{O}$ eine bestimmte Ebene ξ_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ und umgekehrt entspricht, so werden sich zwar immer zwei entsprechende Ebenen $\xi\,\xi_1$ in einer Geraden g schneiden, es brauchen sich aber nicht immer zwei entsprechende Strahlen x und x_1 im Raume zu treffen. Da ein Strahlenbüschel um $\mathfrak{O}$, welches in der Ebene ξ ein veränderlicher Strahl x beschreibt, wegen der kollinearen Beziehung mit demjenigen

Strahlenbüschel projektivisch sein mufs, welches der entsprechende Strahl x_1 in der entsprechenden Ebene ξ_1 beschreibt, und beide Strahlenbüschel auf der Schnittlinie $g = |\xi\xi_1|$ zwei zusammenliegende projektivische Punktreihen ausschneiden, so werden die Doppelelemente derselben zwei solche Punkte sein, in denen sich zwei entsprechende Strahlen treffen; in jeder durch $\mathfrak{O}$ oder $\mathfrak{O}_1$ gelegten Ebene giebt es also im allgemeinen zwei solche Treffpunkte, die reell oder konjugiert-imaginär sein werden, je nachdem die auf einander liegenden projektivischen Punktreihen in g reelle Doppelpunkte haben oder nicht. Aufserdem sind aber die Punkte $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ offenbar selbst solche Punkte, in denen sich entsprechende Strahlen der beiden kollinearen Bündel begegnen; denn der Verbindungslinie $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = e = f_1$, welche beiden Bündeln gleichzeitig als Strahl angehört, entsprechen die bestimmten Strahlen e_1 durch $\mathfrak{O}_1$ und f durch $\mathfrak{O}$, folglich ist der Punkt $\mathfrak{O}_1 = (ee_1)$ und der Punkt $\mathfrak{O} = (ff_1)$ offenbar Schnittpunkt je zweier entsprechenden Strahlen der beiden kollinearen Bündel. In jeder durch einen der Mittelpunkte der Bündel gelegten Ebene giebt es also im allgemeinen drei Punkte des gesuchten Ortes, und dies gilt auch allgemein für jede beliebige Ebene; denn denken wir uns eine im Raume willkürlich gelegte Ebene doppelt als ε und ε_1 und lassen sie durch das Bündel $\mathfrak{O}$ in einem Punktfelde ε, durch das Bündel $\mathfrak{O}_1$ in einem Punktfelde ε_1 schneiden, so haben wir zwei zusammenliegende kollineare Felder, die (S. 372) im allgemeinen drei Doppelelemente besitzen; in diesen Punkten treffen sich also je zwei entsprechende Strahlen der gegebenen kollinearen Bündel, woraus wir schliefsen, dafs der Ort des Schnittpunktes entsprechender Strahlen zweier beliebig im Raume gegebenen kollinearen Bündel eine Raumkurve 3. O. ist, welche selbst durch die Mittelpunkte der beiden Bündel hindurchgeht und für welche die Schnittlinien $g = |\xi\xi_1|$ irgend zweier entsprechenden Ebenen das gesamte System der (eigentlichen und uneigentlichen) Sekanten bilden, d. h. aller solchen Geraden im Raume, die der Raumkurve in zwei (reellen oder konjugiert-imaginären) Punkten begegnen.

Dafs dieses Erzeugnis der beiden allgemein gegebenen kollinearen Bündel mit der Raumkurve 3. O., welche wir in § 31—39 betrachtet haben, identisch ist, läfst sich leicht auf folgende Art erkennen:

Seien wiederum die Strahlen e und f_1 in der Verbindungslinie $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ der Mittelpunkte der gegebenen beiden kollinearen Bündel vereinigt und die ihnen entsprechenden e_1 und f, dann wird der Ebene $[ef]$ die Ebene $[e_1 f_1]$ entsprechen. Nehmen wir nun in der Ebene $[ef]$ einen beliebigen Strahl a des Bündels $\mathfrak{O}$, so liegt der entsprechende Strahl a_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ in der Ebene $[e_1 f_1]$. Wir nehmen a und a_1 zu Axen zweier Ebenenbüschel in den beiden Bündeln, deren entsprechende Ebenen ξ und ξ_1 der kollinearen Beziehung gemäfs projektivische Büschel beschreiben müssen; die Schnittlinie $|\xi\xi_1|$ durchläuft also eine Regelschar eines einfachen Hyperboloids (S. 88); dieser Regelschar mufs offenbar die Verbindungslinie $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ angehören, weil sich in ihr die entsprechenden Ebenen $[aef]$ und $[a_1 e_1 f_1]$ schneiden.

Wir nehmen zweitens zwei andere Strahlen b und b_1 in den Ebenen $[ef]$ und $[e_1 f_1]$, die sich entsprechen, und drehen um b eine veränderliche Ebene η, so wird die entsprechende η_1 um b_1 sich drehen und ein mit dem ersten projektivisches Ebenenbüschel beschreiben; die Schnittlinie $|\eta\eta_1|$ durchläuft also ebenfalls eine Regelschar eines einfachen Hyperboloids, welches mit dem vorigen Hyperloid die gemeinschaftliche Erzeugende $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ hat. Die beiden so konstruierten Hyperboloide haben aufser der gemeinschaftlichen Erzeugenden $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ noch eine Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$ gemein (S. 229), und die Punkte dieser Raumkurve besitzen die Eigenschaft, dafs sich in jedem derselben die vier Ebenen $\xi\ \xi_1\ \eta\ \eta_1$ schneiden; folglich schneiden sich in einem solchen Punkte auch die beiden Schnittlinien $|\xi\eta|$ und $|\xi_1\eta_1|$. Dies sind aber entsprechende Strahlen der kollinearen Bündel, also ihr Treffpunkt einer der gesuchten Punkte. Umgekehrt ist auch ersichtlich, dafs wenn irgendwo zwei entsprechende Strahlen $x\,x_1$ der beiden kollinearen Bündel sich treffen, dieser Treffpunkt auf der Raumkurve $C^{(3)}$ liegen mufs, dem übrigen Durchschnitt der beiden vorigen Hyperboloide, welche die Erzeugende $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ gemeinschaftlich haben. Denn sobald sich xx_1

treffen, mufs der Ebene $[ax]$ die Ebene $[a_1 x_1]$ und der Ebene $[bx]$ die Ebene $[b_1 x_1]$ entsprechen, also müssen sich die vier Ebenen $[ax]$ $[bx]$ $[a_1 x_1]$ $[b_1 x_1]$ in einem Punkte schneiden.

Anstatt des Strahlenpaares $b b_1$ kann man auch irgend ein anderes Paar entsprechender Strahlen $c c_1$ in den Ebenen $[ef]$ und $[e_1 f_1]$ wählen und erhält dadurch ein drittes Hyperboloid und durch Veränderung des Strahlenpaares $c c_1$ ein ganzes Büschel von Hyperboloiden, die sämtlich durch den Strahl $|\mathfrak{O}\, \mathfrak{O}_1|$ und die Raumkurve $C^{(3)}$ hindurchgehen; da jedes Paar entsprechender Ebenen $\xi \xi_1$ der beiden kollinearen Bündel $\mathfrak{O}\, \mathfrak{O}_1$ die Ebenen $[ef]$ und $[e_1 f_1]$ in einem solchen Paare entsprechender Strahlen, wie $c c_1$, schneiden mufs, so ist die Gesamtheit der Schnittlinie $|\xi \xi_1| = g$ identisch mit der Gesamtheit der Erzeugenden der Regelscharen sämtlicher vorigen Hyperboloide, deren Erzeugende der $C^{(3)}$ in je zwei Punkten begegnen (S. 232). Hier bietet sich also unmittelbar die Auflösung der früher (S. 255) behandelten Aufgabe dar: Es soll eine Raumkurve $C^{(3)}$ konstruiert werden, von welcher zwei Punkte $\mathfrak{O}\, \mathfrak{O}_1$ und vier Sekanten $g_1 g_2 g_3 g_4$ gegeben sind. Man braucht nämlich nur $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ als die Mittelpunkte zweier kollinearen Bündel anzunehmen und die kollineare Beziehung derselben durch die vier Paare entsprechender Ebenen:

$$\mathfrak{O}\,[g_1 g_2 g_3 g_4] \quad \text{und} \quad \mathfrak{O}_1\,[g_1 g_2 g_3 g_4]$$

festzustellen, alsdann wird das Erzeugnis der beiden kollinearen Bündel eine Raumkurve $C^{(3)}$ sein, welche den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Um sämtliche Hyperboloide zu erhalten, welche durch die Raumkurve $C^{(3)}$ gelegt werden können, gehen wir von einem beliebigen Paar entsprechender Strahlen $a a_1$ der gegebenen beiden kollinearen Bündel $\mathfrak{O}\, \mathfrak{O}_1$ aus und drehen um a und a_1 als Axen zwei entsprechende Ebenen $\xi \xi_1$, die vermöge der kollinearen Beziehung zwei projektivische Ebenenbüschel beschreiben; die Schnittlinie $|\xi \xi_1|$ durchläuft also eine Regelschar eines Hyperboloids $\mathfrak{A}^{(2)}$. Nehmen wir ein zweites beliebiges Paar entsprechender Strahlen $b b_1$, um welche wir entsprechende Ebenen $\eta \eta_1$ der kollinearen Bündel drehen, so erhalten wir ein zweites Hyperboloid $\mathfrak{B}^{(2)}$. Diese beiden Hyperboloide haben offenbar die Erzeugende

$$|[ab], [a_1 b_1]|$$

gemeinschaftlich; ihr übriger Schnitt ist eine Raumkurve $C^{(3)}$ und zwar der Ort derjenigen Punkte, in welchen sich die vier Ebenen $\xi\, \xi_1\, \eta\, \eta_1$ gleichzeitig schneiden; ein solcher Punkt, durch welchen die vier Ebenen $\xi\, \xi_1\, \eta\, \eta_1$ gehen, ist aber der Schnittpunkt zweier Strahlen $|\xi\,\eta|$ und $|\xi_1\,\eta_1|$, d. h. ein Punkt, in welchem sich zwei entsprechende Strahlen der gegebenen kollinearen Bündel treffen. Der Ort solcher Punkte ist daher die Raumkurve $C^{(3)}$. Sämtliche Hyperboloide, welche durch $C^{(3)}$ gelegt werden können, werden nun erhalten durch Veränderung des Strahlenpaares $|a\,a_1|$. Diese Mannigfaltigkeit ist also gleich mächtig mit den Strahlen eines Bündels.

Da ferner die Schnittlinie $|[ab], [a_1 b_1]|$ immer zwei Hyperboloiden gemeinschaftlich ist und eine solche Erzeugende der Raumkurve $C^{(3)}$ bekanntlich (S. 238) in zwei (reellen oder konjugiert-imaginären) Punkten begegnet, so ist die Schnittlinie $|[ab], [a_1 b_1]|$ eine Sekante der Raumkurve $C^{(3)}$. Durch Veränderung der willkürlichen Strahlenpaare $a\,a_1$, $b\,b_1$ erhalten wir sämtliche Sekanten der Raumkurve $C^{(3)}$. Der Strahl $|[ab], [a_1 b_1]|$ ist aber die Schnittlinie zweier entsprechenden Ebenen der gegebenen kollinearen Bündel $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$, also:

Die Gesamtheit der Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen zweier kollinearen Bündel bildet die Gesamtheit der Sekanten einer Raumkurve $C^{(3)}$.

Unter allen Hyperboloiden, welche durch eine $C^{(3)}$ gelegt werden können, giebt es insbesondere Kegel; wenn wir nämlich statt des Strahlenpaares $a\,a_1$ das besondere Paar entsprechender Strahlen $e\,e_1$ oder $f\,f_1$ wählen, so begegnen sich die Axen der das Hyperboloid erzeugenden Ebenenbüschel, also degeneriert dasselbe in einen Kegel 2. O.; die Raumkurve $C^{(3)}$ erscheint also auch als der übrige gemeinschaftliche Schnitt zweier Kegel 2. O., welche einen Kegelstrahl gemein haben. Dies Resultat läfst sich umkehren:

Wenn zwei Kegel zweiter Ordnung in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ einen gemeinsamen Kegelstrahl haben, so schneiden sie sich aufserdem in einer Raumkurve dritter Ord-

nung $C^{(3)}$; verbindet man einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ derselben mit $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ durch das Strahlenpaar $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{x}| = x$ und $|\mathfrak{O}_1\,\mathfrak{x}| = x_1$, so sind dies allemal zwei entsprechende Strahlen zweier kollinearen Bündel.

Ferner ergiebt sich, wenn wir irgend einen Punkt $\mathfrak{p}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ nehmen, also die beiden Strahlen $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{p}| = p$ und $|\mathfrak{O}_1\,\mathfrak{p}| = p_1$ entsprechende Strahlen sind, und wir um p und p_1 ein Paar entsprechender Ebenen $\xi\,\xi_1$ der Bündel drehen, dafs die Schnittlinie $|\xi\,\xi_1| = g$ auch einen Kegel 2. O. beschreiben wird, weil die Ebenenbüschel $p[\xi]$ und $p_1[\xi_1]$ projektivisch sind, und ihre Axen in $\mathfrak{p}$ sich treffen; die Schnittlinie $g = |\xi\,\xi_1|$ ist aber, wie wir wissen, allemal eine Sekante der $C^{(3)}$, also sind alle durch den Punkt $\mathfrak{p}$ der $C^{(3)}$ gehenden Sekanten Kegelstrahlen eines Kegels 2. O., d. h. wenn man einen beliebigen festen Punkt einer Raumkurve $C^{(3)}$ mit allen übrigen durch Strahlen verbindet, so erhält man sämtliche Kegelstrahlen eines Kegels zweiter Ordnung. (S. 231).

Nimmt man einen beliebigen andern Punkt $\mathfrak{o}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ und führt dieselbe Konstruktion aus, so erhält man einen zweiten Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$; die beiden Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ haben den gemeinsamen Kegelstrahl $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}|$ und als übrigen Schnitt die Raumkurve $C^{(3)}$; folglich werden auch $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$ als die Mittelpunkte zweier Bündel gewählt werden können, die in kollinearer Beziehung stehen, und deren entsprechende Strahlen sich in den Punkten der $C^{(3)}$ treffen. Wir können nunmehr das Resultat aussprechen:

Irgend zwei Punkte einer Raumkurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ können immer als die Mittelpunkte zweier kollinearen Bündel aufgefafst werden, deren entsprechende Strahlen sich in den Punkten der Raumkurve treffen.

Hieraus geht hervor, dafs die Raumkurve $C^{(3)}$ in der mannigfaltigsten Weise durch zwei kollineare Bündel erzeugt werden kann, wie der Kegelschnitt durch zwei projektivische Büschel erzeugt wird. Es folgt ferner, dafs die Raumkurve $C^{(3)}$ durch sechs unabhängig von einander gegebene Punkte des Raumes vollständig bestimmt

wird; denn wählen wir zwei derselben zu Mittelpunkten der erzeugenden Bündel und verbinden dieselben mit den vier übrigen durch Strahlenpaare, so erhalten wir vier Paare entsprechender Strahlen, wodurch gerade die kollineare Beziehung der beiden Bündel festgelegt wird.

Nehmen wir jetzt einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ im Raume, der nicht auf der Raumkurve $C^{(3)}$ liegt, so werden die Strahlen $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{p}| = p$ und $|\mathfrak{O}_1\,\mathfrak{p}| = q_1$ nicht entsprechende Strahlen der erzeugenden kollinearen Bündel sein; ihnen entsprechen in beiderlei Sinn die Strahlen p_1 und q, folglich werden die Ebenen $[p\,q]$ und $[p_1\,q_1]$ entsprechende sein, und ihre Schnittlinie g ist eine Sekante der Raumkurve, welche offenbar durch den Punkt $\mathfrak{p}$ geht, und zwar ist dies, wie aus der Konstruktion hervorgeht, die einzige Sekante der $C^{(3)}$, welche durch den gegebenen Punkt $\mathfrak{p}$ geht, d. h.:

Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ des Raumes, der nicht auf einer als Erzeugnis zweier kollinearen Bündel gegebenen Raumkurve dritter Ordnung liegt, giebt es immer eine einzige Sekante derselben; dieselbe wird erhalten dadurch, dafs wir den Punkt $\mathfrak{p}$ mit den Mittelpunkten $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ der erzeugenden Bündel durch die Strahlen p und q_1 verbinden, die entsprechenden Strahlen p_1 und q aufsuchen und durch $\mathfrak{p}$ den einzigen Strahl ziehen, welcher p_1 und q gleichzeitig trifft. Hierdurch haben wir eine sehr einfache Lösung der Aufgabe erhalten:

Eine Raumkurve $C^{(3)}$ wird durch sechs unabhängig von einander gegebene Punkte bestimmt; es soll durch einen gegebenen siebenten Punkt die (einzige) Sekante der Raumkurve $C^{(3)}$ gezogen werden.

Die besonderen Strahlen f und e_1, welche den in der Verbindungslinie der Mittelpunkte vereinigten Strahlen $e = f_1 = |\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1|$ der beiden erzeugenden kollinearen Bündel entsprechen, haben eine leicht erkennbare Beziehung zu der erzeugten Raumkurve $C^{(3)}$; da nämlich je zwei Verbindungsstrahlen $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{O}_1\,\mathfrak{x}|$ der Mittelpunkte mit einem veränderlichen Kurvenpunkt immer zwei entsprechende Strahlen der kollinearen Bündel sind, so wird, wenn $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{O}$ hineinrückt, die Sekante $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{x}|$ die Tangente der Raumkurve im

Punkte $\mathfrak{O}$ werden, d. h. der dem Strahle f_1 entsprechende Strahl f berührt die Raumkurve in $\mathfrak{O}$, und der dem Strahle e entsprechende Strahl e_1 berührt die Raumkurve im Punkte $\mathfrak{O}_1$, also:

Sind bei zwei kollinearen Bündeln $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$, deren Erzeugnis eine Raumkurve $C^{(3)}$ ist, in der Verbindungslinie der Mittelpunkte die Strahlen e und f_1 vereinigt, so entsprechen ihnen in beiderlei Sinn (f und e_1) die Tangenten der Raumkurve in den Mittelpunkten der erzeugenden Bündel. Der Ebene $[ee_1]$, als dem durch e gelegten Ebenenbüschel des Bündels $\mathfrak{O}$ angehörig, entspricht die durch e_1 gehende Schmiegungsebene der Raumkurve im Punkte $\mathfrak{O}_1$ und der Ebene $[ff_1]$, als dem Bündel $\mathfrak{O}_1$ angehörig entspricht im Bündel $\mathfrak{O}$ die durch f gehende Schmiegungsebene der Raumkurve im Punkte $\mathfrak{O}$.

Die Rechtfertigung der letzten Behauptung geht aus folgender Bemerkung hervor:

Einer um den Strahl $e = |\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1|$ gedrehten Ebene ξ im Bündel $\mathfrak{O}$ entspricht im Bündel $\mathfrak{O}_1$ eine um den Strahl e_1, die Tangente der Raumkurve in $\mathfrak{O}_1$, sich drehende Ebene ξ_1, und zwar ist der Schnittstrahl zweier entsprechenden Ebenen $|\xi\,\xi_1|$ allemal eine durch $\mathfrak{O}_1$ gehende Sekante der $C^{(3)}$, d. h. wenn wir einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ auf der Raumkurve $C^{(3)}$ laufen lassen, so werden die Ebenen $[e\mathfrak{x}] = \xi$ und $[e_1\mathfrak{x}] = \xi_1$ allemal zwei entsprechende Ebenen der beiden projektivischen Ebenenbüschel sein, deren Axen e und e_1 sind; gelangt nun insbesondere der variable Punkt $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{O}_1$, so geht die Ebene ξ in die Ebene $[e\,e_1]$ über und die entsprechende in die Schmiegungsebene der Raumkurve $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{O}_1$, weil der dritte Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ einer durch die Tangente e_1 der Raumkurve gelegten Ebene mit derselben in den Berührungspunkt selbst hineinrückt. Wir erkennen hieraus auch, daſs die Schmiegungsebene in $\mathfrak{O}_1$ die Berührungsebene des Kegels ist, der von $\mathfrak{O}_1$ durch die Raumkurve gelegt werden kann, längs desjenigen Kegelstrahls e_1, welcher Tangente der Raumkurve im Punkte $\mathfrak{O}_1$ ist. Das Analoge gilt natürlich auch für den Punkt $\mathfrak{O}$. Da jede zwei Punkte einer Raumkurve $C^{(3)}$, wie wir gesehen haben, als Mittelpunkte

zweier kollinearen Bündel zur Erzeugung der $C^{(3)}$ gewählt werden können, so läfst sich hiernach an jedem Punkte der $C^{(3)}$ die Tangente und die Schmiegungsebene konstruieren; aber auch die Aufgabe:

Wenn eine Raumkurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ als das Erzeugnis zweier kollinearen Bündel $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ gegeben ist, in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{x}$ derselben die Tangente und die Schmiegungsebene zu konstruieren,

läfst sich unmittelbar lösen, wie folgt:

Wir haben gesehen, dafs dem doppelt aufzufassenden Strahle:

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = e = f_1$$

die beiden Tangenten e_1 und f der Raumkurve $C^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}$ entsprechen, also durch die gegebenen kollinearen Bündel bekannt sind. Ferner sind e und e_1 die Axen zweier entsprechenden Ebenenbüschel in den kollinearen Bündeln, und da $e\,e_1$ sich in $\mathfrak{O}_1$ treffen, so sind die Schnittlinien entsprechender Ebenen dieser beiden projektivischen Ebenenbüschel die Strahlen eines Kegels 2. O. $\mathfrak{O}_1^{(2)}$, welcher von sämtlichen durch $\mathfrak{O}_1$ gehenden Sekanten der $C^{(3)}$ gebildet wird, weil jede Schnittlinie zweier entsprechenden Ebenen der kollinearen Bündel eine Sekante der $C^{(3)}$ ist. Wir wissen sodann, dafs der Ebene $[e\,e_1]$, im Ebenenbüschel (e) aufgefafst, die durch e_1 gehende Schmiegungsebene ϖ_1 der $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{O}_1$ entsprechen mufs, welche zusammenfällt mit der Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ längs des Kegelstrahls e_1; aber derselben Ebene $[f_1 e_1]$, im Ebenenbüschel e_1 aufgefafst, entspricht die Ebene $[fe]$, welche zusammenfällt mit der Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $f_1 = e$, und diese Ebene $[fe]$ geht, wie wir sehen, durch den Strahl f, d. h. durch die Tangente der $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{O}$. Wir schliefsen also: Die Berührungsebene am Kegel $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}|$ geht durch die Tangente der $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{O}$, und ebenso geht die Berührungsebene am Kegel $\mathfrak{O}^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ durch die Tangente der $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{O}_1$.

Nehmen wir jetzt einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$, so müssen

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = x \qquad |\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}| = x_1$$

entsprechende Strahlen der gegebenen kollinearen Bündel sein. Dieselben werden daher die Axen entsprechender projektivischer Ebenenbüschel sein in den gegebenen Bündeln $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$, und je zwei entsprechende Ebenen $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ schneiden sich in einem Kegelstrahl eines Kegels 2. O. $\mathfrak{x}^{(2)}$, welcher den Punkt $\mathfrak{x}$ zum Mittelpunkt und die durch denselben gehenden Sekanten der $C^{(3)}$ zu Kegelstrahlen hat.

Um die Tangente $t_\mathfrak{x}$ in dem Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ zu konstruieren, brauchen wir nach dem vorigen Satze nur den Punkt $\mathfrak{x}$ einmal mit $\mathfrak{O}$ und das andere Mal mit $\mathfrak{O}_1$ zu vertauschen, d. h.:

Man konstruiere die Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{O}^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = x$ und die Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}| = x_1$, dann schneiden sich diese beiden Berührungsebenen in der gesuchten Tangente $t_\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ am Punkte $\mathfrak{x}$.

Um die Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{x}$ in dem Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ zu konstruieren, brauchen wir nur die Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{x}^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $t_\mathfrak{x}$ aufzusuchen. Von diesem Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$ kennt man aber den Kegelstrahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{O}|$ und seine Berührungsebene $[\mathfrak{x}f]$, den Kegelstrahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{O}_1|$ und seine Berührungsebene $[\mathfrak{x}e_1]$ und aufserdem den Kegelstrahl $t_\mathfrak{x}$, dessen Berührungsebene $\tau_\mathfrak{x}$ demnach in bekannter Weise konstruiert wird:

Man bestimme die Schnittlinie der Ebenen $[t_\mathfrak{x}\mathfrak{O}_1]$ und $[\mathfrak{x}f]$, zweitens die Schnittlinie der Ebenen $[t_\mathfrak{x}\mathfrak{O}]$ und $[\mathfrak{x}e_1]$; die Ebene, welche beide Geraden verbindet, schneidet die Ebene $[xx_1]$ in einem Strahle, welcher mit $t_\mathfrak{x}$ durch eine Ebene verbunden die gesuchte Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{x}$ liefert.

Hierdurch sind wir nun auch auf dem Standpunkte angelangt, von welchem unsere Untersuchung auf S. 266 und 276 ausging, die zu dem Identitätsbeweise der Raumkurven 3. O. und dritter Klasse und zu den wesentlichsten Eigenschaften dieser Raumkurven führte. Wir können daher hier

auf die früheren Betrachtungen verweisen und bemerken nur noch, dafs auch die Erzeugung der Raumkurve $C^{(3)}$ durch zwei kollineare Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ zu den verschiedenen Konstruktionen führt, von denen einige in § 32 und § 33 gegeben wurden. In der That erkennt man sofort, dafs sechs beliebig gegebene von einander unabhängige Punkte zur Bestimmung der Raumkurve $C^{(3)}$ notwendig und hinreichend sind; denn wählt man zwei derselben $\mathfrak{O}$ $\mathfrak{O}_1$ zu Mittelpunkten zweier Bündel und verbindet die vier übrigen durch Strahlenpaare mit jenen, so ist die kollineare Beziehung der beiden Bündel durch diese vier Paare entsprechender Strahlen gerade bestimmt, also auch die Raumkurve zu konstruieren. Ebenso unmittelbar ergiebt sich auch die Konstruktion der Raumkurve durch zwei Punkte und vier Sekanten derselben (S. 442), sowie durch drei Punkte und drei Sekanten, und endlich durch fünf Punkte und eine Sekante, indem wir jedesmal zwei von den Punkten zu Mittelpunkten zweier Bündel wählen dürfen und die kollineare Beziehung derselben entweder durch vier Paare entsprechender Ebenen oder durch ein Paar entsprechender Strahlen und drei Paare entsprechender Ebenen, oder endlich durch ein Paar entsprechender Ebenen und drei Paare entsprechender Strahlen herstellen (S. 352), die allemal durch die übrigen Bestimmungsstücke geradezu gegeben sind. Dagegen stellt sich auch hier, wie in § 33, heraus, dafs durch vier Punkte und zwei Sekanten keine Raumkurve $C^{(3)}$ gelegt werden kann, weil, wenn wir zwei von den Punkten zu Mittelpunkten $\mathfrak{O}$ $\mathfrak{O}_1$ der Bündel wählen, die kollineare Beziehung derselben durch die übrigen Bestimmungsstücke n i c h t hergestellt werden kann (S. 352). Die Aufgabe, durch einen Punkt und fünf Sekanten eine $C^{(3)}$ zu legen, welche oben (S. 257) gelöst ist, läfst sich auch hier, von der Erzeugung durch zwei kollineare Bündel aus, lösen, doch überlassen wir diese Ausführung dem Leser.

Dagegen wollen wir noch auf zwei besondere Fälle aufmerksam machen, in denen die Raumkurve $C^{(3)}$ zerfällt:

1) Wenn die beiden gegebenen kollinearen Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ insbesondere eine solche Lage zu einander haben, dafs, während den in $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = e = f_1$ vereinigten Strahlen die Strahlen e_1 und f entsprechen, die Ebene $[ef]$ mit der entsprechenden

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = x \qquad |\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}| = x_1$$

entsprechende Strahlen der gegebenen kollinearen Bündel sein. Dieselben werden daher die Axen entsprechender projektivischer Ebenenbüschel sein in den gegebenen Bündeln $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$, und je zwei entsprechende Ebenen $\xi\,\xi_1$ schneiden sich in einem Kegelstrahl eines Kegels 2. O. $\mathfrak{x}^{(2)}$, welcher den Punkt $\mathfrak{x}$ zum Mittelpunkt und die durch denselben gehenden Sekanten der $C^{(3)}$ zu Kegelstrahlen hat.

Um die Tangente $t_\mathfrak{x}$ in dem Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ zu konstruieren, brauchen wir nach dem vorigen Satze nur den Punkt $\mathfrak{x}$ einmal mit $\mathfrak{O}$ und das andere Mal mit $\mathfrak{O}_1$ zu vertauschen, d. h.:

Man konstruiere die Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{O}^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = x$ und die Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}| = x_1$, dann schneiden sich diese beiden Berührungsebenen in der gesuchten Tangente $t_\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ am Punkte $\mathfrak{x}$.

Um die Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{x}$ in dem Punkte $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ zu konstruieren, brauchen wir nur die Berührungsebene des Kegels $\mathfrak{x}^{(2)}$ längs des Kegelstrahls $t_\mathfrak{x}$ aufzusuchen. Von diesem Kegel $\mathfrak{x}^{(2)}$ kennt man aber den Kegelstrahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{O}|$ und seine Berührungsebene $[\mathfrak{x}f]$, den Kegelstrahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{O}_1|$ und seine Berührungsebene $[\mathfrak{x}e_1]$ und aufserdem den Kegelstrahl $t_\mathfrak{x}$, dessen Berührungsebene $\tau_\mathfrak{x}$ demnach in bekannter Weise konstruiert wird:

Man bestimme die Schnittlinie der Ebenen $[t_\mathfrak{x}\mathfrak{O}_1]$ und $[\mathfrak{x}f]$, zweitens die Schnittlinie der Ebenen $[t_\mathfrak{x}\mathfrak{O}]$ und $[\mathfrak{x}e_1]$; die Ebene, welche beide Geraden verbindet, schneidet die Ebene $[xx_1]$ in einem Strahle, welcher mit $t_\mathfrak{x}$ durch eine Ebene verbunden die gesuchte Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{x}$ liefert.

Hierdurch sind wir nun auch auf dem Standpunkte angelangt, von welchem unsere Untersuchung auf S. 266 und 276 ausging, die zu dem Identitätsbeweise der Raumkurven 3. O. und dritter Klasse und zu den wesentlichsten Eigenschaften dieser Raumkurven führte. Wir können daher hier

auf die früheren Betrachtungen verweisen und bemerken nur noch, dafs auch die Erzeugung der Raumkurve $C^{(3)}$ durch zwei kollineare Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ zu den verschiedenen Konstruktionen führt, von denen einige in § 32 und § 33 gegeben wurden. In der That erkennt man sofort, dafs sechs beliebig gegebene von einander unabhängige Punkte zur Bestimmung der Raumkurve $C^{(3)}$ notwendig und hinreichend sind; denn wählt man zwei derselben $\mathfrak{O}$ $\mathfrak{O}_1$ zu Mittelpunkten zweier Bündel und verbindet die vier übrigen durch Strahlenpaare mit jenen, so ist die kollineare Beziehung der beiden Bündel durch diese vier Paare entsprechender Strahlen gerade bestimmt, also auch die Raumkurve zu konstruieren. Ebenso unmittelbar ergiebt sich auch die Konstruktion der Raumkurve durch zwei Punkte und vier Sekanten derselben (S. 442), sowie durch drei Punkte und drei Sekanten, und endlich durch fünf Punkte und eine Sekante, indem wir jedesmal zwei von den Punkten zu Mittelpunkten zweier Bündel wählen dürfen und die kollineare Beziehung derselben entweder durch vier Paare entsprechender Ebenen oder durch ein Paar entsprechender Strahlen und drei Paare entsprechender Ebenen, oder endlich durch ein Paar entsprechender Ebenen und drei Paare entsprechender Strahlen herstellen (S. 352), die allemal durch die übrigen Bestimmungsstücke geradezu gegeben sind. Dagegen stellt sich auch hier, wie in § 33, heraus, dafs durch *vier* Punkte und zwei Sekanten keine Raumkurve $C^{(3)}$ gelegt werden kann, weil, wenn wir zwei von den Punkten zu Mittelpunkten $\mathfrak{O}$ $\mathfrak{O}_1$ der Bündel wählen, die kollineare Beziehung derselben durch die übrigen Bestimmungsstücke n i c h t hergestellt werden kann (S. 352). Die Aufgabe, durch einen Punkt und fünf Sekanten eine $C^{(3)}$ zu legen, welche oben (S. 257) gelöst ist, läfst sich auch hier, von der Erzeugung durch zwei kollineare Bündel aus, lösen, doch überlassen wir diese Ausführung dem Leser.

Dagegen wollen wir noch auf zwei besondere Fälle aufmerksam machen, in denen die Raumkurve $C^{(3)}$ zerfällt:

1) Wenn die beiden gegebenen kollinearen Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ insbesondere eine solche Lage zu einander haben, dafs, während den in $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = e = f_1$ vereinigten Strahlen die Strahlen e_1 und f entsprechen, die Ebene $[ef]$ mit der entsprechenden

Ebene $[e_1 f_1]$ zusammenfällt, also die Tangenten e_1 und f in den Punkten $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}$ in einer Ebene liegen, dann zerfällt das Erzeugnis $C^{(3)}$, denn in den zusammenfallenden Ebenen $[ef]$ und $[e_1 f_1]$ sind $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ die Mittelpunkte zweier entsprechenden projektivischen Strahlenbüschel, von denen je zwei entsprechende Strahlen $x\, x_1$ sich treffen müssen; ihre Schnittpunkte $\mathfrak{x}$ liegen daher auf einem Kegelschnitt $C^{(2)}$, welcher ein Teil des Ortes $C^{(3)}$ ist. Zweitens werden aber auch die projektivischen Ebenenbüschel in den beiden kollinearen Bündeln, deren Axen e und e_1 sind, perspektivisch liegen, weil ihre Axen sich treffen und in der sie verbindenden Ebene zwei entsprechende Ebenen vereinigt sind (S. 7), folglich zerfällt der Kegel $\mathfrak{O}_1^{(2)}$, auf welchem die Raumkurve liegen mufs, in ein Ebenenpaar, von welchem $[ee_1]$ eine Ebene ist; aus gleichem Grunde zerfällt auch der Kegel $\mathfrak{O}^{(2)}$, das Erzeugnis der beiden projektivischen Ebenenbüschel mit den Axen f und f_1, in ein Ebenenpaar, von welchem die vorige Ebene $[ff_1]$ ein Teil ist. Die beiden Kegel $\mathfrak{O}^{(2)}\, \mathfrak{O}_1^{(2)}$ haben also aufser den zusammenfallenden Ebenen $[ee_1] = [ff_1]$ noch die Schnittlinie der beiden übrigen Ebenen, d. h. eine Gerade l gemeinsam. Diese wird aufserhalb jener Ebene liegen, aber notwendig dem vorigen Kegelschnitt $C^{(2)}$ in einem Punkte begegnen; denn sei von dem in ein Ebenenpaar zerfallenden Kegel $\mathfrak{O}^{(2)}$ der von $[ef]$ verschiedene Teil die Ebene ε, welche dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ aufser in $\mathfrak{O}$ in einem zweiten Punkte $\mathfrak{D}$ begegne, so wird die Ebene ε auch als eine dem Bündel $\mathfrak{O}$ angehörige aufgefafst werden können, und die ihr entsprechende Ebene ε_1 im Bündel $\mathfrak{O}_1$ wird dann notwendig diejenige Ebene sein, welche von dem in ein Ebenenpaar zerfallenden Kegel $\mathfrak{O}_1^{(2)}$ der von $[e_1 f_1]$ verschiedene Teil ist, also ist die Schnittlinie:

$$|\varepsilon \varepsilon_1| = l,$$

denn da l ein Teil der $C^{(3)}$ ist, so werden alle Strahlenpaare von $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ nach den Punkten von l hin entsprechende Strahlen sein in den beiden kollinearen Bündeln, folglich auch ε und ε_1 entsprechende Ebenen und da die Schnittlinie von ε mit $[ef]$ entsprechend sein mufs der Schnittlinie von ε_1 mit $[e_1 f_1]$, diese beiden Strahlen sich aber

auf dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ schneiden müssen, so folgt, dafs l durch den Punkt $\mathfrak{D}$ gehen mufs oder den Kegelschnitt $C^{(2)}$ trifft. In diesem Falle artet also die Raumkurve $C^{(3)}$ aus in einen Kegelschnitt $C^{(2)}$ und eine Gerade l, welche dem Kegelschnitt in einem Punkte begegnet.

2) Wenn die beiden gegebenen kollinearen Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ insbesondere eine solche Lage zu einander haben, dafs in die Verbindungslinie der Mittelpunkte $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ zwei entsprechende Strahlen hineinfallen $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = e = f_1 = e_1 = f$, dann zerfällt die Kurve $C^{(3)}$ wiederum, indem diese Gerade $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1| = l$ einen Teil der Kurve bildet; denn jeder Punkt der zusammenfallenden entsprechenden Strahlen kann als ein Punkt des Ortes $C^{(3)}$ angesehen werden. Ferner sind aber die zusammenfallenden Strahlen $e\,e_1$ die Axen entsprechender projektivischen Ebenenbüschel in den kollinearen Bündeln, und da diese Ebenenbüschel koaxial liegen, so haben sie ein reelles oder konjugiert-imaginäres Paar Doppelebenen (S. 15). Sind diese reell, so haben wir in einer derselben zwei projektivische Strahlenbüschel um $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$, die perspektivisch liegen müssen, weil in die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen hineinfallen, folglich liegen die Schnittpunkte aller übrigen Paare entsprechender Strahlen auf einer Geraden g, die daher dem Orte $C^{(3)}$ angehört; aus gleichem Grunde erhalten wir in der zweiten Doppelebene eine Gerade g'. In diesem Falle artet also die Raumkurve $C^{(3)}$ in drei gerade Linien $l\,g\,g'$ aus, von denen eine l den beiden übrigen $g\,g'$ begegnet; die Ebenen $[lg]$ und $[lg']$ können auch konjugiert-imaginär sein, in welchem Falle die Geraden g und g' nicht reell sind.

Das dem Erzeugnis zweier kollinearen Bündel dual-gegenüberstehende Erzeugnis zweier kollinearen Felder ist die Raumkurve dritter Klasse, deren Identität mit der Raumkurve $C^{(3)}$ wir oben (S. 272) nachgewiesen haben, d. h. dieselbe Raumkurve, als Aufeinanderfolge von Punkten aufgefafst, ist die Raumkurve dritter Ordnung, als Aufeinanderfolge von Schmiegungsebenen aufgefafst, die Raumkurve dritter Klasse, und ihre Erzeugung ist nunmehr folgende:

Sind die Ebenen ε und ε_1 die Träger zweier im

Raume beliebig gegebenen kollinearen Felder, so wird nicht jeder Strahl x (in der Ebene ε) seinem entsprechenden x_1 (in der Ebene ε_1) begegnen, wohl aber findet dies bei einer (einfachen) Unendlichkeit von Strahlenpaaren statt, und sämtliche durch solche Strahlenpaare bestimmten Ebenen sind die Schmiegungsebenen einer Raumkurve dritter Klasse. Jede Verbindungslinie zweier entsprechenden Punkte der beiden kollinearen Felder ist Schnittlinie zweier reellen oder konjugiert-imaginären Schmiegungsebenen, und die Totalität aller solchen Schnittlinien ist so im Raume verbreitet, daſs in jeder beliebigen Ebene eine und nur eine derselben liegt, die auf folgende Art gefunden wird: Eine beliebige Ebene α schneide die ebenen Träger $\varepsilon\,\varepsilon_1$ der gegebenen kollinearen Felder in den beiden Strahlen x und y_1, denen in beiderlei Sinn entsprechend seien die Strahlen x_1 und y; verbindet man die Punkte, in welchen diese beiden Strahlen x_1 und y der Ebene α begegnen, so ist die Verbindungslinie die gesuchte Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen.

Die ganze der obigen dual-gegenüberstehende Untersuchung des Erzeugnisses zweier kollinearen Felder in allgemeiner Lage kann derselben in bekannter Weise nachgebildet werden, so daſs wir die Ausführung füglich unterlassen dürfen, zumal ein Teil der hier auftretenden Resultate bereits früher in den §§ 31—39 hervorgehoben ist.

§ 52. Die Oberfläche zweiter Ordnung als Erzeugnis zweier reziproken Bündel.

Wenn zwei reziproke Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ beliebig im Raume gegeben sind, so daſs einem beliebigen Strahle x des Bündels $\mathfrak{O}$ eine bestimmte Ebene ξ_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ und gleichzeitig einem beliebigen Strahle x_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ eine bestimmte Ebene ξ des Bündels $\mathfrak{O}$ und umgekehrt entspricht, und die entsprechenden Elemente in der oben (S. 351) beschriebenen Abhängigkeit der reziproken Beziehung zu einander stehen, dann kann man fragen nach dem gesamten Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente und diesen Ort als das Erzeugnis der gegebenen reziproken Bündel definieren.

Dafs im allgemeinen auf einer beliebigen Geraden g im Raume zwei Punkte des gesuchten Ortes enthalten sind, erkennen wir leicht aus folgender Betrachtung:

Wenn wir auf der Geraden g einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ laufen lassen, so beschreibt $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}|$ ein ebenes Strahlenbüschel, welchem ein bestimmtes, mit ihm projektivisches Ebenenbüschel im Bündel $\mathfrak{O}_1$ entspricht; die Ebenen dieses Büschels schneiden auf der Geraden g eine zweite mit $\mathfrak{x}$ projektivische Punktreihe aus, und die Doppelelemente dieser beiden zusammenliegenden projektivischen Punktreihen sind offenbar Punkte des gesuchten Ortes. Wir schliefsen also:

Auf einer beliebigen Geraden im Raume sind im allgemeinen zwei Punkte des gesuchten Ortes vorhanden, die entweder beide reell sind, oder zusammenfallen, oder konjugiert-imaginär sein können; sollten insbesondere drei Punkte des Ortes auf einer Geraden g liegen, dann müssen sämtliche Punkte derselben dem Orte angehören, denn alsdann müssen die auf einander liegenden projektivischen Punktreihen identisch sein, also jeder Punkt ein Doppelpunkt derselben.

Wir schliefsen hieraus, dafs der gesuchte Ort eine Oberfläche zweiter Ordnung ist, und können dies weiter bestätigen, wie folgt:

Irgend einer durch den Mittelpunkt $\mathfrak{O}$ des einen Bündels gelegten Ebene $\mathfrak{x}$ entspricht ein bestimmter Strahl x_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ und den durch $\mathfrak{O}$ in der Ebene $\mathfrak{x}$ gezogenen Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels die durch x_1 gehenden Ebenen eines Ebenenbüschels, welches mit dem vorigen Strahlenbüschel projektivisch ist; die Schnittpunkte entsprechender Elemente solcher zwei Gebilde sind daher in der Ebene $\mathfrak{x}$ gelegen, nämlich die Punkte eines Kegelschnittes $\mathfrak{x}^{(2)}$, der durch die Punkte $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, x_1)$ hindurchgeht, und dessen Tangenten in diesen Punkten leicht bestimmt werden können. Der Ebene $[x_1\mathfrak{O}]$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$ aufgefafst entspricht nämlich ein bestimmter Strahl im Bündel $\mathfrak{O}$, welcher offenbar die Tangente im Punkte $\mathfrak{O}$ am Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ ist, und dem Strahle $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}|$, im Bündel $\mathfrak{O}$ aufgefafst, entspricht eine bestimmte durch x_1 gehende Ebene des Bündels $\mathfrak{O}_1$, welche

die Ebene $\mathfrak{x}$ in der Tangente des Kegelschnittes $\mathfrak{x}^{(2)}$ im Punkte $\mathfrak{x}$ schneiden wird.

Wir schliefsen also:

Jede durch einen der beiden Mittelpunkte der gegebenen Bündel, etwa durch $\mathfrak{O}$, beliebig gelegte Ebene $\mathfrak{x}$ enthält unendlich viele Punkte des gesuchten Ortes, welche auf einem durch $\mathfrak{O}$ gehenden Kegelschnitte $\mathfrak{x}^{(2)}$ liegen. Wird die Ebene $\mathfrak{x}$ im Bündel $\mathfrak{O}$ von dem entsprechenden Strahle x_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ in dem Punkte $\mathfrak{x}$ getroffen, und zieht man den Strahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = y$, so entspricht ihm eine Ebene η_1 im Bündel $\mathfrak{O}_1$; die Schnittlinie:

$$|\xi\eta_1|$$

ist allemal Tangente des Kegelschnittes $\mathfrak{x}^{(2)}$; sie ist also auch Tangente der Ortsoberfläche, d. h. sie enthält zwei zusammenfallende Punkte derselben. Hieraus bestätigt sich nochmals das früher erkannte Resultat, nämlich dafs der Ort aller Schnittpunkte:

$$(\xi x_1)$$

identisch ist mit dem Ort aller Schnittpunkte:

$$(y\eta_1),$$

nämlich dasselbe Erzeugnis der beiden gegebenen reziproken Bündel, mag man das eine als Strahlen-, das andere als Ebenenbündel auffassen oder umgekehrt.

Verändern wir beliebig die durch $\mathfrak{O}$ gelegte Ebene $\mathfrak{x}$, so verändert sich auch der Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$, aber wenn x_1 der der Ebene $\mathfrak{x}$ entsprechende Strahl des Bündels $\mathfrak{O}_1$ ist, wie oben, so entspricht allemal der Ebene $[x_1\mathfrak{O}]$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$ die Tangente am Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ im Punkte $\mathfrak{O}$. Da nun alle diese Ebenen $[x_1\mathfrak{O}]$ beständig durch den festen Strahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}|$ gehen, so liegen jene Tangenten sämtlich in einer Ebene; wir nennen diese die Berührungsebene der erzeugten Oberfläche im Punkte $\mathfrak{O}$. Wir schliefsen also:

Legt man durch einen der beiden Mittelpunkte, der gegebenen Bündel, etwa durch $\mathfrak{O}$, beliebig viele Ebenen $\mathfrak{x}$, so enthält jede derselben einen Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$, der dem gesuchten Orte angehört. Die

Tangenten aller dieser Kegelschnitte im Punkte $\mathfrak{O}$ liegen in einer und derselben Ebene, nämlich derjenigen, welche dem Strahle $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}|$ als dem Bündel $\mathfrak{O}_1$ angehörig im Bündel $\mathfrak{O}$ entspricht, und das Gleiche gilt für $\mathfrak{O}_1$, also:

Dem in der Verbindungslinie der Mittelpunkte $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ der gegebenen Bündel vereinigten Strahle der beiden Bündel entsprechen in beiderlei Sinn die Berührungsebenen der erzeugten Oberfläche in den Punkten $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$.

Der früheren Terminologie gemäfs bezeichnen wir den Strahl $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1|$ in doppeltem Sinne:

$$|\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1| = e = f_1$$

und die ihm entsprechenden Ebenen, d. h. die Berührungsebenen in $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}$, durch

$$\varepsilon_1 \text{ und } \varphi.$$

Aus den Untersuchungen des § 50 geht nun ganz allgemein hervor, dafs in einer beliebig angenommenen Ebene unendlich viele Punkte des gesuchten Ortes enthalten sind, die auf einem Kegelschnitt liegen; denn fassen wir eine willkürlich gelegte Ebene doppelt auf und lassen sie von den Strahlen und Ebenen der beiden gegebenen Bündel $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ treffen, so haben wir zwei zusammenliegende reziproke ebene Felder, und die incidenten Elemente derselben werden dem gesuchten Orte angehören, d. h. diejenigen Punkte, deren entsprechende Strahlen durch sie selbst gehen. Wir haben aber gesehen, dafs diese Punkte im allgemeinen einen (reellen oder imaginären) Kegelschnitt erfüllen, den wir durch ein mittels reeller Konstruktion herzustellendes ebenes Polarsystem zu ersetzen gelernt haben. Hiernach tritt also das allseitig begründete Resultat hervor:

Zwei beliebig im Raume liegende reziproke Bündel $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ erzeugen eine Oberfläche 2. O., d. h. entspricht jedem Strahl x des Bündels $\mathfrak{O}$ eine Ebene ξ_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ und umgekehrt, so ist der gesamte Ort des Schnittpunkts $(x\xi_1)$ oder $(x_1\xi)$ die Fläche $F^{(2)}$; sie geht insbesondere durch die Mittelpunkte der beiden Bündel und wird in diesen Punkten von

denjenigen Ebenen berührt, welche dem in der Verbindungslinie der Mittelpunkte vereinigten Strahle in doppeltem Sinne entsprechen.

Bevor wir die Fläche 2. O. rücksichtlich ihrer Durchschnitte mit beliebigen Ebenen näher betrachten und insbesondere solche ebene Schnitte aufsuchen, die in Linienpaare zerfallen, wollen wir einige allgemeine Folgerungen ziehen aus der Erzeugung der Fläche 2. O. $F^{(2)}$ durch zwei reziproke Bündel. Da vier von einander unabhängige beliebig gewählte Elementenpaare die reziproke Beziehung der beiden Bündel bestimmen (S. 351), so folgt:

Wenn durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ im Raume vier Strahlen $a\ b\ c\ d$, von denen keine drei in einer Ebene liegen, gezogen werden, und durch einen zweiten Punkt $\mathfrak{O}_1$ vier Ebenen $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \delta_1$, von denen keine drei sich in derselben Geraden schneiden, gelegt werden, und wenn jene Strahlen diesen Ebenen in irgend einer Weise entsprechend gesetzt werden, wie die entsprechenden Buchstaben es bezeichnen, so liegen die vier Schnittpunkte:

$$(a, \alpha_1) \quad (b, \beta_1) \quad (c, \gamma_1) \quad (d, \delta_1),$$

ferner die sechs Schnittpunkte:

$$([ab], |\alpha_1\beta_1|)\ ([ac], |\alpha_1\gamma_1|)\ ([ad], |\alpha_1\delta_1|)$$
$$([bc], |\beta_1\gamma_1|)\ ([bd], |\beta_1\delta_1|)\ ([cd], |\gamma_1\delta_1|),$$

d. h. die Punkte, in welchen eine Ebene, die zwei der gegebenen vier Strahlen verbindet, von dem Strahle getroffen wird, in welchem die entsprechenden beiden Ebenen sich schneiden, mit den beiden Mittelpunkten:

$$\mathfrak{O} \text{ und } \mathfrak{O}_1,$$

also zusammen zwölf Punkte auf einer Fläche 2. O. $F^{(2)}$.

Nehmen wir dagegen nur drei Paare entsprechender Elemente der beiden reziproken Bündel an: $a\ b\ c$ und $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, so ist die Beziehung nicht vollständig bestimmt, und wir können das vierte in mannigfaltigster Weise verändern; alle dabei erzeugten Flächen $F^{(2)}$ gehen dann offenbar durch dieselben acht Punkte:

$$\mathfrak{O} \quad \mathfrak{O}_1$$
$$(a, \alpha_1) \quad (b, \beta_1) \quad (c, \gamma_1)$$
$$([bc], |\beta_1 \gamma_1|) \quad ([ca], |\gamma_1 \alpha_1|) \quad ([ab], |\alpha_1 \beta_1|).$$

Aber es läfst sich auch allgemeiner nachweisen, dafs irgend eine in anderer Weise durch zwei reziproke Bündel erzeugte Fläche $F^{(2)}$, sobald sie durch sieben von diesen Punkten geht, notwendig auch durch den achten gehen mufs.

In der That bezeichnen wir die drei Ebenen, welche die Strahlen $a\, b\, c$ paarweise verbinden:

$$[bc] = \alpha \quad [ca] = \beta \quad [ab] = \gamma,$$

so lassen sich die vorigen acht Punkte als Schnittpunkte von je drei Ebenen so darstellen:

$$\mathfrak{O} = (\alpha\beta\gamma) \quad \mathfrak{O}_1 = (\alpha_1\beta_1\gamma_1)$$
$$\mathfrak{a} = (\alpha_1\beta\gamma) \quad \mathfrak{b} = (\alpha\beta_1\gamma) \quad \mathfrak{c} = (\alpha\beta\gamma_1)$$
$$\mathfrak{a}' = (\alpha\beta_1\gamma_1) \quad \mathfrak{b}' = (\alpha_1\beta\gamma_1) \quad \mathfrak{c}' = (\alpha_1\beta_1\gamma).$$

Aus dieser mehr symmetrischen Bezeichnung erkennen wir, dafs diese Gruppe von acht Punkten sowohl in dem Ebenenpaar $\alpha\alpha_1$, als auch in dem Ebenenpaar $\beta\beta_1$ und in dem Ebenenpaar $\gamma\gamma_1$ liegt; also die Durchschnittspunkte dieser drei Ebenenpaare sind die vorigen acht Punkte. Sie stehen zugleich in solcher Abhängigkeit von einander, dafs, wenn wir sie in die vier Paare teilen:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{a}', \quad \mathfrak{b}\mathfrak{b}', \quad \mathfrak{c}\mathfrak{c}',$$

wir durch dieselbe Konstruktion, durch welche wir von $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ ausgehend zu den sechs übrigen Punkten gelangten, auch von einem der andern Paare ausgehend zu den sechs übrigen gelangen mittels derselben drei Ebenenpaare $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$; ja durch blofse Vertauschung der Ebenen innerhalb eines Paares erkennen wir, dafs wir von irgend zweien dieser acht Punkte ausgehend immer durch eine gleiche Konstruktion zu den sechs übrigen gelangen, eine besondere Eigentümlichkeit dieser räumlichen Figur.

Denken wir uns nun irgend eine Fläche $F^{(2)}$ durch sieben dieser Punkte gelegt, so wird sie die Ebene α, welche die vier Punkte enthält:

$$\mathfrak{O}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{a}',$$

in einem Kegelschnitt schneiden, der durch diese vier Punkte gehen mufs, und wenn sich die Fläche $F^{(2)}$, welche beständig durch die sieben Punkte $\mathfrak{O}\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{a}'\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{b}'\, \mathfrak{c}\, \mathfrak{c}'$ gehen soll, verändert, so wird der Kegelschnitt ein Büschel mit den vier festen Grundpunkten $\mathfrak{O}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}\, \mathfrak{a}'$ beschreiben. Die Ebene α_1, welche die drei übrigen Punkte $\mathfrak{b}'\, \mathfrak{c}'\, \mathfrak{a}$ enthält, wird aber von der Fläche $F^{(2)}$ auch in einem Kegelschnitt geschnitten, der durch die drei festen Punkte $\mathfrak{b}'\, \mathfrak{c}'\, \mathfrak{a}$ geht und aufserdem die Schnittlinie $|\alpha\, \alpha_1|$ in demselben Punktepaare schneidet, in welchem der der $F^{(2)}$ angehörige Kegelschnitt in der Ebene α dieselbe trifft; denn die Schnittlinie $|\alpha\, \alpha_1|$ wird von $F^{(2)}$ nur in einem Punktepaar geschnitten. Bei der Veränderung von $F^{(2)}$ schneidet nun das Kegelschnittbüschel, dessen vier feste Grundpunkte $\mathfrak{O}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}\, \mathfrak{a}'$ sind, auf der Geraden $|\alpha\, \alpha_1|$ bekanntlich eine Punktinvolution aus, und die Kegelschnitte in der Ebene α_1 müssen offenbar durch die drei festen Punkte $\mathfrak{b}'\, \mathfrak{c}'\, \mathfrak{a}$ und je zwei Punkte dieser Punktinvolution auf $|\alpha\, \alpha_1|$ gehen, woraus folgt, dafs sie noch durch einen vierten festen Punkt gehen müssen (Th. d. K. S. 235), also ein Büschel in der Ebene α_1 bilden; durch diesen vierten festen Punkt in der Ebene α_1 müssen daher auch sämtliche $F^{(2)}$ gehen, welche durch die vorigen sieben Punkte gehen; es ist aber leicht zu erkennen, dafs derselbe kein anderer als $\mathfrak{O}_1$ ist. Denn das durch die vier Punkte $\mathfrak{O}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}\, \mathfrak{a}'$ gelegte Linienpaar $|\mathfrak{O}\, \mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{c}\, \mathfrak{a}'|$ trifft die Schnittlinie $|\alpha\, \alpha_1|$ in einem Punktepaar, welches so ausgedrückt werden kann:

$$(|\mathfrak{O}\mathfrak{b}|,\, \alpha_1) = (\alpha\, \gamma\, \alpha_1) = (\alpha,\, |\mathfrak{a}\, \mathfrak{c}'|)$$

und

$$(|\mathfrak{c}\, \mathfrak{a}'|,\, \alpha_1) = (\alpha\, \gamma_1\, \alpha_1) = (\alpha,\, |\mathfrak{O}_1\, \mathfrak{b}'|),$$

folglich ist das Linienpaar $|\mathfrak{a}\, \mathfrak{c}'|$ und $|\mathfrak{O}_1\, \mathfrak{b}'|$ ein Kegelschnitt des Büschels in der Ebene α_1. Zweitens schneidet das durch die vier Punkte $\mathfrak{O}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}\, \mathfrak{a}'$ gelegte Linienpaar $|\mathfrak{O}\, \mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{a}'\, \mathfrak{b}|$ die Schnittlinie $|\alpha\, \alpha_1|$ in einem Punktepaar, welches so ausgedrückt werden kann:

$$(|\mathfrak{O}\, \mathfrak{c}|,\, \alpha_1) = (\alpha\, \beta\, \alpha_1) = (\alpha,\, |\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}'|)$$

$$(|\mathfrak{b}\, \mathfrak{a}'|,\, \alpha_1) = (\alpha\, \beta_1\, \alpha_1) = (\alpha,\, |\mathfrak{O}_1\, \mathfrak{c}'|),$$

folglich ist das Linienpaar $|\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}'|$ und $|\mathfrak{O}_1\, \mathfrak{c}'|$ ein zweiter Kegelschnitt des Büschels in der Ebene α_1, und diese beiden

Kegelschnitte haben aufser den drei Punkten $\mathfrak{b}' \mathfrak{c}' \mathfrak{a}$ noch den vierten Punkt $\mathfrak{O}_1$ gemein; folglich ist $\mathfrak{O}_1$ der gesuchte achte feste Punkt in der Gruppe, und wir können den Satz aussprechen:

Wenn durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ drei beliebige Strahlen $a b c$ gezogen werden, die nicht in einer Ebene liegen, und durch einen Punkt $\mathfrak{O}_1$ drei Ebenen $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ gelegt werden, die nicht durch einen Strahl gehen, so liegen die acht Schnittpunkte:

$$\mathfrak{O} \quad \mathfrak{O}_1$$

$$(a, \alpha_1) \quad (b, \beta_1) \quad (c, \gamma_1)$$

$$([b c], |\beta_1 \gamma_1|) \quad ([c a], |\gamma_1 \alpha_1|) \quad ([a b], |\alpha_1 \beta_1|)$$

immer so im Raume, dafs jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch sieben derselben geht, auch durch den achten gehen mufs.

Vermittelst dieses Satzes kann man zu dem bemerkenswerten Schlufs gelangen, dafs eine gegebene Fläche $F^{(2)}$ auf unendlich viele Arten als das Erzeugnis zweier reziproken Bündel aufgefafst werden kann, indem man zwei beliebige Punkte derselben zu Mittelpunkten der Bündel wählen darf und die reziproke Beziehung derselben in bestimmter Weise herstellen kann.

Sei nämlich $F^{(2)}$ eine gegebene Fläche 2. O. (hergestellt durch zwei reziproke Bündel) und nehmen wir zwei beliebige Punkte $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ derselben und aufserdem irgend welche andere Punkte der Fläche $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d} \ldots\ldots$, welche mit $\mathfrak{O}$ verbunden die Strahlen:

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{a}| = a \quad |\mathfrak{O}\mathfrak{b}| = b \quad |\mathfrak{O}\mathfrak{c}| = c \quad |\mathfrak{O}\mathfrak{d}| = d \ldots$$

liefern; legen wir ferner durch $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{a}|$ eine beliebige Ebene α_1, welche nicht durch $\mathfrak{O}$ gehen soll, dann wird dieselbe die Fläche $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitte schneiden, welcher durch $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{a}$ geht; die Ebenen $[ab]$ $[ac]$ $[ad] \ldots$ mögen diesen Kegelschnitt in den Punkten

$$\mathfrak{b}' \quad \mathfrak{c}' \quad \mathfrak{d}' \ldots$$

treffen, und die durch je drei Punkte gelegten Ebenen:

$$[\mathfrak{O}_1\mathfrak{b}\mathfrak{b}'] \quad [\mathfrak{O}_1\mathfrak{c}\mathfrak{c}'] \quad [\mathfrak{O}_1\mathfrak{d}\mathfrak{d}'] \ldots$$

seien:

$$\beta_1 \quad \gamma_1 \quad \delta_1 \ldots,$$

dann werden die Paare von Strahlen und Ebenen:

$$a\,\alpha_1, \quad b\,\beta_1, \quad c\,\gamma_1, \quad d\,\delta_1, \ldots$$

entsprechende Elemente zweier reziproken Bündel sein.

In der That, einmal bilden Ebenen $[ab]$ $[ac]$ $[ad]$ ein Ebenenbüschel, dessen Axe a ist und welches projektivisch ist mit dem von den Strahlen $|\alpha_1\beta_1|$ $|\alpha_1\gamma_1|$ $|\alpha_1\delta_1|\ldots$ gebildeten Strahlenbüschel, denn das Ebenenbüschel schneidet die Ebene α_1 in einem Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{a}$, und dieses Strahlenbüschel ist mit dem vorigen, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{O}_1$ ist, projektivisch, weil sich entsprechende Strahlen in den Punkten $\mathfrak{b}'$ $\mathfrak{c}'$ $\mathfrak{d}'\ldots$ eines Kegelschnitts treffen. Zweitens wird aber auch die Ebene β_1 die Fläche $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitt schneiden, und es werde dieser von den Ebenen

$$[ba] \quad [bc] \quad [bd]\ldots$$

getroffen in den Punkten:

$$\mathfrak{b}' \quad \mathfrak{c}'' \quad \mathfrak{d}'' \ldots.$$

Nach dem vorhin bewiesenen Satze mufs nun der Punkt $\mathfrak{c}''$ in der vorigen Ebene γ_1 liegen. Denn zu den sieben Punkten der Fläche $F^{(2)}$:

$$\mathfrak{O} \quad \mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c} \quad \mathfrak{b}' \quad \mathfrak{c}' \quad \mathfrak{O}_1$$

gehört notwendig ein achter Punkt, der nach dem Obigen dadurch gefunden wird, dafs wir die Lage dieser sieben Punkte betrachten; es liegen

$$\mathfrak{O} \;\mathfrak{a}\; \mathfrak{b}\; \mathfrak{b}' \text{ in einer Ebene } [ab],$$

ferner

$$\mathfrak{O} \;\mathfrak{a}\; \mathfrak{c}\; \mathfrak{c}' \text{ in einer Ebene } [ac]$$

und

$$\mathfrak{O}_1 \;\mathfrak{b}'\; \mathfrak{c}'\; \mathfrak{a} \text{ in einer Ebene } \alpha_1;$$

folglich wird der notwendige achte Punkt als der Schnittpunkt der drei Ebenen:

$$[\mathfrak{O}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] \quad [\mathfrak{O}_1\mathfrak{b}\mathfrak{b}'] \quad [\mathfrak{O}_1\mathfrak{c}\mathfrak{c}']$$

gefunden; dies sind aber die Ebenen:

$$[bc] \quad \beta_1 \quad \gamma_1,$$

und ihr Schnittpunkt ist der Punkt $\mathfrak{c}''$; folglich liegt der notwendig der Fläche $F^{(2)}$ angehörige Punkt $\mathfrak{c}''$ in der Ebene γ_1 und ebenso der der Fläche $F^{(2)}$ angehörige Punkt

$\mathfrak{d}''$ in der Ebene δ_1 u. s. w. Die Schnittlinien $|\beta_1\alpha_1|$ $|\beta_1\gamma_1|$ $|\beta_1\delta_1|\ldots$ bilden daher ein ebenes Strahlenbüschel in der Ebene β_1, welches mit dem Ebenenbüschel $b[acd\ldots]$ projektivisch sein mufs, weil die Schnittpunkte entsprechender Strahlen sich in den Punkten eines Kegelschnitts treffen.

Aus diesen beiden Bedingungen folgt aber (S. 351) die reziproke Beziehung des Strahlenbündels $\mathfrak{O}|abcd\ldots|$ mit dem Ebenenbündel $\mathfrak{O}_1[\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots]$, weil nämlich

$$a[bcd\ldots] \barwedge \alpha_1|\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots|$$

und gleichzeitig

$$b[acd\ldots] \barwedge \beta_1|\alpha_1\gamma_1\delta_1\ldots| \text{ ist.}$$

Da nun die beiden Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ in reziproker Beziehung stehen, wie wir nachgewiesen haben, so erzeugen sie eine Fläche 2. O., welche mit der vorgelegten Fläche $F^{(2)}$ soviel Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ldots$ gemeinschaftlich hat, als wir wollen, mithin ganz mit derselben zusammenfällt. Wir haben also folgendes Ergebnis:

Ist eine Oberfläche 2. O. durch zwei reziproke Bündel erzeugt, so kann dieselbe auf unendlich viele andere Arten erzeugt werden, indem man zwei beliebige Punkte $\mathfrak{O}\ \mathfrak{O}_1$ der Fläche $F^{(2)}$ zu Mittelpunkten zweier erzeugenden Bündel wählen darf, ferner einem beliebigen Strahle $|\mathfrak{O}\mathfrak{a}| = a$, welcher nach einem Punkte $\mathfrak{a}$ der $F^{(2)}$ hingeht, irgend eine durch den Strahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{a}|$ gelegte Ebene α_1 (welche nicht gleichzeitig durch $\mathfrak{O}$ geht) entsprechen läfst, alsdann entspricht jedem andern Strahle x des Bündels $\mathfrak{O}$ eine bestimmte Ebene ξ_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$, und der Ort sämtlicher Schnittpunkte $(x\xi_1)$ der beiden reziproken Bündel ist die gegebene Fläche $F^{(2)}$. Die dem Strahle x entsprechende Ebene ξ_1 wird aber gefunden, indem man zuerst den Punkt $\mathfrak{x}$ bestimmt, in welchem der Strahl x, aufser in $\mathfrak{O}$, zum andern Male der $F^{(2)}$ begegnet, ferner den Punkt $\mathfrak{x}'$, in welchem die Schnittlinie der beiden Ebenen $[ax]$ und α_1, aufser in $\mathfrak{a}$, zum andern Male der $F^{(2)}$ begegnet; dann ist die durch die drei Punkte $\mathfrak{O}_1\ \mathfrak{x}\ \mathfrak{x}'$ gelegte Ebene $[\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}\mathfrak{x}'] = \xi_1$ die entsprechende.

Wir haben also bei einer gegebenen $F^{(2)}$ zur Erzeugung derselben durch zwei reziproke Bündel aufser der willkürlichen Wahl zweier ihrer Punkte $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ zu Mittelpunkten der erzeugenden Bündel noch eine Willkürlichkeit frei, nämlich die Wahl der **einem** Strahle $|\mathfrak{O}\mathfrak{a}| = a$ entsprechenden Ebene α_1, welche durch den Strahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{a}|$ beliebig gelegt werden kann, nur nicht durch $\mathfrak{O}$ gehen darf, weil sonst alle Punkte des Strahles a der Oberfläche $F^{(2)}$ angehören müfsten.

Diese Erzeugung einer Oberfläche 2. O. durch zwei reziproke Bündel ist eine Erweiterung sehr bekannter Eigenschaften der Elementargeometrie. Denken wir uns durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ alle Strahlen x gezogen und durch einen beliebigen andern Punkt $\mathfrak{O}_1$ des Raumes alle Ebenen $\mathfrak{x}_1$, so dafs allemal der Strahl x auf der Ebene $\mathfrak{x}_1$ normal steht, so wird bekanntlich der gesamte Ort des Schnittpunktes $(x\mathfrak{x}_1)$ eine Kugel sein, welche $|\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1|$ zum Durchmesser hat. Nun treffen die Strahlen x die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ in Punkten $\mathfrak{y}^\infty$ und die entsprechenden Normalebenen $\mathfrak{x}_1$ schneiden ε_∞ in Strahlen y_1^∞ und wegen der Rechtwinkligkeit sind $\mathfrak{y}^\infty$ und y_1^∞ Pol und Polare eines besonderen ebenen Polarsystems auf ε_∞, welches von einem orthogonalen Polarbündel (S. 45) auf ε_∞ ausgeschnitten wird. Die Kernkurve dieses Polarsystems ist der unendlich-entfernte imaginäre Kreis $\mathfrak{K}_\infty^{(2)}$. Das Polarsystem in ε_∞ besteht aber aus zwei in besonderer Weise zusammenliegenden reziproken Feldern (S. 357), folglich werden auch das mit den Strahlen y_1^∞ perspektivisch liegende Ebenenbündel $\mathfrak{O}_1[\mathfrak{x}_1]$ und das mit den Punkten $\mathfrak{y}^\infty$ perspektivisch liegende Strahlenbündel $\mathfrak{O}|x|$ in reziproker Beziehung stehen, und wir haben die Kugel als das Erzeugnis zweier besonderen reziproken Bündel. Zugleich folgt hieraus das schon früher (S. 46) hervorgehobene Resultat, dafs alle Kugeln im Raume denselben unendlich-entfernten imaginären Kreis gemeinschaftlich haben.

§ 53. Konstruktion der $F^{(2)}$ durch neun gegebene Punkte.

Sind $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ die Mittelpunkte zweier reziproken Bündel, welche eine Oberfläche 2. O. $F^{(2)}$ erzeugen, und entspricht einem Strahle a des Bündels $\mathfrak{O}$ die Ebene α_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$, so wird die Ebene α_1 die Fläche $F^{(2)}$ in einem

Kegelschnitt $\alpha_1^{(2)}$ schneiden. Ziehen wir in der Ebene α_1 einen beliebigen Strahl b_1 durch $\mathfrak{O}_1$, so entspricht demselben in dem Bündel $\mathfrak{O}$ eine bestimmte Ebene β, und es mufs, da der Strahl b_1 in der Ebene α_1 liegt, die Ebene β durch den Strahl a gehen wegen der Reziprozität der beiden Bündel (S. 350). Die Ebene β schneidet aber die Fläche $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitt $\beta^{(2)}$, und es ist ersichtlich, dafs die beiden Schnittpunkte:

$$\mathfrak{a} = (a\alpha_1) \quad \mathfrak{b} = (b_1\beta)$$

den beiden Kegelschnitten $\alpha_1^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ gleichzeitig angehören müssen, indem sie auf der Schnittlinie ihrer Ebenen liegen. Da ein Kegelschnitt im allgemeinen durch fünf Punkte bestimmt wird, und die beiden Kegelschnitte $\alpha_1^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ zwei Punkte gemeinschaftlich haben, so repräsentieren sie zusammen $2 . 5 - 2 = 8$ Punkte der Fläche $F^{(2)}$; durch diese acht Punkte ist $F^{(2)}$ ebensowenig bestimmt, wie die reziproke Beziehung der beiden Bündel $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ durch die bis jetzt angenommenen Paare entsprechender Elemente bestimmt wird, denn wir haben nur ein Ebenenbüschel mit der Axe a und ein ihm projektivisches Strahlenbüschel in der Ebene α_1, ein Ebenenbüschel b_1 und ein ihm projektivisches Strahlenbüschel in der Ebene β; dies reicht aber zur Bestimmung der reziproken Beziehung noch nicht aus. Denn denken wir uns an den beiden Kegelschnitten $\alpha_1^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ die Tangenten in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gezogen, so ist jeder der beiden Kegelschnitte durch zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und aufserdem einen fünften Punkt $\mathfrak{O}$ resp. $\mathfrak{O}_1$ vollständig bestimmt; es entsprechen aber, wie wir wissen (S. 454), nicht nur den Strahlen $|\mathfrak{O}\mathfrak{a}| = a$ und $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{b}| = b_1$ die Ebenen α_1 und β, sondern auch dem Strahle $|\mathfrak{O}\mathfrak{b}|$ die durch $\mathfrak{O}_1$ und die Tangente in $\mathfrak{b}$ an dem Kegelschnitte $\beta^{(2)}$ gelegte Ebene, dem Strahle $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{a}|$ die durch $\mathfrak{O}$ und die Tangente in $\mathfrak{a}$ an dem Kegelschnitte $\alpha_1^{(2)}$ gelegte Ebene; wir haben also zwar vier Paare entsprechender Elemente beider Bündel, aber solche Paare, die nicht zur Bestimmung der reziproken Bündel ausreichen (S. 352), nämlich in jedem Bündel zwei Strahlen und zwei Ebenen.

Nehmen wir jetzt einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ der $F^{(2)}$, welcher nicht auf den Kegelschnitten $\alpha_1^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ liegt, als

neuntes Bestimmungsstück der Fläche hinzu, so wird die reziproke Beziehung der beiden Bündel dadurch vollständig bestimmt. Denn der Ebene $[a\mathfrak{p}]$, welche den Kegelschnitt $\alpha_1^{(2)}$ in einem bestimmten Punkte $\mathfrak{a}'$ zum andern Male (aufser in $\mathfrak{a}$) schneiden mufs, entspricht der Strahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{a}'|$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$; da nun der Strahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{p}|$ in der Ebene $[a\mathfrak{p}]$ liegt, so mufs dem Strahle $|\mathfrak{O}\mathfrak{p}|$ eine Ebene des Bündels $\mathfrak{O}_1$ entsprechen, die durch $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{a}'|$ geht; diese Ebene mufs aber auch durch $\mathfrak{p}$ gehen, weil $\mathfrak{p}$ ein Punkt der $F^{(2)}$ sein soll, folglich entspricht dem Strahle $|\mathfrak{O}\mathfrak{p}|$ die Ebene $[\mathfrak{O}_1\mathfrak{a}'\mathfrak{p}]$, und jetzt haben wir in dem Bündel $\mathfrak{O}$ drei Strahlen, die nicht in einer Ebene liegen, und deren entsprechende Ebenen, in dem Bündel $\mathfrak{O}_1$ einen Strahl b_1 und seine entsprechende Ebene β, wodurch die reziproke Beziehung bestimmt ist.

Wir erkennen hieraus, dafs neun Punkte zur Bestimmung einer Oberfläche 2. O. notwendig und hinreichend sein werden; dies geht auch unmittelbar daraus hervor, dafs, wenn wir die beiden Kegelschnitte $\alpha_1^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ der $F^{(2)}$ nehmen, welche auf der Schnittlinie ihrer Ebenen ein gemeinschaftliches Punktepaar besitzen, also nur als acht Punkte zur Bestimmung der Fläche zählen, und aufserdem einen beliebig im Raume liegenden neunten Punkt $\mathfrak{p}$, jede durch $\mathfrak{p}$ gelegte Ebene von den beiden Kegelschnitten in vier Punkten getroffen wird, die mit $\mathfrak{p}$ zusammen einen Kegelschnitt gerade bestimmen, welcher der $F^{(2)}$ angehören mufs. Wir können also auf sämtlichen durch $\mathfrak{p}$ gelegten Ebenen die Kegelschnitte der $F^{(2)}$ konstruieren, mithin die ganze Fläche.

Aber die zur Bestimmung der $F^{(2)}$ zu wählenden Punkte liegen hier in besonderer Weise verteilt, nämlich zweimal je fünf in einer Ebene, und es entsteht daher die allgemeinere

Aufgabe:

Durch neun unabhängig von einander im Raume gegebene Punkte (von denen keine drei auf einer Geraden, keine vier in einer Ebene liegen) eine Oberfläche 2. O. $F^{(2)}$ zu legen.

Da drei Punkte eine Ebene bestimmen, so verteilen wir die gegebenen neun Punkte in drei Gruppen zu je dreien:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$$

und legen durch je drei Punkte die drei Ebenen:

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma,$$

welche sich in den drei Geraden:

$$|\beta\gamma| = a \quad |\gamma\alpha| = b \quad |\alpha\beta| = c$$

schneiden, die durch den Punkt $\mathfrak{o}$ laufen.

Die gesuchte Fläche $F^{(2)}$ wird in jeder der drei Ebenen $\alpha\ \beta\ \gamma$ einen Kegelschnitt ausschneiden, von dem drei Punkte bekannt sind, und da sie jede der drei Geraden $a\ b\ c$ nur in je zwei (reellen oder konjugiert-imaginären) Punkten treffen kann, so müssen die drei Kegelschnitte auf den Schnittlinien ihrer Ebenen gemeinschaftliche Punktepaare ausschneiden, d. h. diese Schnittlinien paarweise zu gemeinschaftlichen Sekanten haben. Durch diese Bedingung werden die Kegelschnitte bestimmt werden.

Nehmen wir auf a einen willkürlichen Punkt $\mathfrak{p}$ und legen durch die vier Punkte $\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{c}_2\ \mathfrak{c}_3\ \mathfrak{p}$ ein Kegelschnittbüschel, so schneidet dasselbe die Gerade a außer in dem festen Punkte $\mathfrak{p}$ noch in einer Punktreihe $\mathfrak{x}$, die Gerade b aber in einer Involution von Punktepaaren $\mathfrak{y}\ \mathfrak{y}'$; beide Gebilde befinden sich in demselben Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{p})$ und werden durch dieses in eine Abhängigkeit von einander gesetzt, so daß zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ ein bestimmtes Punktepaar $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$ zugehört, und auch umgekehrt. Diese Abhängigkeit wird dadurch am einfachsten vermittelt, daß wir die Punktinvolution $(\mathfrak{y}\mathfrak{y}')$ auf eine einfache Punktreihe reduzieren, indem wir zu irgend einem beliebig gewählten festen Punkte des Trägers und zu dem veränderlichen Punktepaar $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$ den dem ersteren zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{t}$ nehmen; dann wird $\mathfrak{t}$ eine einfache Punktreihe beschreiben, die, welches auch der gewählte feste Punkt sei, immer projektivisch bleibt mit der von $\mathfrak{x}$ beschriebenen Punktreihe.*)

*) Wir stützen uns hierbei auf einige bekannte Sätze aus der Theorie der Kegelschnitte, die hier kurz angeführt werden mögen:

Wenn man ein Kegelschnittbüschel mit vier festen Grundpunkten hat und man von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}$ die Polaren in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels konstruiert, so laufen dieselben durch einen festen Punkt $\mathfrak{Q}$, beschreiben also ein Strahlenbüschel. Geht man von einem beliebigen andern Punkte $\mathfrak{P}'$ aus, so erhält man

Wir legen jetzt zweitens durch die drei festen Punkte $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3$ und die beiden veränderlichen Punkte $\mathfrak{y}\ \mathfrak{y}'$ der Punktinvolution einen Kegelschnitt $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{y}\mathfrak{y}')$, welcher bekanntlich (Th. d. K. S. 235) durch einen vierten festen Punkt gehen, also ein Büschel beschreiben mufs in der Ebene α und daher der Geraden c in dem veränderlichen Punktepaare $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ einer Punktinvolution begegnen wird. Die Punktinvolutionen $(\mathfrak{y}\mathfrak{y}')$ und $(\mathfrak{z}\mathfrak{z}')$, welche in demselben Kegelschnittbüschel enthalten sind, werden durch dasselbe in Abhängigkeit zu einander gesetzt, so dafs die Punktreihen, auf welche sie sich reduzieren lassen, projektivisch sind.

Endlich nehmen wir in der dritten Ebene β zunächst

---

ein Strahlenbüschel $\mathfrak{Q}'$. Die beiden Strahlenbüschel $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ sind allemal projektivisch, indem die Polaren von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ in Bezug auf denselben Kegelschnitt des Büschels sich entsprechen (Th. d. K. S. 299). Die Verbindungslinie $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}'|$ begegnet selbst den Kegelschnitten des Büschels in Punktepaaren einer Punktinvolution, und die Polaren von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ begegnen der Geraden in den vierten harmonischen Punkten rücksichtlich jedes Punktepaars; also bilden diese vierten harmonischen Punkte ebenfalls zwei projektivische Punktreihen. Wie man auch die Punkte $\mathfrak{P}$ verändern mag auf dem festen Träger der Punktinvolution, immer bleibt die Punktreihe der vierten harmonischen Punkte mit sich projektivisch, und wir haben dadurch die Punktinvolution auf eine einfache Punktreihe reduziert. Diese Punktreihe ist insbesondere auch projektivisch mit dem Strahlenbüschel der Tangenten in einem der Grundpunkte des Büschels an sämtlichen Kegelschnitten desselben, denn diese Tangenten sind nichts anderes, als die Polaren dieses Grundpunktes. Da dieses Strahlenbüschel der Tangenten aber auch projektivisch ist mit einer Punktreihe, welche durch die Kegelschnitte des Büschels auf einer beliebigen Geraden, die durch einen der Grundpunkte des Büschels geht, ausgeschnitten wird (Th. d. K. S. 240), so wird die Punktreihe, auf welche eine durch das Kegelschnittbüschel ausgeschnittene gerade Punktinvolution reduziert wird, allemal projektivisch sein mit irgend einer einfachen Punktreihe, welche das Kegelschnittbüschel auf einer durch einen Grundpunkt gezogenen Geraden ausschneidet. Folglich werden auch, wenn wir irgend zwei gerade Transversalen durch das Kegelschnittbüschel ziehen, die Punktinvolutionen, welche durch dasselbe ausgeschnitten werden, sich auf einfache Punktreihen reduzieren lassen, welche unter einander projektivisch sein müssen. Wir können mithin auch kürzer die beiden Punktinvolutionen selbst als projektivisch bezeichnen und als prospektivisch liegend, wenn sie in demselben Kegelschnittbüschel enthalten sind. (Vgl. Math. Ann. Bd. V. S. 63 ff.)

nur zwei der gegebenen Punkte $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ und legen durch die fünf Punkte $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'$ einen Kegelschnitt, der dadurch gerade bestimmt wird; da er durch drei feste Punkte $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{p}$ geht und durch das veränderliche Punktepaar $\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'$ einer Punktinvolution, so beschreibt er ebenfalls ein Kegelschnittbüschel. Trifft er nun die Gerade a aufser in $\mathfrak{p}$ zum andern Mal in $\mathfrak{x}'$, so mufs $\mathfrak{x}'$ eine Punktreihe beschreiben, welche mit der Punktreihe projektivisch ist, auf welche die Punktinvolution $(\mathfrak{z}\mathfrak{z}')$ reduziert werden kann. Wir haben demnach auf a zwei Punktreihen auf einander liegend, die von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ beschrieben werden; dieselben müssen projektivisch sein, weil sie successive mit den Punktreihen projektivisch sind, auf welche die Involutionen $(\mathfrak{y}\mathfrak{y}')$ und $(\mathfrak{z}\mathfrak{z}')$ sich reduzieren lassen.

Die beiden auf einander liegenden projektivischen Punktreihen, welche $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ auf a beschreiben, haben zwei Doppelelemente, von denen ersichtlich eines der Punkt $\mathfrak{o}$ ist, in welchem sich die Ebenen $\alpha\,\beta\,\gamma$ oder die Geraden $a\ b\ c$ schneiden; denn lassen wir insbesondere $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{o}$ gelangen, so wird der Kegelschnitt $(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{p}\,\mathfrak{o})$ die Gerade b in $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{y}$, der Kegelschnitt $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{o}\,\mathfrak{y})$ die Gerade c in $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{z}$ schneiden und endlich der Kegelschnitt $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{z})$ der Geraden a aufser in $\mathfrak{p}$ zum andern Male in $\mathfrak{o} = \mathfrak{x}'$ begegnen; es fallen also in $\mathfrak{o}$ zwei entsprechende Punkte der beiden projektivischen Punktreihen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ zusammen; der andere Doppelpunkt, welcher linear zu konstruieren ist, sei $\mathfrak{p}'$. Ist derselbe ermittelt, so legen wir einen Kegelschnitt durch die fünf Punkte:

$$\mathfrak{C}^{(2)} = (\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'),$$

welcher b in $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ trifft, einen zweiten Kegelschnitt:

$$\mathfrak{A}^{(2)} = (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'),$$

welcher der Geraden c in $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ begegnet, dann mufs der durch $(\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{p})$ gelegte Kegelschnitt $\mathfrak{B}^{(2)}$ zugleich durch $\mathfrak{p}'$ gehen; die drei Kegelschnitte:

$$\begin{cases} \mathfrak{C}^{(2)} = (\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}') \\ \mathfrak{A}^{(2)} = (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}') \\ \mathfrak{B}^{(2)} = (\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\quad\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}') \end{cases}$$

erfüllen also die zu Anfang geforderte Bedingung, auf den

drei Schnittlinien $a\,b\,c$ gemeinschaftliche Punktepaare auszuschneiden oder diese Schnittlinien zu gemeinschaftlichen Sekanten zu haben; es läſst sich daher durch dieselben eine $F^{(2)}$ legen, welche die acht gegebenen Punkte $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ enthält.

Der Punkt $\mathfrak{p}$ war willkürlich auf der Geraden a angenommen, und von ihm hängen die übrigen fünf Punkte $\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{p}'$ ab. Nehmen wir einen zweiten Punkt $\mathfrak{p}_1$ auf der Geraden a an und führen dieselbe Konstruktion nochmals aus, so erhalten wir die neuen Punkte $(\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_1'\,\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_1'\,\mathfrak{p}_1')$ und drei neue Kegelschnitte $\mathfrak{C}_1^{(2)}\,\mathfrak{A}_1^{(2)}\,\mathfrak{B}_1^{(2)}$, die in demselben Zusammenhange mit einander stehen, wie die vorigen $\mathfrak{C}^{(2)}\,\mathfrak{A}^{(2)}\,\mathfrak{B}^{(2)}$ und ebenfalls auf einer Fläche $F_1^{(2)}$ liegen, die durch die gegebenen acht Punkte $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ hindurchgeht. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}_1^{(2)}$, welche die drei Punkte $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3$ gemeinschaftlich haben, müssen noch einen vierten Punkt $\mathfrak{c}_0$ gemein haben, der linear zu konstruieren ist; sie bestimmen ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten $(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_0)$; ebenso bestimmen die Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ ein Kegelschnittbüschel, indem sie auſser den drei gemeinschaftlichen Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ noch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{a}_0$ haben. Endlich bestimmen die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{B}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}_1^{(2)}$ ein drittes Kegelschnittbüschel und haben auſser den gemeinschaftlichen Punkten $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ noch zwei andere (reelle oder konjugiert-imaginäre) Punkte $\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_0'$ gemein. Ferner bestimmen die beiden Punktepaare $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_1'$ auf a eine Punktinvolution, welche mit den beiden Kegelschnittbüscheln $(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_0)$ und $(\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_0')$ perspektivisch liegt; die beiden Punktepaare $\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_1'$ bestimmen eine Punktinvolution auf b, welche mit den beiden Kegelschnittbüscheln $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_0)$ und $(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_0)$ perspektivisch liegt, und endlich bestimmen die beiden Punktepaare $\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_1'$ eine Punktinvolution auf c, welche mit den beiden Kegelschnittbüscheln $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_0)$ und $(\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_0')$ perspektivisch liegt; d. h. irgend ein Kegelschnitt eines solchen Büschels, welcher durch einen Punkt der Punktinvolution geht, muſs auch durch den konjugierten Punkt derselben gehen.

Bestimmen wir nun von den drei Punktinvolutionen auf $a\,b\,c$ noch je ein drittes Paar, welches in $\mathfrak{o}$ einen gemeinschaftlichen Punkt hat, d. h. von der Punktinvolution auf a das Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1$, von der Punktinvolution auf b das Paar $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_2$ und von der Punktinvolution auf c das Paar $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_3$, dann ist klar, dafs ein Kegelschnitt $\mathfrak{C}_2^{(2)}$ des Büschels $(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_0)$, der durch $\mathfrak{o}$ geht, auch durch $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ gehen mufs, ein Kegelschnitt $\mathfrak{A}_2^{(2)}$ des Büschels $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_0)$, der durch $\mathfrak{o}$ geht, auch durch $\mathfrak{o}_2$ und $\mathfrak{o}_3$ gehen mufs, und ein Kegelschnitt $\mathfrak{B}_2^{(2)}$ des Büschels $(\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_0')$, der durch $\mathfrak{o}$ geht, auch durch $\mathfrak{o}_3$ und $\mathfrak{o}_1$ gehen mufs; die drei neuen Kegelschnitte $\mathfrak{C}_2^{(2)}\mathfrak{A}_2^{(2)}\mathfrak{B}_2^{(2)}$ stehen also in demselben Zusammenhange mit einander, wie die früheren, d. h. sie haben ebenfalls die Geraden $a\,b\,c$ paarweise zu gemeinschaftlichen Sekanten und liegen daher auf einer neuen Fläche $F_2^{(2)}$, welche durch dieselben acht gegebenen Punkte geht, wie die früheren.

Die drei Punktinvolutionen auf den Trägern $a\,b\,c$, welche paarweise mit den drei Kegelschnittbüscheln in den Ebenen $\alpha\,\beta\,\gamma$ perspektivisch liegen, werden durch dieselben in eine gegenseitige Abhängigkeit gesetzt, so dafs einem beliebigen Punktepaar der einen Punktinvolution nur ein einziges bestimmtes Punktepaar einer andern Punktinvolution u. s. f. entspricht; es entsprechen sich nämlich die Punktepaare:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p}\,\mathfrak{p}', & \mathfrak{q}\,\mathfrak{q}', & \mathfrak{r}\,\mathfrak{r}' \\ \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_1', & \mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_1', & \mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_1' \\ \mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1, & \mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_2, & \mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_3, \end{array}$$

d. h. in der Ebene γ schneiden die drei Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}\,\mathfrak{C}_1^{(2)}\,\mathfrak{C}_2^{(2)}$ des Büschels $[\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_0]$ die Geraden a und b in entsprechenden Punktepaaren $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_1'$ und $\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_2$; in der Ebene α schneiden die drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}\,\mathfrak{A}_1^{(2)}\,\mathfrak{A}_2^{(2)}$ des Büschels $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_0)$ die beiden Geraden b und c in entsprechenden Punktepaaren $\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_1'$ und $\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_2$ und $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_3$; endlich in der Ebene β schneiden die drei Kegelschnitte $\mathfrak{B}^{(2)}\,\mathfrak{B}_1^{(2)}\,\mathfrak{B}_2^{(2)}$ des Büschels $(\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_0')$ die Geraden c und a in entsprechenden Punktepaaren $\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'$ und

$\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_3$ und $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1$. Die Abhängigkeit der drei Punktinvolutionen auf $a\,b\,c$ ist daher eine solche, daſs immer nur zwei entsprechende Punktepaare zweier Involutionen auf einem Kegelschnitte eines der drei Büschel liegen können. Nehmen wir nämlich ein beliebiges Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{p}_x\,\mathfrak{p}_x'$ der Punktinvolution auf a und legen den Kegelschnitt $(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{p}_x\,\mathfrak{p}_x')$, so bestimmt derselbe auf b das entsprechende Punktepaar $\mathfrak{q}_x\,\mathfrak{q}_x'$, und die beiden Punktinvolutionen $(\mathfrak{p}_x\,\mathfrak{p}_x')$ und $(\mathfrak{q}_x\,\mathfrak{q}_x')$ liegen perspektivisch in demselben Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_0)$, d. h. wenn wir sie in der oben angegebenen Weise auf einfache Punktreihen reduzieren, indem wir die vierten harmonischen Punkte zu jedem Punktepaar und irgend einem festen Punkte (z. B. $\mathfrak{o}$) nehmen, so sind die dadurch erhaltenen einfachen Punktreihen projektivisch. Legen wir jetzt den Kegelschnitt $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{q}_x\,\mathfrak{q}_x')$, so schneidet derselbe die Gerade c in dem Punktepaar $\mathfrak{r}_x\,\mathfrak{r}_x'$ der dritten Punktinvolution, welche aus gleichem Grunde mit der Punktinvolution $(\mathfrak{q}_x\,\mathfrak{q}_x')$ perspektivisch liegt. Folglich müssen auch die beiden Punktinvolutionen $(\mathfrak{r}_x\,\mathfrak{r}_x')$ und $(\mathfrak{p}_x\,\mathfrak{p}_x')$ oder die einfachen Punktreihen, auf welche sie reduziert werden können, projektivisch sein. Da aber drei Paare konjugierter Punkte, nämlich $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_1'$ und $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_1$ mit $\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}_3$ auf den drei Kegelschnitten $\mathfrak{B}^{(2)}\,\mathfrak{B}_1^{(2)}\,\mathfrak{B}_2^{(2)}$ desselben Kegelschnittbüschels $(\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_0')$ liegen, so müssen auch alle übrigen Paare entsprechender konjugierter Punkte $\mathfrak{r}_x\,\mathfrak{r}_x'$ und $\mathfrak{p}_x\,\mathfrak{p}_x'$ allemal auf einem Kegelschnitt dieses Büschels liegen. Wir erhalten also unendlich viele Tripel von Kegelschnitten $\mathfrak{C}_x^{(2)}\,\mathfrak{A}_x^{(2)}\,\mathfrak{B}_x^{(2)}$, die in demselben Zusammenhange mit einander stehen, wie die ersten drei, nämlich paarweise die Schnittlinien $a\,b\,c$ zu gemeinschaftlichen Sekanten haben. Wir schlieſsen also:

Alle Flächen $F_x^{(2)}$, welche durch dieselben acht gegebenen Punkte $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ gehen, gehen gleichzeitig durch einen vierten festen Punkt $\mathfrak{a}_0$ der Ebene α, einen vierten festen Punkt $\mathfrak{c}_0$ der Ebene γ und zwei feste Punkte $\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_0'$ der Ebene β oder, was dasselbe ist, schneiden jede der drei Ebenen $\alpha\,\beta\,\gamma$ in einem Kegelschnittbüschel mit vier festen Grundpunkten.

Verlangen wir endlich, dafs die Fläche $F_0^{(2)}$ noch durch den neunten gegebenen Punkt $\mathfrak{b}_3$ gehen soll, so legen wir den einzigen Kegelschnitt $\mathfrak{B}_0^{(2)}$ durch die fünf Punkte $(\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_0')$; dieser bestimmt auf a und c die Punktepaare $\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}_0'$ und $\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{r}_0'$, welche wiederum die Kegelschnitte $\mathfrak{A}_0^{(2)} = (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{r}_0')$ und $\mathfrak{C}_0^{(2)} = (\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}_0')$ bestimmen, die sich in demselben Punktepaar $\mathfrak{q}_0\,\mathfrak{q}_0'$ auf b schneiden müssen. Die drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}_0^{(2)}\,\mathfrak{B}_0^{(2)}\,\mathfrak{C}_0^{(2)}$ bestimmen aber die gesuchte Fläche $F_0^{(2)}$ eindeutig, wodurch die vorgelegte Aufgabe gelöst ist.

Wir haben hierdurch zugleich eine zweite Aufgabe mitgelöst. Wenn wir nämlich die Ebene β um die Verbindungslinie der beiden festen Punkte $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ drehen, so verändert sich das Punktepaar $\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_0'$ und beschreibt einen geometrischen Ort von Punkten, welche sämtlich auf allen den Flächen $F_x^{(2)}$ gemeinschaftlich liegen müssen, die durch die acht gegebenen Punkte $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ gehen. Dieser Ort ist eine Raumkurve vierter Ordnung, weil nicht nur jede durch $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ gelegte Ebene vier Punkte des Ortes enthält, sondern überhaupt jede beliebige Ebene des Raumes ihr im allgemeinen in vier Punkten begegnen mufs. Dies ergiebt sich aus folgender Betrachtung:

Eine beliebige Ebene ε schneidet nämlich die drei vorigen Ebenen $\alpha\,\beta\,\gamma$ in drei Geraden:

$$|\varepsilon\alpha| = a_1 \quad |\varepsilon\beta| = b_1 \quad |\varepsilon\gamma| = c_1;$$

auf diesen drei Geraden werden durch die drei Kegelschnittbüschel, welche die Kegelschnitte $\mathfrak{A}_x^{(2)}\,\mathfrak{B}_x^{(2)}\,\mathfrak{C}_x^{(2)}$ beschreiben, bei der Veränderung von $F_x^{(2)}$ drei Punktinvolutionen ausgeschnitten und zugleich in eine eindeutige Abhängigkeit zu einander gesetzt, indem der Kegelschnitt $\mathfrak{C}_x^{(2)}$ zwei entsprechende Punktepaare der Involutionen auf a_1 und b_1 bestimmt, der Kegelschnitt $\mathfrak{A}_x^{(2)}$ allemal zwei entsprechende Punktepaare der Involutionen auf b_1 und c_1, und endlich der Kegelschnitt $\mathfrak{B}_x^{(2)}$ zwei entsprechende Punktepaare der Invo-

lutionen auf c_1 und a_1 bestimmt. Die drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}_x^{(2)}$ $\mathfrak{B}_x^{(2)}$ $\mathfrak{C}_x^{(2)}$ stehen aber in dem Zusammenhange mit einander, dafs je zwei von ihnen die Schnittlinie ihrer Ebenen zu ihrer gemeinschaftlichen Sekante haben. Die Involutionen auf a_1 und b_1 sind daher projektivisch mit der den Kegelschnittbüscheln $[\mathfrak{A}_x^{(2)}]$ und $[\mathfrak{B}_x^{(2)}]$ gemeinschaftlichen Involution auf c, folglich auch unter sich projektivisch; ebenso auch die Involutionen auf b_1 und c_1 und die Involutionen auf c_1 und a_1; oder, wenn wir alle diese Involutionen in der oben angegebenen bekannten Weise auf einfache Punktreihen reduzieren, so sind diese einfachen Punktreihen unter sich projektivisch. Jede Fläche $F_x^{(2)}$ schneidet die Ebene ε in einem Kegelschnitte $\mathfrak{E}_x^{(2)}$, welcher demnach allemal durch drei entsprechende Punktepaare der drei projektivischen Punktinvolutionen auf a_1 b_1 c_1 gehen mufs.

Diese drei projektivischen Punktinvolutionen auf a_1 b_1 c_1 besitzen aber noch die besondere Eigentümlichkeit, dafs der Schnittpunkt der Träger von zweien derselben allemal zwei entsprechenden Punktepaaren dieser beiden Involutionen angehört; denn unter sämtlichen $F_x^{(2)}$ durch die gegebenen acht Punkte giebt es nur eine bestimmte, welche aufserdem durch den neunten Punkt $(\alpha\beta\varepsilon)$ geht, und diese schneidet die Ebene ε in einem Kegelschnitte, welcher auf a_1 und b_1 entsprechende Punktepaare der Involutionen ausschneidet, denen der Punkt $(\alpha\beta\varepsilon)$ gemeinschaftlich ist. Dasselbe gilt für jede der beiden übrigen Ecken des Dreiseits a_1 b_1 c_1. Hieraus folgt, dafs, wenn nur zwei entsprechende Punktepaare zweier Involutionen, z. B. auf a_1 und b_1, bekannt sind, ein drittes Paar dadurch mitgegeben ist, nämlich dasjenige, welchem der Schnittpunkt $(a_1 b_1)$ in beiden Involutionen angehört; da aber durch drei Paare die ganze projektivische Beziehung festgelegt wird, so ist dieselbe hier schon durch zwei solcher Paare bestimmt. Nehmen wir daher die beiden Kegelschnitte, in welchen die Ebene ε von zwei Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ geschnitten wird, so bestimmen dieselben ein Kegelschnittbüschel, welches nicht nur auf a_1 b_1 c_1 die drei Punktinvolutionen fixiert, sondern auch deren projektivische Beziehung zu einander; denn der diesem Kegel-

schnittbüschel angehörige Kegelschnitt, welcher durch den Punkt $(\alpha\beta\varepsilon)$ geht, bestimmt auf a_1 und b_1 ein drittes Paar entsprechender Punktepaare aus diesen Involutionen, und jeder weitere Kegelschnitt dieses Büschels weitere entsprechende Paare der beiden projektivischen Punktinvolutionen; dasselbe gilt für b_1 und c_1, wie für c_1 und a_1. Daher müssen auch umgekehrt sämtliche Kegelschnitte, in welchen die Ebene ε von allen Flächen $F_x^{(2)}$ geschnitten wird, ein Kegelschnittbüschel bilden mit vier festen (reellen oder konjugiert-imaginären) Grundpunkten. Wir schliefsen also:

Sämtliche Oberflächen 2. O. $F_x^{(2)}$, welche durch acht von einander unabhängig gegebene Punkte des Raumes gehen, schneiden sich in einer Raumkurve 4. O. $C^{(4)}$, welche im allgemeinen jeder Ebene ε in vier Punkten begegnet. Diese sämtlichen Flächen $F_x^{(2)}$ bilden ein Büschel und schneiden eine beliebige Ebene ε in einem Kegelschnittbüschel, dessen vier Grundpunkte die Schnittpunkte der Ebene ε mit $C^{(4)}$ sind, jede beliebige Gerade des Raumes in einer Punktinvolution. Die Raumkurve $C^{(4)}$ ist durch acht von einander unabhängig gegebene Punkte des Raumes vollständig bestimmt, und ihre Konstruktion ist in dem Vorstehenden enthalten. Durch einen beliebigen neunten Punkt des Raumes geht, wofern derselbe nicht auf der $C^{(4)}$ selbst liegt, allemal nur eine Fläche $F_x^{(2)}$ des Büschels. Um diese Oberfläche zu erhalten, brauchen wir nur durch den neunten Punkt eine variable Ebene zu legen und in derselben den Kegelschnitt zu konstruieren, welcher durch den neunten Punkt und die vier Schnittpunkte der Ebene mit $C^{(4)}$ gerade bestimmt wird; alle diese Kegelschnitte erfüllen die gesuchte Fläche.

Die im Vorstehenden auseinandergesetzte Konstruktion der Oberfläche 2. O. durch neun gegebene Punkte ist von Chasles angegeben (Comptes rendus 24. Décembre 1855), aber daselbst auf ein Prinzip gestützt, welches in der dort ausgesprochenen Allgemeinheit nicht haltbar ist, obwohl es in

den Fällen, auf welche es dort angewendet wird, Gültigkeit hat. Eine Analyse dieser Konstruktion, welche im wesentlichen mit der obigen übereinkommt, hat H. Müller (Clebsch und Neumann, Math. Annalen Bd. I, S. 627) gegeben, ohne, wie es scheint, die Chasles'sche Konstruktion gekannt zu haben. Auf denselben Betrachtungen beruht auch diejenige Konstruktion, welche C. F. Geiser aus den hinterlassenen Papieren Jacob Steiner's mitteilt (Borchardt's Journal f. r. u. ang. Math. Bd. 68, S. 191) und die schon 1836 von ihm gefunden, aber nicht veröffentlicht wurde. Die Steiner'sche Konstruktion unterscheidet sich von der Chasles'schen nur dadurch, dafs nach der obigen Bezeichnung der vierte feste Grundpunkt c_0 des Kegelschnittbüschels $(c_1 c_2 c_3 c_0)$ durch zwei Linienpaare ermittelt wird, welche dieses Kegelschnittbüschel enthalten mufs, während er bei Chasles durch Konstruktion zweier beliebigen Kegelschnitte dieses Büschels bestimmt wird. Das Prinzip, auf welchem beide Konstruktionen beruhen, ist aber ganz dasselbe und so aufserordentlich einfach, dafs die Konstruktion den Vorzug verdient vor anderen, welche dieses seiner Bedeutung wegen so vielfach behandelte Problem gefunden hat. Eine von O. Hesse angegebene Konstruktion (Crelle's Journal f. Math. Bd. 24, S. 36) stützt sich auf die Polareigenschaften eines Bündels von Flächen 2. O., welche durch dieselben sieben Punkte gehen, eine von Th. Reye in seiner „Geometrie der Lage" (2. Aufl., S. 153 u. 160) gegebene Konstruktion auf die Polareigenschaften eines Flächenbüschels. Beide benutzen die Hyperboloide, welche durch die Grundpunkte des Bündels und durch die Grundkurve $C^{(4)}$ des Büschels sich legen lassen. Will man aber schon die Polareigenschaften einer Fläche 2. O. als bekannt voraussetzen, so erscheint es natürlicher, an die Stelle der Konstruktion der Fläche $F^{(2)}$ sogleich die Konstruktion des räumlichen Polarsystems zu setzen, dessen Kernfläche jene ist. Am natürlichsten wäre es, aus der Erzeugung der $F^{(2)}$ durch zwei reziproke Bündel die Konstruktion derselben durch neun gegebene Punkte abzuleiten. Eine solche ist von F. Seidewitz (Grunert's Archiv f. Math. u. Phys. Bd. 9, S. 158 ff.) und von dem Verfasser (Borchardt's Journal f. Math. Bd. 62, S. 215) ausgeführt. Es werden dabei zwei von den gegebenen neun Punkten zu

Mittelpunkten der Bündel gewählt und die reziproke Beziehung derselben so bestimmt, dafs den Strahlen, die von dem ersten Mittelpunkte nach den übrigen gegebenen Punkten hingehen, Ebenen entsprechen, welche bez. durch diejenigen Strahlen gehen, welche von dem zweiten Mittelpunkte nach denselben übrigen Punkten gehen. Diese Bestimmung ist ausführbar, aber umständlich und wenig übersichtlich. Wir unterdrücken daher die Wiedergabe derselben und überlassen es dem Leser, dieser Bestimmungsart eine geschmeidigere Form zu geben, indem wir nur noch bemerken, dafs man auch auf andere Weise die erzeugenden Bündel herzustellen versuchen könnte, indem man zwar aus den gegebenen neun Punkten zwei zu Mittelpunkten der Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ wählt, die übrigen Punkte aber nicht durchweg als Durchschnittspunkte von Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}$ und Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}_1$ auffafst, sondern teilweise als Durchschnittspunkte von Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}$ mit Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}_1$, teilweise als Durchschnittspunkte von Strahlen des Bündels $\mathfrak{O}_1$ mit Ebenen des Bündels $\mathfrak{O}$, und dadurch die reziproke Beziehung der beiden Bündel festzustellen sucht. Ferner könnte man nur einen Mittelpunkt der erzeugenden Bündel in einen der gegebenen neun Punkte verlegen und den Mittelpunkt des andern Bündels dadurch zu ermitteln suchen, dafs die übrigen gegebenen Punkte Durchschnittspunkte von Strahlen und entsprechenden Ebenen der beiden reziproken Bündel werden sollen u. s. w.*)

§ 54. Die Berührungsebenen einer Oberfläche 2. O.

Es ist bereits auf S. 454 hervorgehoben, dafs bei der Erzeugung der $F^{(2)}$ durch zwei reziproke Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ die dem Verbindungsstrahle $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ in doppeltem Sinne entsprechenden Ebenen der reziproken Bündel die Berührungsebenen der Fläche $F^{(2)}$ in den Punkten $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}$ sind, d. h. die sämtlichen Ebenen $\mathfrak{x}$, welche durch $\mathfrak{O}$ gelegt werden können, schneiden die Fläche $F^{(2)}$ in Kegelschnitten, deren Tangenten im Punkte $\mathfrak{O}$ alle in einer Ebene liegen; diese

*) Während des Druckes ist in Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys. Jhrgg. 25, S. 98 eine Arbeit von Heger: „Zur Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten" erschienen, welche eine weitere Ausführung der Chasles'schen Konstruktion enthält.

heifst die Berührungsebene in $\mathfrak{O}$ und ist im Bündel $\mathfrak{O}$ diejenige, welcher der Strahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}|$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$ entspricht vermöge der reziproken Beziehung.

Diese Berührungsebenen der Fläche $F^{(2)}$ in den Punkten $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ besitzen eine charakteristische Eigenschaft, auf welche wir jetzt eingehen wollen. Drehen wir nämlich um den Verbindungsstrahl:

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = e = f_1$$

eine variable Ebene ξ, welche dem Bündel $\mathfrak{O}$ angehört, so entspricht ihr in dem Bündel $\mathfrak{O}_1$ ein veränderlicher Strahl x_1, der in der festen Berührungsebene ε_1, welche dem Strahle e entspricht, ein Strahlenbüschel beschreibt, projektivisch mit dem von ξ beschriebenen Ebenenbüschel. Schneidet die Ebene ξ die Berührungsebene ε_1 in dem Strahle x, so bilden x und x_1 zwei projektivische und konzentrische Strahlenbüschel in der Ebene ε_1 um den Mittelpunkt $\mathfrak{O}_1$. Hier können nun drei Fälle eintreten, nämlich:

1) die von x und x_1 beschriebenen Strahlenbüschel haben zwei reelle Doppelstrahlen,
2) sie haben zwei zusammenfallende, d. h. nur einen reellen Doppelstrahl,
3) sie haben keinen reellen Doppelstrahl.

In dem ersten Falle giebt es also zwei besondere Ebenen ξ, welche die ihnen entsprechenden Strahlen ganz enthalten; letztere sind eben die Doppelstrahlen, und alle ihre Punkte müssen daher Punkte der Fläche $F^{(2)}$, des Erzeugnisses der beiden reziproken Bündel sein, d. h. *die Berührungsebene ε_1 der Fläche $F^{(2)}$ im Punkte $\mathfrak{O}_1$ schneidet die Fläche in einem Linienpaare, dessen Schnittpunkt der Berührungspunkt $\mathfrak{O}_1$ ist.* Dasselbe gilt von der Berührungsebene φ des Bündels $\mathfrak{O}$, welche dem Strahle $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}| = f_1$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$ entspricht; denn seien l_1 und g_1 die beiden Doppelstrahlen in der Ebene ε_1, und wird die Schnittlinie $|\varepsilon_1\varphi| = s$ von ihnen in den Punkten $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{g}$ getroffen, so wissen wir, dafs dem Strahle l_1 im Bündel $\mathfrak{O}_1$ die Ebene $[\mathfrak{O}l_1]$ im Bündel $\mathfrak{O}$ entspricht; folglich mufs auch der durch l_1 gehenden Ebene $[\mathfrak{O}l_1]$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$ ein in der Ebene $[\mathfrak{O}l_1]$ liegender Strahl im Bündel $\mathfrak{O}$ entsprechen wegen der reziproken Beziehung, und dieser mufs zugleich in der Be-

rührungsebene φ liegen; folglich ist es der Strahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{l}| = g$, und ebenso entspricht der Ebene $[\mathfrak{O}g_1]$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$ der Strahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{g}| = l$ im Bündel $\mathfrak{O}$; folglich haben wir ein windschiefes Vierseit auf $F^{(2)}$, dessen Ecken $\mathfrak{O}\ \mathfrak{l}\ \mathfrak{O}_1\ \mathfrak{g}$, und dessen auf einander folgende Seiten die vier Strahlen:

$$g \quad l_1 \quad g_1 \quad l$$

sind. Die Strahlen $g\ l$ gehen durch $\mathfrak{O}$ und liegen in der Ebene φ, die Strahlen $g_1\ l_1$ gehen durch $\mathfrak{O}_1$ und liegen in der Ebene ε_1; jedem dieser vier Strahlen entspricht diejenige Ebene, welche durch ihn und den Mittelpunkt des andern Bündels gelegt werden kann, der nicht auf ihm liegt.

Legen wir jetzt durch den gefundenen Strahl g eine beliebige Ebene ξ im Bündel $\mathfrak{O}$, welcher der Strahl x_1 im Bündel $\mathfrak{O}_1$ entspricht, dann wird x_1 der Geraden g begegnen müssen, weil er mit ihr in einer Ebene liegt. Halten wir das Elementenpaar ξ und x_1 zunächst fest und drehen in der Ebene ξ einen veränderlichen Strahl x um $\mathfrak{O}$, so entspricht ihm die Ebene ξ_1, welche um die feste Axe x_1 sich dreht und ein projektivisches Ebenenbüschel beschreibt mit dem von x beschriebenen Strahlenbüschel; dieses Ebenenbüschel durchschneidet die Ebene ξ in einem Strahlenbüschel x'_1 und die beiden Strahlenbüschel, welche x und x'_1 beschreiben, sind nicht nur projektivisch wegen der reziproken Beziehung, sondern liegen auch perspektivisch, weil, wenn x nach g gelangt, auch x'_1 in die Lage von g kommt; also ist der Ort des Schnittpunktes $(x\xi_1)$ eine gerade Linie l_x, welche nicht nur der Geraden g, sondern auch der Geraden g_1 begegnen mufs; denn der in das Linienpaar $g\,l_x$ zerfallende Kegelschnitt, in welchem die Ebene ξ die $F^{(2)}$ schneidet, mufs den Punkt der $F^{(2)}$ enthalten, in welchem die Ebene ξ der Geraden g_1 begegnet; also liegt dieser auf l_x. Es war auch a priori zu erkennen, dafs jede durch g gelegte Ebene nur noch in einer Geraden l_x die $F^{(2)}$ schneiden kann, weil sie in einem Kegelschnitt schneiden mufs, von welchem g bereits ein Teil ist.

Drehen wir nun die Ebene ξ um die Gerade g, so verändert sich mit ihr auch die Gerade l_x; es ist aber klar, dafs keine zwei verschiedenen l_x im Raume sich treffen können; denn wäre dies der Fall, so müfste die sie verbindende Ebene sowohl die Gerade g, als auch die Gerade g_1 enthalten, was

unmöglich ist, weil g und g_1 die gegenüberliegenden Seiten eines windschiefen Vierseits sind. Wir erhalten also auf $F^{(2)}$ eine Schar von unendlich-vielen Geraden l_x, von denen keine zwei sich treffen.

In ganz derselben Weise können wir anstatt von der Geraden g von der Geraden l ausgehen und gelangen dadurch zu einer zweiten Schar von Geraden g_x, die den beiden Geraden l und l_1 begegnen, von denen aber keine zwei verschiedenen sich treffen können. Endlich ist klar, dafs jede Gerade l_x jeder Geraden g_x begegnen mufs; denn legen wir eine Ebene ξ durch g und eine Ebene η durch l, so schneiden sich dieselben in einer Geraden, welche durch $\mathfrak{O}$ geht und nur noch in einem zweiten Punkte der $F^{(2)}$ begegnen kann und mufs; durch diesen Punkt müssen aber diejenigen beiden Geraden l_x und g_x gehen, welche in den Ebenen ξ und η enthalten sind; und umgekehrt bestimmen irgend zwei Strahlen l_x und g_x aus den beiden Scharen zwei Ebenen ξ und η, die aufser $\mathfrak{O}$ nur noch einen Punkt mit $F^{(2)}$ gemein haben können, der notwendig in g_x und l_x gleichzeitig liegen mufs. Wenn wir jetzt eine beliebige Gerade g_0 aus der Schar g_x festhalten, so geht durch jeden Punkt derselben eine und nur eine l_x, welche sowohl g, als auch g_1 trifft; die beiden Ebenen $[g\, l_x]$ und $[g_1 l_x]$ beschreiben also bei der Veränderung von l_x zwei Ebenenbüschel mit den festen Axen g und g_1, und die entsprechenden Ebenen gehen durch die Punkte einer geraden Punktreihe auf g_x. Diese beiden Ebenenbüschel sind daher projektivisch und erzeugen, wie wir wissen, (S. 87), ein einfaches Hyperboloid, von welchem l_x und g_x die beiden Regelscharen durchlaufen. Das Erzeugnis der beiden reziproken Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ ist also in diesem Falle nichts anderes, als die uns bekannte in § 14—24 untersuchte Fläche des einfachen Hyperboloids mit ihren beiden Regelscharen g_x und l_x und den sämtlichen Berührungsebenen, deren jede einen in ein Linienpaar l_x und g_x zerfallenden Kegelschnitt der $F^{(2)}$ enthält.

Da, wie wir gesehen haben (S. 461), eine Fläche $F^{(2)}$ auf unendlich viele verschiedene Arten erzeugt werden kann, indem irgend zwei Punkte derselben als Mittelpunkte erzeugender Bündel gewählt werden dürfen, da ferner der Verbindungs-

linie der Mittelpunkte in doppeltem Sinne die Berührungsebenen in diesen Punkten der Fläche entsprechen und diese Berührungsebenen nur in einem reellen oder zusammenfallenden oder imaginären Linienpaare die $F^{(2)}$ schneiden können, so schliefsen wir:

Wenn es einmal vorkommt, dafs eine Oberfläche zweiter Ordnung in einem ihrer Punkte eine Berührungsebene hat, deren Schnittkurve mit der Fläche in ein reelles Linienpaar zerfällt, so ist dies immer der Fall, und die Fläche ist ein einfaches Hyperboloid, deren beide Regelscharen aus den Strahlen jener Linienpaare bestehen.

Wir gehen jetzt zu dem zweiten Falle über, der als eine Specialisierung des vorigen anzusehen ist. Fallen nämlich die beiden Strahlen l_1 und g_1 in der Ebene ε_1 zusammen, so müssen auch die Punkte $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{g}$ auf s, mithin auch die Strahlen l und g zusammenfallen, und es begegnen sich die Strahlen $l_1(g_1)$ und $l(g)$ in einem Punkte $\mathfrak{S}$. Dieser ist ein ausgezeichneter Punkt der Fläche $F^{(2)}$. Denn eine beliebige durch g gelegte Ebene kann die Fläche nur noch in einer Geraden l_x schneiden, wie wir oben gesehen haben, und in unserem Falle mufs l_x durch den Punkt $\mathfrak{S}$ gehen; denn ginge l_x nicht durch $\mathfrak{S}$, so würde sie die Berührungsebene ε_1 in einem Punkte treffen, der nicht in dem Strahle $|\mathfrak{O}_1\,\mathfrak{l}|$ läge. Die Ebene ε_1 hat aber keine andern Punkte mit der Fläche $F^{(2)}$ gemein, als den Doppelstrahl $|\mathfrak{O}_1\,\mathfrak{l}|$; daher mufs l_x durch $\mathfrak{S}$ gehen; ebenso hätten wir zeigen können, dafs alle g_x durch $\mathfrak{S}$ gehen müssen; es schneiden sich also sämtliche Geraden l_x und g_x in demselben Punkte $\mathfrak{S}$ und die Oberfläche 2. O. $F^{(2)}$ degeneriert daher in einen Kegel, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{S}$ ist und dessen Strahlen die beiden Regelscharen l_x und g_x in sich vereinigen. Wir haben in diesem zweiten Falle folgendes Ergebnis:

Wenn es einmal vorkommt, dafs eine Oberfläche zweiter Ordnung in einem ihrer Punkte eine Berührungsebene hat, deren Schnittkurve mit der Fläche ein zusammenfallendes Linienpaar (d. h. nur eine gerade Linie) ist, dann ist dies immer der Fall; alle diese geraden Linien gehen durch einen

festen Punkt und sind die Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung, in welchen die $F^{(2)}$ degeneriert.

Eine noch weitere Specialisierung wäre denkbar und würde eintreten, wenn die um $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = e$ gedrehte Ebene ξ mit dem entsprechenden Strahlenbüschel x_1 in der Ebene ε_1 perspektivisch läge, so dafs jede Ebene ξ durch den entsprechenden Strahl x_1 ginge. In diesem Falle würde die ganze Ebene ε_1 einen Teil der $F^{(2)}$ bilden; da aber auch $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}| = f_1$ die Ebene φ zur entsprechenden hat, der Ebene $[x_1 f_1]$ der Strahl $|\xi\varphi|$ entspricht, und die erstere mit ξ zusammenfällt, so mufs auch die ganze Ebene φ einen Teil der Fläche $F^{(2)}$ bilden; dieselbe zerfällt also in ein Ebenenpaar, und andere Punkte derselben können nicht vorkommen; auch kann das Ebenenpaar als ein besonderer Fall des Kegels aufgefafst werden und beide sind besondere Fälle der geradlinigen Oberfläche zweiter Ordnung.

Jetzt bleibt nur noch der dritte Fall übrig, der nun in der That zu einer neuen Gattung von Flächen zweiter Ordnung führt, die keine geraden Linien enthalten. Wenn die erzeugenden Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ so liegen, dafs eine um den Verbindungsstrahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = e$ gedrehte Ebene ξ, deren entsprechender Strahl x_1 in der Ebene ε_1 sich um $\mathfrak{O}_1$ dreht, niemals durch diesen entsprechenden Strahl x_1 hindurchgeht, also, wofern $|\xi\varepsilon_1| = x$ bezeichnet wird, die projektivischen Strahlenbüschel x, x_1 keine reellen Doppelstrahlen haben, dann enthält das Erzeugnis der reziproken Bündel keine geraden Linien. Denn gehörte irgend eine Gerade l_x der Fläche $F^{(2)}$ an, so müfste die Ebene $[l_x\mathfrak{O}]$ die Fläche in einer zweiten durch $\mathfrak{O}$ gehenden Geraden g und die Ebene $[l_x\mathfrak{O}_1]$ die $F^{(2)}$ in einer zweiten durch $\mathfrak{O}_1$ gehenden Geraden g_1 schneiden; es müfste ferner die Ebene $[g\mathfrak{O}_1]$ die $F^{(2)}$ in einer zweiten durch $\mathfrak{O}_1$ gehenden Geraden l_1 und die Ebene $[g_1\mathfrak{O}]$ die $F^{(2)}$ in einer zweiten durch $\mathfrak{O}$ gehenden Geraden l schneiden. Die beiden Ebenen $[g\,l]$ und $[g_1\,l_1]$ enthielten also die in Linienpaare zerfallenden Kegelschnitte der $F^{(2)}$, welche in $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ ihre Doppelpunkte haben; es müfsten also $[g\,l] = \varphi$ und $[g_1\,l_1] = \varepsilon_1$ die Berührungsebenen in $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ sein und Linienpaare enthalten, was gegen die Voraussetzung ist. Wir schliefsen also für diesen dritten Fall:

Wenn es einmal vorkommt, dafs eine Oberfläche zweiter Ordnung in einem ihrer Punkte eine Berührungsebene hat, welche mit der Fläche keinen weiteren Punkt als diesen Berührungspunkt gemein hat (oder in einem imaginären Linienpaar mit reellem Doppelpunkt die Fläche schneidet), so ist dies immer der Fall; die Fläche enthält überhaupt keine geraden Linien.

Hier tritt nun ein wesentlicher Unterschied auf gegen den früheren Hauptfall. Während wir beim Hyperboloid mit Hilfe der durch $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ gehenden Linienpaare $g\,l$ und $g_1\,l_1$ die in den Berührungsebenen liegen, auch das durch jeden beliebigen Punkt der $F^{(2)}$ gehende Linienpaar $g_x\,l_x$ finden konnten, indem wir, wenn $\mathfrak{x}$ ein Punkt der Fläche $F^{(2)}$ ist, die Schnittlinie der Ebenen $[g\mathfrak{x}]$ und $[g_1\mathfrak{x}]$, welche sich in l_x schneiden, sowie der Ebenen $[l\mathfrak{x}]$ und $[l_1\mathfrak{x}]$, welche sich in g_x schneiden, konstruieren, fehlt jetzt dies Hilfsmittel; wir haben nur die beiden Berührungsebenen φ und ε_1 in den Mittelpunkten der Bündel $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$, welche in doppeltem Sinne dem Verbindungsstrahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ entsprechen, und es wird sich zunächst die Aufgabe darbieten:

In einem beliebigen Punkte $\mathfrak{x}$ des Erzeugnisses zweier reziproken Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ die Berührungsebene zu konstruieren.

Diese Aufgabe läfst sich auch so aussprechen: Durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{x}$ einer nicht-geradlinigen Fläche $F^{(2)}$ eine solche Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ zu legen, welche mit $F^{(2)}$ den einzigen reellen Punkt $\mathfrak{x}$ gemeinschaftlich hat, d. h. die $F^{(2)}$ in einem imaginären Linienpaar schneidet, dessen reeller Doppelpunkt $\mathfrak{x}$ ist; es wird zuerst die Vorfrage zu beantworten sein, ob es eine solche Ebene wirklich giebt. Eine Ebene, die durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen soll, wird bestimmt sein durch zwei von $\mathfrak{x}$ ausgehende gerade Linien, welche in ihr liegen sollen. Nach der Forderung der Aufgabe müssen zwei solche Gerade a und b Tangenten der $F^{(2)}$ sein, d. h. die beiden Schnittpunkte einer solchen Geraden mit $F^{(2)}$ müssen in den Punkt $\mathfrak{x}$ hineinfallen. Ist dies nun der Fall für die Gerade a und für die Gerade b, so ist $[ab]$ eine Ebene, die $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitt schneiden mufs, wie

im allgemeinen jede Ebene. Dieser Kegelschnitt hat aber die besondere Eigenschaft, daſs $\mathfrak{x}$ ein solcher Punkt desselben ist, in welchem es zwei verschiedene Tangenten dieses Kegelschnitts giebt, und dies ist nur möglich, wenn der Kegelschnitt aus einem reellen oder imaginären Linienpaar besteht, dessen Doppelpunkt $\mathfrak{x}$ ist; in unserem Falle kann das Linienpaar nur ein imaginäres sein, weil die $F^{(2)}$ keine geraden Linien enthalten darf. Diese Eigenschaft der durch a und b bestimmten Ebene $[ab] = \tau_{\mathfrak{x}}$ zeigt nun, daſs auch jede andere durch $\mathfrak{x}$ in der Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ gezogene Gerade nur den einzigen Punkt $\mathfrak{x}$ mit der Fläche $F^{(2)}$ gemein haben kann, also eine Tangente derselben sein muſs. Aber auch umgekehrt müssen sämtliche Tangenten, die man im Punkte $\mathfrak{x}$ an der Fläche $F^{(2)}$ ziehen kann in einer und derselben Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ liegen. Denn gäbe es noch eine Tangente c im Punkte $\mathfrak{x}$ der $F^{(2)}$, die nicht in der Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ läge, so würde jede durch c gelegte Ebene ebenfalls in einem imaginären Linienpaare die $F^{(2)}$ schneiden müssen, und überhaupt jede durch $\mathfrak{x}$ gelegte Ebene, welche durch zwei Gerade in den Ebenen $[ab]$ und $[ac]$ bestimmt wird, die durch $\mathfrak{x}$ gehen, müſste die gleiche Eigenschaft besitzen, in einem imaginären Linienpaare die $F^{(2)}$ zu schneiden. Die ganze Fläche $F^{(2)}$ würde also nur den einzigen reellen Punkt $\mathfrak{x}$ haben, d. h. sich auf einen imaginären Kegel mit dem reellen Mittelpunkte $\mathfrak{x}$ reduzieren (S. 42). Wir schlieſsen also:

Sämtliche Tangenten, die man in einem Punkte $\mathfrak{x}$ einer Oberfläche 2. O. $F^{(2)}$ an derselben ziehen kann, liegen in einer Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$, welche die Berührungsebene der $F^{(2)}$ im Punkte $\mathfrak{x}$ heiſst und dieselbe in einem reellen oder zusammenfallenden oder imaginären Linienpaare schneidet. Nennen wir in jedem dieser drei Fälle die Berührungsebenen hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer Art, so zeigt die vorige Untersuchung, daſs bei einer gegebenen $F^{(2)}$ die sämtlichen Berührungsebenen immer derselben Art sein müssen, daſs also z. B. bei einer $F^{(2)}$ nicht gleichzeitig Berührungsebenen hyperbolischer und elliptischer Art vorkommen können.

In unserem Falle nun sind sämtliche Berührungsebenen

elliptischer Art, und es genügt, um in einem gegebenen Punkte $\mathfrak{x}$ der $F^{(2)}$ die Berührungsebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ zu finden, irgend zwei Tangenten derselben in dem Punkte $\mathfrak{x}$ zu ermitteln und durch eine Ebene zu verbinden. Eine Tangente im Punkte $\mathfrak{x}$ haben wir schon früher gefunden (S. 454). Wenn wir in den beiden erzeugenden Bündeln $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ die Strahlen $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = x$ und $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}| = y_1$ ziehen, so entsprechen ihnen gemäfs der reziproken Beziehung zwei Ebenen ξ_1 und η, deren Schnittlinie $|\xi_1\eta|$ durch $\mathfrak{x}$ gehen und eine Tangente der Fläche $F^{(2)}$ in dem Punkte $\mathfrak{x}$ sein mufs. Wenn wir zweitens die Ebene $[\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}]$ legen, so schneidet dieselbe die Fläche $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitt, der durch $[\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}]$ geht, und dessen beide Tangenten in $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$, die Schnittlinien seiner Ebene mit den Berührungsebenen φ und ε_1, also bekannt sind; um die Tangente dieses Kegelschnitts im Punkte $\mathfrak{x}$ zu erhalten, wenden wir die bekannte Konstruktion aus der Theorie der Kegelschnitte an; sei der Schnittpunkt:

$$(|\mathfrak{O}\mathfrak{x}|,\ \varepsilon_1) = \mathfrak{a} \qquad (|\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}|,\ \varphi) = \mathfrak{b}$$
$$(|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|,\ |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|) = \mathfrak{c},$$

so ist $|\mathfrak{x}\mathfrak{c}|$ die gesuchte Tangente; die Ebene, welche durch die Schnittlinie $|\xi_1\eta|$ und den Punkt $\mathfrak{c}$ gelegt werden kann, ist also die gesuchte Berührungsebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ im Punkte $\mathfrak{x}$ der $F^{(2)}$. Noch kürzer wird die Konstruktion, wenn wir ein für allemal die Schnittlinie der beiden Berührungsebenen in $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$

$$|\varphi\varepsilon_1| = s$$

ziehen, durch $|s\mathfrak{x}|$ eine Ebene legen, welche $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ in dem Punkte $\mathfrak{c}'$ begegnet und zu $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{c}'|$ den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{c}$ konstruieren, welcher dem $\mathfrak{c}'$ zugeordnet ist; dann ist die durch $|\xi_1\eta|$ und $\mathfrak{c}$ gelegte Ebene die gesuchte $\tau_{\mathfrak{x}}$, wie unmittelbar einleuchtet.

Aber es genügt für unsern Fall, in welchem alle Berührungsebenen der $F^{(2)}$ elliptischer Art sind, nicht, dafs wir für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ der $F^{(2)}$ die Berührungsebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ konstruieren können, sondern wir müssen auch in dieser Ebene das imaginäre Linienpaar ermitteln, welches die Durchschnittskurve von $\tau_{\mathfrak{x}}$ mit $F^{(2)}$ ist, ebenso wie wir in dem Falle des Hyperboloids das Linienpaar $g_{\mathfrak{x}}\, l_{\mathfrak{x}}$ der beiden Regelscharen

ermittelt haben. Ein imaginäres Linienpaar wird vertreten durch eine elliptische Strahleninvolution, deren imaginäre Doppelstrahlen ein solches Linienpaar bilden; unsere Aufgabe kommt demgemäfs darauf hinaus, in jeder Berührungsebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ die elliptische Strahleninvolution durch $\mathfrak{x}$ zu ermitteln, deren Doppelstrahlen das gesuchte imaginäre Linienpaar sind. Hierzu genügt es für die beiden Berührungsebenen ε_1 und φ in den Mittelpunkten $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}$ der erzeugenden Bündel die zugehörigen Strahleninvolutionen zu finden, was in folgender Weise geschehen kann: Drehen wir um den Verbindungsstrahl

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = e = f_1$$

eine veränderliche Ebene ξ, welcher als dem Bündel $\mathfrak{O}$ angehörig der Strahl x_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$ entspricht, der in der Berührungsebene ε_1 liegen mufs, weil ξ durch e geht, dann beschreiben wegen der reziproken Beziehung auf der Schnittlinie:

$$|\varphi e_1| = s$$

die Durchschnittspunkte der Ebene ξ und des Strahles x_1 zwei projektivische Punktreihen, welche wir mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ bezeichnen wollen. Da der Ebene $[f_1 \mathfrak{x}_1]$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$ wegen der reziproken Beziehung der Strahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}|$ im Bündel $\mathfrak{O}$ entsprechen mufs, so folgt, dafs wir dieselben beiden projektivischen Punktreihen auf s auch erhalten, wenn wir um $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ eine veränderliche Ebene η_1 drehen, welcher als dem Bündel $\mathfrak{O}_1$ angehörig der Strahl y des Bündels $\mathfrak{O}$ entspricht, der in der Berührungsebene φ liegen mufs, weil η_1 durch f_1 geht; dann beschreiben wegen der reziproken Beziehung, auf der Schnittlinie s die Schnittpunkte der Ebene η_1 und des Strahles y zwei projektivische Punktreihen $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}$, die mit den vorigen Punktreihen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}$ zusammenfallen.

Wir haben also auf s zwei projektivische Punktreihen, die durch die reziproke Beziehung der Bündel $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ gegeben sind. Drehen wir um $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ die veränderliche Ebene $\xi = \eta_1$ der in doppeltem Sinne, als den Bündeln $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ angehörig, die Strahlen x_1 und y in den Ebenen ε_1 und φ entsprechen, bezeichnen wir die Durchschnittspunkte der Ebene $\xi(\eta_1)$ mit s durch $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ die Treffpunkte der Strahlen

x_1 und y mit s durch $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ und konstruieren den vierten harmonischen Punkt zu $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$, dem letzteren zugeordnet, d. h. den Punkt $\mathfrak{x}'$, so dafs $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{x}') = -1$ ist, dann durchläuft das Punktepaar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ bei der Bewegung eine Punktinvolution auf s (S. 15 ff.), welche mit $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ verbunden zwei Strahleninvolutionen in den Ebenen φ und ε_1 liefert, deren Doppelstrahlen l und g, g_1 und l_1 die Linienpaare dieser Berührungsebenen sind. In unserem Falle ist die Punktinvolution auf s eine elliptische, also die Linienpaare sind imaginär und werden vertreten durch die konstruierten Strahleninvolutionen in den Ebenen φ und ε_1. Wenn wir jetzt eine beliebige Ebene $\mathfrak{x}$ im Raume nehmen, welche die $F^{(2)}$ in einem (reellen oder imaginären) Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ schneidet, so wird $\mathfrak{x}$ die beiden Strahleninvolutionen in φ und ε_1 längs Punktinvolutionen schneiden, die dem Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ offenbar zugehören müssen, weil die Schnittlinien $|\mathfrak{x}\varphi|$ und $|\mathfrak{x}\varepsilon_1|$ der $F^{(2)}$ in (reellen oder imaginären) Punktepaaren begegnen, die durch jene Punktinvolutionen vertreten werden. Haben wir also insbesondere einen Punkt $\mathfrak{x}$ der $F^{(2)}$ und die Berührungsebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ in demselben konstruiert (s. o.), so schneidet dieselbe die Berührungsebenen φ und ε_1 in Strahlen, welche die Träger bekannter Punktinvolutionen sind, die von den Strahleninvolutionen in φ und ε_1 ausgeschnitten werden. Der Punkt $\mathfrak{x}$ mit der einen oder der andern Punktinvolution verbunden liefert daher eine Strahleninvolution in der Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$, welche das (reelle oder imaginäre) Linienpaar vertritt, das in dieser Berührungsebene enthalten ist. Dadurch ist die vorgelegte Aufgabe gelöst auch für den Fall der nicht geradlinigen Fläche $F^{(2)}$.

§ 55. Die Polareigenschaften der $F^{(2)}$.

Wenn eine beliebige Gerade g der Fläche 2. O. $F^{(2)}$ in zwei reellen Punkten begegnet, so mufs jede Ebene, welche durch g gelegt wird, die $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitt schneiden, der durch dieselben beiden Punkte geht, d. h. alle diese Kegelschnitte müssen g zur gemeinschaftlichen Sekante haben. Wir können diese Eigenschaft erweitern auch für den Fall nicht reeller Schnittpunkte auf g, indem wir das Punktepaar durch eine (hyperbolische oder elliptische) Punktinvolution

vertreten lassen, die immer reell konstruiert werden kann vermittelst der gegebenen die $F^{(2)}$ erzeugenden reziproken Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$.

Wenn wir auf der Geraden g einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ bewegen, so entspricht dem Strahle $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}|$ im Bündel $\mathfrak{O}$ eine Ebene $\mathfrak{k}_1$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$, welche g in $\mathfrak{x}_1$ treffe, und bei der Bewegung müssen infolge der reziproken Beziehung $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ projektivische Punktreihen beschreiben. Dieselben beiden projektivischen Punktreihen erhalten wir auch, wenn wir den Strahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}_1|$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$ nehmen, dem eine Ebene $\mathfrak{k}$ im Bündel $\mathfrak{O}$ entsprechen wird, welche durch den vorigen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen mufs, denn weil der Strahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}| = x_1$ in der Ebene $\mathfrak{k}_1$ liegt, so mufs die entsprechende Ebene $\mathfrak{k}$ durch $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = x$, also durch den Punkt $\mathfrak{x}$ gehen. Wir haben also auf g zwei projektivische Punktreihen; bezeichnen wir jetzt einen beliebigen Punkt der g in doppeltem Sinne aufgefafst als $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$, so entspricht ihm, als der einen Punktreihe angehörig, der Punkt $\mathfrak{x}_1$ der andern und, als der andern Punktreihe angehörig, der Punkt $\mathfrak{y}$ der ersten; nehmen wir zu den drei Punkten $\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} (= \mathfrak{y}_1)$ den vierten harmonischen dem letzteren zugeordneten Punkt $\mathfrak{x}'$, so dafs

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{x}') = -1$$

ist, dann werden bei der Bewegung $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ konjugierte Punkte einer Punktinvolution sein, deren Doppelpunkte zugleich die Doppelpunkte der zusammenliegenden projektivischen Punktreihen auf g, d. h. die Durchschnittspunkte der Geraden g mit der Fläche $F^{(2)}$ sind (S. 15).*) Wir haben

*) Wollen wir uns noch direkt von der ausgesprochenen Behauptung überzeugen, so kann dies auf folgende Art geschehen:

Wir verbinden den doppelt gedachten Träger der beiden projektivischen Punktreihen $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ mit irgend zwei Punkten $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$, die in einer Ebene mit ihm liegen, durch Strahlenbüschel $(\mathfrak{o})$ und $(\mathfrak{o}_1)$, welche einen Kegelschnitt erzeugen müssen, weil $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ projektivische Punktreihen durchlaufen. Koinzidieren nun $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$, und sind deren entsprechende Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$, so werden die Schnittpunkte:

$$(|\mathfrak{o}\mathfrak{x}|, |\mathfrak{o}_1\mathfrak{x}_1|) = \mathfrak{p} \qquad (|\mathfrak{o}\mathfrak{y}|, |\mathfrak{o}_1\mathfrak{y}_1|) = \mathfrak{q}$$

auf dem vorigen Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen, und wir erhalten ein demselben einbeschriebenes Viereck

$$\mathfrak{o} \quad \mathfrak{o}_1 \quad \mathfrak{p} \quad \mathfrak{q},$$

dadurch eine bestimmte Punktinvolution auf g konstruiert, welche immer das (reelle oder konjugiert-imaginäre) Punktepaar der Durchschnittspunkte von g mit $F^{(2)}$ vertritt. Wir wollen diese die der Geraden g in Bezug auf $F^{(2)}$ zugehörige Punktinvolution nennen und wissen von ihr, daſs jedes Paar konjugierter Punkte derselben zugleich ein Paar konjugierter Punkte in Bezug auf jeden Kegelschnitt ist, in welchem irgend eine durch g gelegte Ebene die $F^{(2)}$ schneidet.

Nehmen wir jetzt einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ des Raumes und legen durch denselben zwei beliebige Ebenen α und β, die sich in einer Geraden g schneiden, so ist dem Punkte $\mathfrak{P}$ der Geraden g ein bestimmter Punkt $\mathfrak{P}'$ in der zugehörigen Punktinvolution konjugiert, und es muſs die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ sowohl in Bezug auf den Kegelschnitt $\alpha^{(2)}$, in welchem die Ebene α die $F^{(2)}$ schneidet, als auch in Bezug auf den Kegelschnitt $\beta^{(2)}$, in welchem die Ebene β die $F^{(2)}$ schneidet, durch den Punkt $\mathfrak{P}'$ gehen; die beiden Polaren von $\mathfrak{P}$, welche wir mit l_α und l_β bezeichnen wollen, treffen sich also in dem Punkte $\mathfrak{P}'$ und liegen daher in einer Ebene. Legen wir eine beliebige dritte Ebene γ durch den Punkt $\mathfrak{P}$, und schneidet dieselbe die $F^{(2)}$ in dem Kegelschnitte $\gamma^{(2)}$, ist ferner l_γ die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\gamma^{(2)}$, so muſs nach dem Vorigen l_γ sowohl l_α als auch l_β treffen, und da beide in einer Ebene liegen, so muſs auch l_γ in derselben liegen. Drehen wir die Ebene γ beliebig

---

von welchem

$$(|\mathfrak{o}\mathfrak{p}|, |\mathfrak{o}_1\mathfrak{q}|) = \mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$$

ein Diagonalpunkt ist. Die Polare dieses Punktes $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ ist daher die Verbindungslinie der beiden übrigen Diagonalpunkte, und diese geht durch den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{x}'$ zu den dreien $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{y}\, \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$, d. h.

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{x}') = -1;$$

verändern wir also $\mathfrak{x}$ auf g, so wird $\mathfrak{x}'$ allemal der Schnittpunkt der Polare von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ mit der Geraden g sein; folglich durchläuft das Punktepaar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ zufolge der bekannten Polareigenschaften eines Kegelschnitts diejenige Punktinvolution auf g, welche dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehört, d. h. die Doppelpunkte dieser Punktinvolution koinzidieren mit den Schnittpunkten von g und $\mathfrak{K}^{(2)}$ oder mit den Doppelpunkten der ursprünglich gegebenen projektivischen Punktreihen, welche $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ auf g durchlaufen.

um den festgehaltenen Punkt $\mathfrak{P}$, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ im Raume beliebig viele Ebenen $\mathfrak{x}$ legt, deren jede einer gegebenen Fläche 2. O. $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitte $\mathfrak{x}^{(2)}$ begegnet, und man allemal die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ konstruiert, so liegen diese sämtlichen Geraden in einer und derselben Ebene π; also wird auch umgekehrt jede durch $\mathfrak{P}$ gelegte Ebene $\mathfrak{x}$ die Ebene π in einer Geraden schneiden, welche die Polare von $\mathfrak{P}$ ist in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$, in welchem die Ebene $\mathfrak{x}$ die $F^{(2)}$ schneidet. Wir wollen diese zu dem Punkt $\mathfrak{P}$ konstruierte Ebene π die Polarebene des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Fläche $F^{(2)}$ nennen. Wir können dies Resultat auch so aussprechen:

Wenn man durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ des Raumes beliebig viele Strahlen zieht und auf jedem derselben den zu $\mathfrak{P}$ konjugierten Punkt in derjenigen Punktinvolution bestimmt, welche dem Strahle in Bezug auf eine gegebene $F^{(2)}$ zugehört, so liegen alle diese konjugierten Punkte in einer und derselben Ebene, der Polarebene des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $F^{(2)}$. Sind die Punktinvolutionen hyperbolisch, also ihre Doppelpunkte die Schnittpunkte des Strahles mit $F^{(2)}$, so werden dieselben harmonisch getrennt durch jedes Paar konjugierter Punkte; wir erhalten also die Polarebene von $\mathfrak{P}$ auch dadurch, daſs wir durch $\mathfrak{P}$ Strahlen ziehen und zu den Schnittpunktpaaren mit $F^{(2)}$ die zu $\mathfrak{P}$ zugeordneten vierten harmonischen Punkte bestimmen. Drei solcher Punkte bestimmen schon die Polarebene π. Wenn zu dem Punkte $\mathfrak{P}$ die Polarebene π konstruiert ist, und wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}'$ der letzteren nehmen, so sind auf dem Verbindungsstrahle $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}'|$ diese beiden Punkte konjugiert in der zugehörigen Punktinvolution, folglich muſs die Polarebene π' des Punktes $\mathfrak{P}'$ durch den ersten Punkt $\mathfrak{P}$ hindurchgehen. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Wenn man auf der Polarebene π eines Punktes $\mathfrak{P}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}'$ nimmt, so muſs die

Polarebene π' desselben durch den anfänglichen Punkt $\mathfrak{P}$ hindurchgehen.

Ziehen wir jetzt die Verbindungslinie $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}'| = g$ und nennen die Schnittlinie der beiden Polarebenen $|\pi\pi'| = g'$, so wird eine beliebige durch g, also durch beide Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ gelegte Ebene $\mathfrak{x}$ die Ebenen π und π' in zwei Geraden schneiden, welche die Polaren der Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{x}^{(2)}$ sind, in welchem die Ebene $\mathfrak{x}$ die $F^{(2)}$ schneidet; diese beiden Polaren schneiden sich in dem Punkte, in welchem die Gerade g' der Ebene $\mathfrak{x}$ begegnet; dieser Punkt $\mathfrak{Q}$ ist daher der Pol der Geraden $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}'| = g$ in Bezug auf $\mathfrak{x}^{(2)}$, also mufs die Polarebene von $\mathfrak{Q}$ durch g gehen. Und auch umgekehrt, wenn wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{Q}$ der Geraden g' nehmen, so wird seine Polarebene durch g gehen müssen, denn die Ebene $[\mathfrak{Q}g]$ schneidet π und π' in den Polaren der Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ in Bezug auf den Durchschnittskegelschnitt; folglich ist für diesen auch g die Polare von $\mathfrak{Q}$, also geht die Polarebene von $\mathfrak{Q}$ durch g. Verändern wir den Punkt $\mathfrak{Q}$ auf g', so sehen wir, dafs für sämtliche Punkte von g' die Polarebenen durch g gehen.

Nehmen wir endlich zu $\mathfrak{Q}$ den konjugierten Punkt $\mathfrak{Q}'$ in der zu g' zugehörigen Punktinvolution, so ist zu $\mathfrak{Q}'$ die Polarebene die Ebene $[g\mathfrak{Q}]$. Wir haben jetzt vier Punkte $\mathfrak{P}\ \mathfrak{P}'\ \mathfrak{Q}\ \mathfrak{Q}'$, die in eigentümlicher Verbindung stehen, sie bilden nämlich die Ecken eines Tetraëders und haben zu Polarebenen die gegenüberliegenden Seitenflächen desselben (Polartetraëder, S. 153). Da nun, wie wir gesehen haben, von sämtlichen Punkten der Geraden g' die Polarebenen durch g gehen müssen, und g' als eine ganz willkürliche Gerade im Raume aufzufassen ist (denn wir brauchen nur umgekehrt durch die willkürliche Gerade g' irgend zwei Ebenen zu legen und die Pole von g' in Bezug auf die Durchschnittskegelschnitte zu verbinden, um die vorige Figur zu erhalten), so werden auch die Polarebenen von sämtlichen Punkten der Geraden g durch eine und dieselbe neue Gerade laufen; diese ist aber g', denn die Polarebenen von den beiden Punkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ schneiden sich in g'; die Geraden g und g' heifsen aus diesem Grunde konjugierte Gerade in

Bezug auf die Fläche $F^{(2)}$ und besitzen folgende Eigenschaft:

Von sämtlichen Punkten einer Geraden g laufen die Polarebenen durch eine und dieselbe Gerade g', und von den Punkten der Geraden g' laufen wiederum die Polarebenen sämtlich durch die Gerade g; solche zwei Gerade im Raume heifsen konjugiert.

Nehmen wir jetzt zwei beliebige Gerade g und h, die sich in einem Punkte $\mathfrak{P}$ treffen, so müssen die zu ihnen konjugierten Geraden g' und h' in der Polarebene π des Punktes $\mathfrak{P}$ liegen, folglich sich auch in einem Punkte $\mathfrak{Q}$ treffen, dessen Polarebene $[gh] = \varpi$ ist. Fügen wir aber eine beliebige dritte Gerade l in der Ebene $[gh]$ hinzu, welche in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ den Geraden g und h begegnet, so mufs die konjugierte Gerade l' sowohl in der Polarebene von $\mathfrak{g}$ liegen, die durch g' geht, als auch in der Polarebene von $\mathfrak{h}$, die durch h' geht. Die beiden Polarebenen schneiden sich daher in einer Geraden, die durch den Schnittpunkt $(g'h') = \mathfrak{Q}$ gehen mufs. Wir schliefsen also:

Wenn zwei Gerade g und h im Raume sich treffen (oder in einer Ebene liegen), so liegen auch die konjugierten Geraden g' und h' in einer Ebene (oder treffen sich in einem Punkte). Die Ebene $[gh]$ ist die Polarebene des Punktes $(g'h')$, und die Ebene $[g'h']$ ist die Polarebene des Punktes (gh). Die sämtlichen Geraden, welche in einer Ebene π liegen, haben zu konjugierten Geraden solche, die sämtlich durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{P}$ laufen, dessen Polarebene π ist.

Hierdurch wird einer beliebigen Ebene π des Raumes ein bestimmter Punkt $\mathfrak{P}$ zugeordnet; dieser heifst der Pol der Ebene π in Bezug auf die Fläche $F^{(2)}$ und hat zu seiner Polarebene die anfängliche Ebene π. Hieraus folgt weiter:

Wenn von irgend einer Ebene π im Raume der Pol $\mathfrak{P}$ ist, so mufs von jeder durch $\mathfrak{P}$ gelegten Ebene π' der Pol $\mathfrak{P}'$ in der Ebene π liegen. Von sämtlichen Ebenen, die durch eine beliebige Ge-

rade g des Raumes gelegt werden, liegen die Pole auf der konjugierten Geraden g'. Von sämtlichen Ebenen, die durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen, liegen die Pole in einer und derselben Ebene, der Polarebene jenes Punktes.

Wir haben hierdurch eine vollständige Zuordnung sämtlicher Elemente des Raumes in Bezug auf die Fläche $F^{(2)}$ erlangt: Jedem Punkt des Raumes entspricht eine bestimmte Ebene, seine Polarebene, jeder Geraden eine bestimmte Gerade, ihre konjugierte Gerade, und letzterer wieder die erstere, jeder Ebene ein bestimmter Punkt, ihr Pol, dessen Polarebene wieder diese Ebene ist. Die auf diese Weise einander polar zugeordneten Elemente des Raumes sind noch enger mit einander in folgender Art verknüpft:

Wenn wir einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ die feste Gerade g durchlaufen, also eine gerade Punktreihe beschreiben lassen, so geht seine Polarebene $\mathfrak{z}$ nicht blofs durch die konjugierte Gerade g', beschreibt also ein Ebenenbüschel, sondern auch durch den zu $\mathfrak{x}$ konjugierten Punkt $\mathfrak{x}'$ der zu g zugehörigen Punktinvolution in Bezug auf die Fläche $F^{(2)}$. Da aber bei einer Punktinvolution die konjugierten Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ zwei projektivische Punktreihen durchlaufen, so sind auch die von $\mathfrak{x}$ beschriebene gerade Punktreihe auf g und das von $\mathfrak{z}$ beschriebene Ebenenbüschel mit der Axe g' projektivisch und liegen involutorisch. In gleicher Weise folgt, dafs, wenn wir um g eine veränderliche Ebene $\mathfrak{z}$ drehen, ihr Pol $\mathfrak{x}$ auf der konjugierten Geraden g' eine Punktreihe durchläuft, welche mit dem von $\mathfrak{z}$ beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch ist und involutorisch liegt, d. h. die durch g gelegten Ebenenpaare $\mathfrak{z}$ und $[g\mathfrak{x}]$ bilden eine Ebeneninvolution. Wir schliefsen also:

Jede Gerade g im Raume ist gleichzeitig der Träger einer bestimmten zugehörigen Punktinvolution und die Axe einer bestimmten zugehörigen Ebeneninvolution in Bezug auf $F^{(2)}$. Die Punktinvolution wird erhalten, indem wir auf g einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ laufen lassen, dessen Polarebene $\mathfrak{z}$ in dem konjugierten Punkte $\mathfrak{x}'$ die g trifft. Die Ebeneninvolution wird erhalten, indem

wir um g eine veränderliche Ebene $\mathfrak{x}$ drehen und deren Pol $\mathfrak{x}$ mit g durch die konjugierte Ebene $\mathfrak{x}'$ der Ebeneninvolution verbinden. Ist g' die konjugierte Gerade zu g, so liegt die Ebeneninvolution der Geraden g perspektivisch mit der Punktinvolution der Geraden g' und die Ebeneninvolution der Geraden g' perspektivisch mit der Punktinvolution der Geraden g. Sobald wir zwei konjugierte Gerade $g\,g'$ haben, sind also ihre Ebeneninvolutionen durch ihre Punktinvolutionen mit gegeben und umgekehrt.

Wenn wir ferner von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}$ des Raumes die Polarebene π nehmen und einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ in dieser Ebene π wandern lassen, so wird seine Polarebene $\mathfrak{x}$ die Ebene π in einer Geraden $l_{\mathfrak{x}}$ schneiden, so dafs $\mathfrak{x}$ und $l_{\mathfrak{x}}$ Pol und Polare eines bestimmten ebenen Polarsystems bilden (Th. d. K. § 56); denn sobald sich $\mathfrak{x}$ auf einer Geraden g bewegt, mufs sich $l_{\mathfrak{x}}$ um einen festen Punkt drehen, den Durchbohrungspunkt der konjugierten Geraden g' mit der Ebene π; die von $\mathfrak{x}$ beschriebene Punktreihe und das von $l_{\mathfrak{x}}$ beschriebene Strahlenbüschel sind projektivisch und liegen involutorisch, wodurch die charakteristische Eigenschaft des ebenen Polarsystems vollständig erwiesen ist. Ziehen wir andererseits durch $\mathfrak{P}$ einen veränderlichen Strahl x und verbinden den konjugierten Strahl x' (welcher in der Polarebene π liegt) mit $\mathfrak{P}$ durch eine Ebene ε_x, so sind x und ε_x Polarstrahl und Polarebene eines Polarbündels (S. 30), welches $\mathfrak{P}$ zum Mittelpunkt hat und perspektivisch liegt mit dem ebenen Polarsystem in der Ebene π. Wir haben also folgendes Resultat:

Jede Ebene π im Raume ist der Träger eines ebenen Polarsystems, für welches irgend ein Punkt $\mathfrak{x}$ und die Durchschnittslinie $l_{\mathfrak{x}}$ seiner Polarebene $\mathfrak{x}$ mit der Ebene π Pol und Polare sind; jeder Punkt $\mathfrak{P}$ im Raume ist der Mittelpunkt eines Polarbündels, für welches irgend ein Strahl x durch $\mathfrak{P}$ und die Verbindungsebene ε_x des konjugierten Strahles x' mit $\mathfrak{P}$ Polarstrahl und Polarebene sind. Ist $\mathfrak{P}$ der Pol der Ebene π in Bezug auf $F^{(2)}$, so liegen das dem Punkte $\mathfrak{P}$ zugehörige

Polarbündel und das der Ebene π zugehörige ebene Polarsystem perspektivisch.

Ein solches Gebilde, wie wir es hier vermittelst der Fläche $F^{(2)}$ konstruiert haben, heifst ein räumliches Polarsystem (S. 126). Es bleibt uns jetzt noch übrig, die incidenten Elemente desselben aufzusuchen, nämlich die sämtlichen Doppelelemente der darin auftretenden Punkt- und Ebeneninvolutionen.

Von vornherein wissen wir, dafs auf jeder Geraden g die beiden Doppelpunkte der zugehörigen Punktinvolution diejenigen Punkte sind, in welchen die Gerade g die Fläche $F^{(2)}$ schneidet, ferner dafs in jeder Ebene π der Kernkegelschnitt des zugehörigen ebenen Polarsystems derjenige Kegelschnitt $\pi^{(2)}$ ist, in welchem die Ebene π die Fläche $F^{(2)}$ schneidet. Die Gesamtheit der Punkte im räumlichen Polarsystem, deren Polarebenen durch sie selbst gehen, bildet also die Fläche $F^{(2)}$. Nehmen wir aber in einer beliebigen Ebene π einen solchen besonderen Punkt $\mathfrak{x}$, dessen Polare $t_{\mathfrak{x}}$ des der Ebene π zugehörigen ebenen Polarsystems durch $\mathfrak{x}$ selbst geht, so ist bekanntlich $t_{\mathfrak{x}}$ eine Tangente des Kernkegelschnitts $\pi^{(2)}$, in welchem die Ebene π die Fläche $F^{(2)}$ schneidet und $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt dieser Tangente; $t_{\mathfrak{x}}$ ist also auch eine Tangente der Fläche $F^{(2)}$ selbst. Nehmen wir nun den Pol $\mathfrak{P}$ der Ebene π und legen eine Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ durch $t_{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{P}$, so ist die Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ die Polarebene des Punktes $\mathfrak{x}$ im räumlichen Polarsystem. Diese schneidet die Fläche $F^{(2)}$ in einem neuen Kegelschnitt von besonderer Art. Dieser mufs nämlich einmal $t_{\mathfrak{x}}$ zur Tangente haben, oder $\mathfrak{x}$ und $t_{\mathfrak{x}}$ müssen Pol und Polare für ihn sein und zweitens müssen auch $\mathfrak{P}$ und $t_{\mathfrak{x}}$ Pol und Polare für ihn sein. Dies ist aber nicht anders möglich, als wenn er zerfällt in ein reelles oder imaginäres Linienpaar, dessen reeller Doppelpunkt der Punkt $\mathfrak{x}$ ist. Jede Ebene aber, welche die Fläche $F^{(2)}$ in einem reellen oder imaginären Linienpaar schneidet, ist, wie wir wissen (S. 482), eine Berührungsebene der Fläche $F^{(2)}$; also die Polarebenen sämtlicher Punkte, die der Fläche $F^{(2)}$ selbst angehören, sind die Berührungsebenen der Fläche $F^{(2)}$ und ihre Pole, die in ihnen liegen, die Be-

rührungspunkte derselben. Dasselbe ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung:

Eine beliebige Gerade g im Raume ist die Axe einer zugehörigen Ebeneninvolution in Bezug auf $F^{(2)}$, welche mit der der konjugierten Geraden g' zugehörigen Punktinvolution perspektivisch liegt. Die Doppelpunkte der letzteren, mit g verbunden, liefern also die Doppelebenen der ersteren. Eine solche Doppelebene geht daher durch ihren Pol selbst hindurch; bezeichnen wir sie mit $\tau_{\mathfrak{x}}$ und ihren Pol mit $\mathfrak{x}$, so sehen wir, dafs jede Gerade in $\tau_{\mathfrak{x}}$ zur konjugierten Geraden eine solche haben mufs, die durch $\mathfrak{x}$ geht. Hieraus folgt, dafs für dasjenige ebene Polarsystem, welches der Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ angehört, zu jeder beliebigen Geraden einer und derselbe Punkt $\mathfrak{x}$ der Pol ist, und hieraus schliefsen wir, dafs der Kernkegelschnitt dieses besonderen Polarsystems ein (reelles oder imaginäres) Linienpaar sein mufs, dessen immer reeller Doppelpunkt $\mathfrak{x}$ ist. Also ist $\tau_{\mathfrak{x}}$ eine Berührungsebene der Fläche $F^{(2)}$ und $\mathfrak{x}$ ihr Berührungspunkt. Einer solcher besonderen Geraden g, welche in der Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ liegt und zugleich durch $\mathfrak{x}$ geht, mufs eine Gerade g' konjugiert sein, die durch $\mathfrak{x}$ geht, weil g in $\tau_{\mathfrak{x}}$ liegt, und die zugleich in $\tau_{\mathfrak{x}}$ liegt, weil g durch $\mathfrak{x}$ geht. Diese beiden konjugierten Geraden g und g' treffen sich also in einem Punkte $\mathfrak{x}$ und liegen zugleich in einer Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$. Drehen wir g um den Punkt $\mathfrak{x}$ in der Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$, so dreht sich auch g' in derselben Ebene um denselben Punkt. Aus der Natur des räumlichen Polarsystems folgt, dafs solche besondere Strahlenpaare gg' eine Strahleninvolution durchlaufen, deren Doppelstrahlen das Linienpaar bilden, in welchem die Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ die Fläche $F^{(2)}$ schneidet. Wir schliefsen also:

Zwei konjugerte Gerade g und g' eines räumlichen Polarsystems treffen sich im allgemeinen nicht im Raume; sobald sie sich aber insbesondere treffen in einem Punkte $\mathfrak{x}$, liegen sie zugleich in einer Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$; $\mathfrak{x}$ und $\tau_{\mathfrak{x}}$ sind ein besonderes Paar von Pol und Polarebene, die incident liegen; der Punkt $\mathfrak{x}$ gehört allemal der Kernfläche $F^{(2)}$ des räumlichen Polarsystems an, und $\tau_{\mathfrak{x}}$ ist die Berührungsebene derselben in diesem Punkte. Drehen wir

um $\mathfrak{x}$ eine veränderliche Gerade x in der Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$, so dreht sich auch die konjugierte Gerade x' in derselben Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ um den Punkt $\mathfrak{x}$. Das Strahlenpaar xx' beschreibt eine Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen ein (reelles oder imaginäres) Linienpaar bilden, in welchem die Ebene $\tau_{\mathfrak{x}}$ die Fläche $F^{(2)}$ schneidet.

Wir bemerken noch, was sich nach dem Vorigen von selbst versteht:

Durch eine beliebige Gerade g gehen im allgemeinen zwei Berührungsebenen an eine Fläche 2. O. $F^{(2)}$. Diese sind die Doppelebenen der Ebeneninvolution, welche der Geraden g im räumlichen Polarsysteme zugehört, dessen Kernfläche $F^{(2)}$ ist. Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ im Raume gehen unendlich-viele Berührungsebenen an die Fläche $F^{(2)}$. Diese umhüllen einen Kegel 2. O. $\mathfrak{P}^{(2)}$, den Kernkegel des Polarbündels, welches dem Punkte $\mathfrak{P}$ im räumlichen Polarsystem zugehört. Die Berührungspunkte sämtlicher aus einem Punkte $\mathfrak{P}$ an eine Fläche $F^{(2)}$ gelegten Berührungsebenen liegen in einer Ebene, der Polarebene π des Punktes $\mathfrak{P}$, und bilden einen Kegelschnitt $\pi^{(2)}$, dessen Tangenten mit $\mathfrak{P}$ verbunden die Berührungsebenen sowohl der Fläche $F^{(2)}$ als auch ihres Berührungskegels $\mathfrak{P}^{(2)}$ sind. Ein Kegelstrahl und die durch den Berührungspunkt desselben gehende Tangente des Kegelschnitts $\pi^{(2)}$ sind allemal zwei konjugierte Strahlen im räumlichen Polarsystem.

Aus der vollständigen Dualität, welche das räumliche Polarsystem beherrscht, folgt nun, dafs die Fläche 2. O. $F^{(2)}$ zugleich eine Fläche zweiter Klasse $\Phi^{(2)}$ ist, d. h. wenn wir die der bisherigen dual-gegenüberstehende Untersuchung anstellen, indem wir anstatt von zwei reziproken Bündeln $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ auszugehen, das Erzeugnis zweier in reziproker Beziehung stehenden ebenen Felder ε und ε_1 aufsuchen, also den Ort der Ebenen aufsuchen, welche einen Punkt $\mathfrak{x}$ des Feldes ε mit dem entsprechenden Strahl x_1 des Feldes ε_1 oder einen Strahl x des Feldes ε mit dem entsprechenden

Punkt $\mathfrak{x}_1$ des Feldes ε_1 verbinden, dann erhalten wir eine Gesamtheit von Ebenen, welche die Berührungsebenen einer Fläche zweiter Klasse sind. Wenn wir aber in analoger Weise, wie oben, von diesem Erzeugnisse der beiden reziproken ebenen Felder zu dem Gebilde eines räumlichen Polarsystems übergehen, so erhalten wir kein neues, sondern dasselbe vorige Gebilde; nur erscheint die Kernfläche des räumlichen Polarsystems ($F^{(2)}$) das eine Mal als Ort von Punkten, deren Polarebenen durch sie selbst gehen, das andere Mal als Ort von Ebenen, deren Pole in ihnen selbst liegen ($\Phi^{(2)}$), d. h. das eine Mal von Punkten erfüllt, das andere Mal von Ebenen umhüllt. Wir erkennen also hieraus die Identität der beiden dual gegenüberstehenden Gebilde: der Fläche 2. O. und der Fläche 2. Kl.

§ 56. Direkte Konstruktion des räumlichen Polarsystems einer $F^{(2)}$ aus zwei dieselbe erzeugenden reziproken Bündeln.

Wir können aus der Erzeugung einer Fläche 2. O. $F^{(2)}$ durch zwei reziproke Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ in direkter Weise zu der Konstruktion des im vorigen Paragraphen beschriebenen räumlichen Polarsystems gelangen, dessen Kernfläche $F^{(2)}$ ist, wie folgt:

Wenn zwei reziproke Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ gegeben sind, und man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ im Raume nimmt (der nicht dem Erzeugnisse der beiden Bündel angehört), so entspricht dem Strahle $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = x$ im Bündel $\mathfrak{O}$ eine bestimmte Ebene ξ_1 im Bündel $\mathfrak{O}_1$; es entspricht gleichfalls dem Strahle $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{x}| = y$ im Bündel $\mathfrak{O}_1$ eine bestimmte Ebene η im Bündel $\mathfrak{O}$; durch die Schnittlinie der beiden Ebenen:

$$|\xi_1 \eta|$$

lege man eine dritte Ebene, die durch $\mathfrak{x}$ geht, und die zugeordnete vierte harmonische Ebene ξ, dann sind

$$\mathfrak{x} \text{ und } \xi$$

Pol und Polarebene eines räumlichen Polarsystems,

dessen Kernfläche $F^{(2)}$ das Erzeugnis der gegebenen beiden reziproken Bündel ist.

Der Beweis dieses Satzes zerfällt in mehrere Teile; zuerst untersuchen wir die Veränderung von $\mathfrak{x}$, sobald $\mathfrak{x}$ sich auf einer beliebigen Geraden g fortbewegt.

Bezeichnen wir die Ebene $[\mathfrak{O}g] = \alpha$, und entspreche dieser dem Bündel $\mathfrak{O}$ angehörigen Ebene der Strahl a_1 des Bündels $\mathfrak{O}_1$; bezeichnen wir ferner die Ebene $[\mathfrak{O}_1 g] = \beta_1$, und entspreche dieser dem Bündel $\mathfrak{O}_1$ angehörigen Ebene der Strahl b des Bündels $\mathfrak{O}$. Wenn wir jetzt auf der Geraden g einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ bewegen, so entsprechen den Strahlen $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = x$ $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{y}_1| = y_1$ die Ebenen ξ_1 und η, und diese müssen zwei projektivische Ebenenbüschel beschreiben um die festen Axen a_1 und b, weil beide Ebenenbüschel projektivisch sind (vermöge der gegebenen reziproken Beziehung) mit der von $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ beschriebenen geraden Punktreihe. Die Schnittlinie:

$$|\xi_1 \eta| = s$$

durchläuft also eine Regelschar eines Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$, dessen zweiter Regelschar die Strahlen a_1 und b angehören.

Legen wir jetzt durch die Gerade g eine beliebige Ebene ε hindurch, welche den Strahlen a_1 und b in den Punkten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$ begegnen möge, so wird die Verbindungslinie $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}|$ der Geraden g in einem zweiten Punkte begegnen, den wir in doppeltem Sinne mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}_1$ bezeichnen wollen; den Strahlen $|\mathfrak{O}\mathfrak{m}| = m$ und $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{n}_1| = n_1$ mögen gemäfs der reziproken Beziehung der beiden Bündel die Ebenen μ_1 und ν entsprechen, dann haben wir in den beiden reziproken Bündeln die entsprechenden Elementenpaare:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \text{und} & a_1 \\ b & ,, & \beta_1 \\ x & ,, & \xi_1 \\ \eta & ,, & y_1 \\ m & ,, & \mu_1 \\ \nu & ,, & n_1, \end{array}$$

und wegen der reziproken Beziehung sind in der Ebene α die vier Strahlen:

$$m \quad x \quad |\alpha\eta| \quad |\alpha\nu|$$

projektivisch mit den vier Ebenen durch a_1:

$$\mu_1 \quad \xi_1 \quad [a_1 y_1] \quad [a_1 n_1].$$

Legen wir daher durch b und die vier ersten Strahlen vier Ebenen, so ist das Büschel der Ebenen:

$$[bm] \quad [bx] \quad \eta \quad \nu$$

projektivisch mit dem zweiten Ebenenbüschel um die Axe a_1, dessen Elemente wir so umstellen können:

$$[a_1 n_1] \quad [a_1 y_1] \quad \xi_1 \quad \mu_1.$$

Diese beiden projektivischen Ebenenbüschel schneiden die Ebene ε in zwei projektivischen Strahlenbüscheln, welche, wie unmittelbar ersichtlich ist, perspektivisch liegen müssen, weil in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}|$ die Durchschnittslinien der Ebenen $[bm]$ und $[a_1 n_1]$ mit ε zusammenfallen, folglich müssen auch die Durchschnittslinien entsprechender Ebenen:

$$|\xi_1 \eta| \quad |\mu_1 \nu| \quad \text{und} \quad |[bx], [a_1 y_1]|$$

die Ebene ε in drei Punkten einer geraden Linie treffen. Der letztere Punkt ist aber kein anderer als unser anfänglicher Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ auf g; folglich mufs die Ebene, welche $|\xi_1 \eta| = s$ mit $\mathfrak{x}$ verbindet, durch den Punkt gehen, in welchem die Ebene ε von $|\mu_1 \nu|$ getroffen wird. Dies ist aber ein fester Punkt, der nur abhängt von der Lage einer willkürlich durch g gelegten Ebene ε, welche wir festhalten können, während $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ und ξ_1 und η sich verändern. Die variable Ebene $[s\mathfrak{x}]$ geht aber nicht nur durch den einzigen festen Punkt, in welchem ε von $|\mu_1 \nu|$ getroffen wird, sondern auch noch durch einen zweiten, dritten u. s. f., die wir erhalten, wenn wir ε um g drehen, also notwendig durch eine feste Axe, wie wir auch unmittelbar erkennen; denn die Schnittlinie $|\mu_1 \nu|$ gehört derselben Regelschar an, welche $|\xi_1 \eta| = s$ beschreibt. Durch den festen Punkt, in welchem $|\mu_1 \nu|$ von ε getroffen wird, geht eine und nur eine Erzeugende c der andern Regelschar des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$; die Erzeugende s mufs der Erzeugenden c begegnen, d. h. die durch s und den Schnittpunkt von $|\mu_1 \nu|$ mit ε gelegte Ebene mufs durch c gehen. Diese durch s und den Schnittpunkt von $|\mu_1 \nu|$ mit ε gelegte

Ebene ist aber identisch, wie wir gesehen haben, mit der Ebene $[s\mathfrak{x}]$, folglich geht die variable Ebene $[s\mathfrak{x}]$ durch den festen Strahl c, d. h. durch eine feste Erzeugende c des Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$, welche zu derselben Regelschar gehört wie a_1 und b. Wir haben daher folgenden ersten Satz gefunden:

Wenn zwei reziproke Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ gegeben sind, und man verändert einen Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ auf einer Geraden g, so entspricht dem Strahle:

$|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = x$ die Ebene ξ_1 und dem Strahle:

$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{y}_1| = y_1$ „ „ η;

wird die Schnittlinie:

$$|\xi_1\eta| = s$$

mit dem Punkte $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ durch eine Ebene verbunden, so läuft diese veränderliche Ebene beständig durch eine feste Gerade c.

Die Schnittlinie $|\xi_1\eta| = s$ durchläuft, wie wir gesehen haben, bei dieser Veränderung eine Regelschar eines Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$, welcher die drei Strahlen $a_1\, b\, c$ angehören, wo a_1 und b diejenigen Strahlen der beiden Bündel $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ bezeichnen, welche den Ebenen $[\mathfrak{O}g] = \alpha$ und $[\mathfrak{O}_1 g] = \beta_1$ entsprechen. Da vermöge der reziproken Beziehung der gegebenen Bündel der Strahl x ein ebenes Strahlenbüschel in der Ebene α beschreibt, welches mit dem von der Ebene $\xi_1 = [a_1 s]$ beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch sein muſs, und wegen der Grundeigenschaft des Hyperboloids auch die Ebenen $[a_1 s]$ und $[cs]$ projektivische Ebenenbüschel beschreiben, so wird auch das von der veränderlichen Ebene $[s\mathfrak{x}]$ beschriebene Ebenenbüschel (mit der Axe c) projektivisch sein mit der ursprünglichen von $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ auf g durchlaufenen Punktreihe.

Wir haben nun auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}$ drei feste Erzeugende $a_1\, b\, c$ derselben Regelschar und eine veränderliche Erzeugende s der andern Regelschar; zu den drei Ebenen $[sa_1]$ $[sb]$ $[sc]$ legen wir durch s die vierte harmonische der letzteren zugeordnete Ebene ξ; diese wird das Hyperboloid auſser in s in einer einzigen bestimmten Erzeugenden g' der ersten Regelschar schneiden, und es ist

ersichtlich, dafs, während die Erzeugende s die ganze Regelschar durchläuft, die Erzeugende g' immer dieselbe bleiben mufs; denn sei s' eine zweite Erzeugende der von s beschriebenen Regelschar, so mufs offenbar

$$s[a_1 b c g'] \barwedge s'[a_1 b c g']$$

sein, wegen des Hyperboloids, und da das erste Doppelverhältnis den Wert -1 hat, so mufs ihn auch das zweite Doppelverhältnis haben, d. h. die zu $[s'a_1]$ $[s'b]$ $[s'c]$ der letzteren zugeordnete vierte harmonische Ebene mufs durch g' gehen. Wir haben demnach folgenden zweiten Satz:

Wenn zwei reziproke Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ gegeben sind, und man einen Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ auf einer festen Geraden g so verändert, dafs den Strahlen:

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{x}| = x \quad \text{und} \quad |\mathfrak{O}_1\mathfrak{y}_1| = y_1$$

die Ebenen:

$$\xi_1 \quad \text{und} \quad \eta$$

entsprechen; wenn man ferner die Schnittlinie:

$$|\xi_1 \eta| = s$$

mit dem ursprünglichen Punkte $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ durch eine veränderliche Ebene:

$$[s\mathfrak{x}]$$

verbindet und zu dieser die zugeordnete vierte harmonische Ebene ξ konstruiert, während $\xi_1 \eta$ das andere Paar zugeordneter Ebenen sind, dann wird bei der Bewegung von $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ die Ebene ξ durch eine feste Gerade g' laufen und ein Ebenenbüschel beschreiben, welches mit der von $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ beschriebenen geraden Punktreihe projektivisch ist.

Die letztere Behauptung folgt unmittelbar aus dem Vorigen, weil die von $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ beschriebene gerade Punktreihe mit dem von $[s a_1]$ beschriebenen Ebenenbüschel, letzteres mit dem von $[s\mathfrak{x}]$ beschriebenen Ebenenbüschel, und (weil auch g' eine Erzeugende desselben Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$ ist) auch mit dem von $\xi = [g's]$ beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch sein mufs; folglich beschreiben auch die von einander abhängigen Elemente:

$$\mathfrak{x} \text{ und } \mathfrak{x}$$

zwei projektivische Gebilde.

Zu dieser Projektivität tritt aber noch die besondere Eigenschaft der involutorischen Lage beider Gebilde hinzu, die das räumliche Polarsystem charakterisiert. Wir überzeugen uns von derselben durch folgende Betrachtung:

Ist zu dem willkürlich gewählten Punkte $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ auf der festen Geraden g durch die obige Konstruktion die entsprechende Ebene $\mathfrak{x}$ gefunden, und begegnet dieselbe der Geraden g in dem doppelt aufzufassenden Punkte $\mathfrak{p}(\mathfrak{r}_1)$, so ist zum Nachweise der involutorischen Lage zu zeigen, daſs die zu dem Punkte $\mathfrak{p}(\mathfrak{r}_1)$ durch die gleiche Konstruktion zu ermittelnde Ebene durch den anfänglichen Punkt $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$ gehen muſs.

Sind demgemäſs die den Strahlen:

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{p}| = p \quad \text{und} \quad |\mathfrak{O}_1\mathfrak{r}_1| = r_1$$

entsprechenden Ebenen:

$$\pi_1 \quad \text{und} \quad \varrho,$$

so haben wir in den beiden reziproken Bündeln $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1$ vier Paare entsprechender Elemente:

$$x \text{ und } \xi_1; \quad \eta \text{ und } y_1; \quad p \text{ und } \pi_1; \quad \varrho \text{ und } r_1$$

und auſserdem:

$$[xp] = \alpha \quad \text{und} \quad |\xi_1\pi_1| = a_1$$
$$|\eta\varrho| = b \quad \text{und} \quad [y_1 r_1] = \beta_1.$$

Die vier Strahlen:

1) . . . . $x \quad p \quad |\alpha\eta| \quad |\alpha\varrho|$

in der Ebene α haben daher ein Doppelverhältnis, welches gleich ist dem der vier entsprechenden Ebenen in dem Ebenenbüschel mit der Axe a_1:

$$\xi_1 \quad \pi_1 \quad [a_1 y_1] \quad [a_1 r_1],$$

welche sich bekanntlich auch so umstellen lassen:

2) . . . . . $[a_1 r_1] \quad [a_1 y_1] \quad \pi_1 \quad \xi_1.$

Auf der Geraden g bestimmen die vier Strahlen 1) vier Punkte und die Ebenen 2) ebenfalls vier Punkte, zwischen denen die Gleichheit der Doppelverhältnisse stattfinden muſs, oder, was dasselbe sagt, diese vier Paare von Punkten sind entsprechende Elemente projektivischer Punktreihen. Es fallen aber,

wie unmittelbar ersichtlich ist, bei diesen beiden projektivischen Punktreihen die Endpunkte eines Paares entsprechender gleicher Strecken verkehrt auf einander, nämlich die beiden ersten Punktepaare:

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}(\mathfrak{r}_1);$$

folglich liegen die beiden Punktreihen involutorisch, d. h. wir haben auf g drei Punktepaare einer Involution:

$$\mathfrak{x} \text{ und } \mathfrak{p}; \quad (g\eta) \text{ und } (g\pi_1); \quad (g\varrho) \text{ und } (g\xi_1),$$

und aus dieser Involution folgt wieder die Projektivität:

$$\{\mathfrak{x}\ \mathfrak{p}\ (g\eta)\ (g\xi_1)\} \barwedge \{\mathfrak{p}\ \mathfrak{x}\ (g\pi_1)\ (g\varrho)\};$$

das links stehende dieser beiden Doppelverhältnisse hat aber der Konstruktion zufolge den Wert -1, folglich auch das rechts stehende; daher geht die durch die Schnittlinie der beiden Ebenen $\pi_1\ \varrho$ zu diesen beiden und zu der durch $\mathfrak{p}(\mathfrak{r}_1)$ gelegten dritten zugeordnete vierte harmonische Ebene notwendig durch den anfänglichen Punkt $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1)$, w. z. b. w.

Hierdurch ist die involutorische Lage der von den beiden abhängigen Elementen $\mathfrak{x}$ und ξ auf den Trägern g und g' beschriebenen Gebilde nachgewiesen; wir können also dem vorhin ausgesprochenen zweiten Satz den folgenden hinzufügen:

Die von den abhängigen Elementen $\mathfrak{x}$ und ξ, welche die obige Konstruktion lieferte, beschriebenen einfachen Gebilde sind nicht allein projektivisch, sondern liegen auch involutorisch.

Wir nennen nun diese durch die anfängliche Konstruktion ermittelten abhängigen Elemente:

$\mathfrak{x}$ und ξ
Pol und Polarebene

eines räumlichen Polarsystems und haben dadurch die charakteristische Eigenschaft desselben gefunden:

Wenn $\mathfrak{x}$ und ξ Pol und Polarebene sind, so mufs von jedem Punkte $\mathfrak{x}'$ der Ebene ξ die Polarebene ξ' durch $\mathfrak{x}$ gehen; denn verbinden wir $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ durch eine Gerade g, so sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ ein Punktepaar einer Punktinvolution auf g, also vertauschbar; auf jeder Geraden g im Raume wird also durch das räumliche Polarsystem eine

Punktinvolution hervorgerufen, wie wir gesehen haben, indem jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Geraden g derjenige Punkt $\mathfrak{x}'$ konjugiert ist, in welchem die Polarebene ξ der Geraden g begegnet. Wir wissen ferner, dafs, wenn $\mathfrak{x}$ sich auf einer Geraden g bewegt, ξ sich um eine feste Gerade g' drehen mufs; g' ist also die Axe einer Ebeneninvolution, welche mit der Punktinvolution auf g perspektivisch liegt.

Sei g' bestimmt als die Schnittlinie zweier Polarebenen α und β für die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Geraden g, dann ist ersichtlich, dafs, wenn $\mathfrak{a}'$ irgend ein Punkt von $|\alpha\beta| = g'$ ist, die Polarebene von $\mathfrak{a}'$ durch $\mathfrak{a}$ gehen mufs, weil $\mathfrak{a}'$ in α liegt, und auch durch $\mathfrak{b}$ gehen mufs, weil $\mathfrak{a}'$ in β liegt, folglich werden die Polarebenen sämtlicher Punkte $\mathfrak{x}'$ der Geraden g' durch die Gerade g gehen; die Geraden g und g' sind also vertauschbar und dürfen daher die Bezeichnung *konjugierte Gerade* erhalten; *jede ist gleichzeitig der Träger einer Punktinvolution und die Axe einer Ebeneninvolution, und zwar liegt die Ebeneninvolution der einen Geraden mit der Punktinvolution der konjugierten Geraden perspektivisch.*

Nehmen wir einen beliebigen festen Punkt $\mathfrak{P}$ im Raume und drehen um ihn einen veränderlichen Strahl x', so wird die konjugierte Gerade x beständig in der festen Polarebene π des Punktes $\mathfrak{P}$ liegen müssen; der Strahl x' durchbohre dieselbe im Punkte $\mathfrak{x}$, dann bilden $\mathfrak{x}$ und x Pol und Polare eines ebenen Polarsystems $[\pi]$, wie wir sofort erkennen; denn, wenn sich $\mathfrak{x}$ auf einer Geraden bewegt, so dreht sich x um einen festen Punkt; diese beiden konjugierten Elemente beschreiben projektivische Gebilde, welche involutorisch liegen, und hierdurch ist das ebene Polarsystem vollständig charakterisiert. Verbinden wir gleichzeitig $\mathfrak{P}$ mit der zu x' konjugierten Geraden x durch eine Ebene ξ', so sind x' und ξ' Polarstrahl und Polarebene eines Polarbündels mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{P}$; dieses Polarbündel $(\mathfrak{P})$ und das Polarsystem $[\pi]$ liegen perspektivisch. Also:

Jede Ebene π im Raume ist der Träger eines ebenen Polarsystems, für welches konjugierte Elemente sind: ein beliebiger Punkt $\mathfrak{x}$ derselben und die Durchschnittslinie x seiner Polarebene ξ mit π,

nämlich Pol und Polare für dieses ebene Polarsystem. Jeder Punkt $\mathfrak{P}$ im Raume ist der Mittelpunkt eines bestimmten Polarbündels, für welches konjugierte Elemente sind: ein beliebiger Strahl x' und die Polarebene $\mathfrak{x}'$ des Durchschnittspunktes von x' mit π, nämlich Polarstrahl und Polarebene für dieses Polarbündel. Sind $\mathfrak{P}$ und π Pol und Polarebene des räumlichen Polarsystems, so liegen die ihnen zugehörigen Gebilde: das Polarbündel ($\mathfrak{P}$) und das ebene Polarsystem [π] perspektivisch.

Nimmt man in einer beliebigen Ebene $\mathfrak{x}$ des Raumes zwei Gerade g und h an, die sich in einem Punkte $\mathfrak{x}'$ treffen, so müssen die konjugierten Geraden g' und h' in der Polarebene $\mathfrak{x}'$ des Punktes $\mathfrak{x}'$ liegen, folglich in einem Punkte $\mathfrak{x}$ sich treffen, dessen Polarebene $\mathfrak{x}$ ist. Wir erhalten dadurch zu jeder Ebene $\mathfrak{x}$ des Raumes einen Punkt $\mathfrak{x}$ zugeordnet, nämlich denjenigen Punkt (Pol der Ebene $\mathfrak{x}$), dessen Polarebene nach der ursprünglichen Konstruktion $\mathfrak{x}$ ist.

Wenn die Ebene $\mathfrak{x}$ sich um einen beliebigen Strahl g dreht, so bewegt sich ihr Pol $\mathfrak{x}$ auf der konjugierten Geraden g'; das Ebenenbüschel [$\mathfrak{x}$] und die Punktreihe ($\mathfrak{x}$) sind projektivisch und liegen involutorisch u. s. w.

Wir haben dadurch alle in doppelter Weise auftretenden Beziehungen des räumlichen Polarsystems aus der anfangs gegebenen Konstruktion heraus nachgewiesen und dieselben Resultate wie in § 19 wiedergefunden. Es bleibt jetzt nur noch übrig, indem wir die besonderen incidenten Elemente des räumlichen Polarsystems aufsuchen, zu zeigen, dafs die Kernfläche desselben mit dem Erzeugnis $F^{(2)}$ der beiden gegebenen reziproken Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ identisch ist.

Nehmen wir insbesondere an, es sei $\mathfrak{x}$ ein solcher Punkt im räumlichen Polarsystem, welcher in seiner Polarebene $\mathfrak{x}$ liege, so könnte er entweder in der Schnittlinie $s = |\mathfrak{x}_1 \eta|$, durch welche $\mathfrak{x}$ geht, oder nicht in dieser Schnittlinie liegen. Im letzteren Falle müfsten aber von den vier harmonischen Ebenen, welche durch s gehen, zwei zugeordnete koinzidieren, folglich müfste notwendig auch eine der beiden übrigen $\mathfrak{x}_1$ oder η in die beiden zusammenfallenden hineinfallen; es

müfste also $\mathfrak{x}$ entweder der Schnittpunkt von x und $\mathfrak{x}_1$ oder der Schnittpunkt von y_1 und η, auf alle Fälle ein Punkt des Erzeugnisses der beiden reziproken Bündel sein. Wir wissen aber aus der Konstruktion zweier reziproken Bündel, dafs wenn $\mathfrak{x}$ der Schnittpunkt von x und ξ_1 ist, er auch gleichzeitig der Schnittpunkt von y_1 und η sein mufs, also in der Schnittlinie $|\xi_1 \eta| = s$ liegt. Der vorhin angenommene Fall ist also nicht zutreffend, sondern sobald $\mathfrak{x}$ in seiner Polarebene ξ liegt, mufs es gleichzeitig in ξ_1 und η, d. h. in $s = |\xi_1 \eta|$ liegen, also immer ein Punkt des Erzeugnisses der beiden reziproken Bündel $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ sein, d. h. der Fläche $F^{(2)}$ angehören.

Allein in diesem besonderen Falle, wenn $\mathfrak{x}$ in s liegt, wird die Konstruktion der Polarebene ξ zunächst unbestimmt, und wir haben zu ermitteln, welche besondere Lage sie dann annimmt; wir wissen nur, dafs sie durch die Schnittlinie:

$$s = |\xi_1 \eta|$$

geht, welche, wie wir früher erkannt haben (S. 454), eine Tangente der $F^{(2)}$ ist. Wir können aber die gesuchte Polarebene leicht dadurch ermitteln, dafs wir zur Geraden s die konjugierte Gerade s_1 des Polarsystems konstruieren; da nämlich s den Punkt $\mathfrak{x}$ enthält und gleichzeitig in der Polarebene ξ desselben liegt, so wird s_1, die konjugierte Gerade, in ξ liegen müssen und zugleich durch $\mathfrak{x}$ gehen. Ist also s_1 konstruiert (etwa dadurch, dafs wir von einer beliebigen andern durch s gelegten Ebene den Pol bestimmen und denselben mit $\mathfrak{x}$ verbinden), so wird die Ebene $[ss_1]$ die gesuchte Polarebene ξ sein. Bezeichnen wir unter Abänderung der bisherigen Bezeichnung ein solches besonderes Paar von Pol und Polarebene $\mathfrak{x}$ und ξ, die incident sind, durch

$$\mathfrak{t} \text{ und } \tau,$$

so ist es leicht zu sehen, dafs nicht nur $\mathfrak{t}$ ein Punkt der Fläche $F^{(2)}$, sondern auch τ die Berührungsebene in demselben sein mufs. Denn, da die konjugierten Strahlen s und s_1, welche sich in $\mathfrak{t}$ treffen und zugleich in der Ebene τ liegen, die Eigenschaft besitzen, dafs die Polarebenen von den Punkten der Geraden s durch die konjugierte Gerade s_1

laufen und umgekehrt, so müssen die beiden Punktinvolutionen auf s und s_1 parabolischer Natur sein (Th. d. K. S. 51), d. h. ihre Doppelelemente zusammenfallend haben in dem Punkte $\mathfrak{t}$, oder, was dasselbe sagt, es kann auf den Geraden s und s_1 kein weiterer Punkt als $\mathfrak{t}$ vorkommen, dessen Polarebene durch ihn selbst geht. Ein Gleiches gilt für ein beliebiges anderes Paar konjugierter Strahlen der Art, wie s und s_1. Ziehen wir durch $\mathfrak{t}$ in der Ebene τ einen beliebigen andern Strahl s', so mufs auch sein konjugierter Strahl s_1' in τ liegen und durch $\mathfrak{t}$ gehen, und wir erhalten auf diese Art unendlich-viele Strahlenpaare $s s_1$, die eine Strahleninvolution bilden, wie aus der Natur des Polarsystems folgt. Diese Strahleninvolution ist entweder hyperbolisch oder elliptisch; im ersten Falle giebt es zwei Doppelstrahlen, d. h. zusammenfallende konjugierte Strahlen, die offenbar ganz der $F^{(2)}$ angehören, weil alle ihre Punkte mit den zugehörigen Polarebenen incident sind; im zweiten Falle giebt es aufser dem Punkte $\mathfrak{t}$ keinen weiteren Punkt in der Ebene τ. Hieraus sehen wir (S. 482), dafs τ die Berührungsebene der Fläche $F^{(2)}$ im Punkte $\mathfrak{t}$ ist, und haben demgemäfs folgendes Resultat:

Wenn in dem oben konstruierten räumlichen Polarsystem ein Punkt $\mathfrak{t}$ in seiner Polarebene τ liegt, so ist $\mathfrak{t}$ ein dem Erzeugnisse der gegebenen reziproken Bündel, d. h. der Fläche $F^{(2)}$ angehöriger Punkt, und τ die Berührungsebene der $F^{(2)}$ in diesem Punkte. Die Doppelpunkte sämtlicher in dem Polarsystem auftretenden Punktinvolutionen liegen auf $F^{(2)}$; die Doppelebenen sämtlicher im Polarsystem auftretenden Ebeneninvolutionen berühren $F^{(2)}$. Wenn sich irgend zwei konjugierte Gerade $s s_1$ des räumlichen Polarsystems im Raume begegnen, so ist ihr Treffpunkt ein Punkt der $F^{(2)}$, und die durch sie gehende Ebene die Berührungsebene der $F^{(2)}$ in diesem Punkte. Wenn zwei konjugierte Gerade zusammenfallen, so gehören alle ihre Punkte der $F^{(2)}$ an, und alle Ebenen durch dieselbe sind Berührungsebenen; die $F^{(2)}$ ist dann ein einfaches Hyperboloid.

Hinsichtlich der weiteren Untersuchung des räumlichen Polarsystems können wir jetzt auf die §§ 21—24 verweisen, wo die allgemeinsten Eigenschaften desselben bereits ermittelt sind.

§ 57. Einteilung der Flächen 2. O.

Für die Einteilung der Flächen 2. O. werden zwei verschiedene Einteilungsprinzipien gebraucht, nämlich einmal nach der Beschaffenheit der Berührungsebenen (S. 479 u. 481), die bei einer Fläche $F^{(2)}$ immer denselben Charakter haben, d. h. entweder sämtlich hyperbolisch oder sämtlich parabolisch oder endlich sämtlich elliptisch sind; innerhalb jeder dieser drei Hauptklassen tritt dann aber das Verhalten der unendlich-entfernten Elemente der $F^{(2)}$ als zweites Einteilungsprinzip hinzu.

I. Eine Fläche 2. O., deren Berührungsebenen sämtlich **hyperbolisch** sind, oder welche in jeder ihrer Berührungsebenen ein reelles Linienpaar enthält, heifst eine **geradlinige Fläche 2. O.** oder ein **einfaches Hyperboloid** (§ 14), sie enthält unendlich-viele gerade Linien, welche sich in **zwei Regelschaaren** (l_x und g_x) ordnen, von denen jede Gerade der einen Regelschar jede der andern trifft, aber keine zwei derselben Regelschar sich begegnen; die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ schneidet dieselbe immer in einem reellen Kegelschnitt $\varepsilon_\infty^{(2)}$, welcher von dem Mittelpunkte $\mathfrak{M}$, dem Pol der ε_∞, durch einen Kegel 2. O, den Asymptotenkegel (§ 15) projiziert wird. Die drei Hauptebenen des Asymptotenkegels $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind die drei Hauptebenen des Hyperboloids und, wie jene den Asymptotenkegel in zwei reellen und einem imaginären Linienpaar schneiden, so enthalten sie als die drei Hauptschnitte des Hyperboloids zwei Hyperbeln und eine Ellipse (S. 104):

$$\mathfrak{H}_{ab}^{(2)} \quad \mathfrak{H}_{ac}^{(2)} \quad \mathfrak{E}_{bc}^{(2)}.$$

Enthält insbesondere die Ebene ε_∞ selbst ihren Pol $\mathfrak{M}$, so degeneriert das Hyperboloid in ein **hyperbolisches Paraboloid** (§ 29). Die Ebene ε_∞ ist selbst eine Berührungsebene, der Kegelschnitt $\varepsilon_\infty^{(2)}$ zerfällt in ein reelles Linienpaar (l^∞ und g^∞). Von den drei Hauptebenen wird eine ε_∞, die beiden andern enthalten zwei Parabeln:

$$\mathfrak{P}^{(2)}_{ab^\infty} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}^{(2)}_{ca^\infty},$$

deren Ebenen sich in der c-Axe, die im Endlichen liegt, schneiden, während a^∞ und b^∞ in ε_∞ die Winkel des Linienpaares $l^\infty g^\infty$ halbieren. Für jede der beiden Parabeln ist die c-Axe Hauptaxe, und ihre Öffnungen sind nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

II. Eine Fläche 2. O., deren Berührungsebenen sämtlich parabolisch sind, oder welche in jeder ihrer Berührungsebenen ein zusammenfallendes Linienpaar enthält, d. h. nur eine gerade Linie, heifst ein Kegel 2. O. Sie ist ebenfalls eine geradlinige Fläche, enthält aber nur eine einfache Schar von unendlich vielen geraden Linien, welche sämtlich durch einen festen Punkt $\mathfrak{M}$ (Spitze) laufen; durch denselben laufen auch sämtliche Berührungsebenen des Kegels. Dieser Punkt $\mathfrak{M}$ ist der Pol der Ebene ε_∞ oder der Mittelpunkt des Kegels, der hier auf der Fläche selbst liegt. Die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ schneidet den Kegel immer in einem reellen Kegelschnitt $\varepsilon^{(2)}_\infty$. Von den drei Hauptebenen des Kegels schneiden zwei denselben in reellen Linienpaaren, die dritte in einem imaginären Linienpaare (S. 48).

Das räumliche Polarsystem, dessen Kernfläche der Kegel $\mathfrak{M}^{(2)}$ ist, nimmt einen besonderen (parabolischen) Charakter an. Für jede beliebige Ebene, die nicht durch $\mathfrak{M}$ selbst geht, ist der Pol immer ein und derselbe feste Punkt $\mathfrak{M}$. Für jede Ebene aber, die durch $\mathfrak{M}$ geht, wird der Pol unbestimmt und kann beliebig auf der Geraden angenommen werden, welche der Polarstrahl der Ebene in Bezug auf den Kegel ist; das räumliche Polarsystem löst sich also in das einfachere Gebilde des Polarbündels auf (§ 7), ebenso wie in der Ebene ein Polarsystem, dessen Kernkegelschnitt ein Linienpaar ist, sich in eine Strahleninvolution auflöst. Die Ebene ε_∞ hat also hier, wenn sie nicht selbst durch $\mathfrak{M}$ geht, keinen besonderen Vorzug vor jeder anderen Ebene des Raumes. Liegt aber insbesondere der Punkt $\mathfrak{M}$ selbst in der Ebene ε_∞, dann degeneriert der Kegel in einen Cylinder. Der Mittelpunkt als Pol der unendlich-entfernten Ebene ε_∞ wird unbestimmt oder vielmehr auf eine gewisse Gerade (Cylinderaxe) beschränkt, den Polarstrahl der Ebene

ε_∞. Diese selbst ist nicht mehr als Berührungsebene anzusehen, obwohl sie in einem Linienpaare, dem zerfallenden Kegelschnitt $\varepsilon_\infty^{(2)}$, schneidet; dieses Linienpaar selbst kann ein reelles, zusammenfallendes oder imaginäres sein, und der Cylinder wird demgemäfs ein hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer sein.

Bei Kegel und Cylinder sind es nicht die Berührungsebenen allein, welche die $F^{(2)}$ in Linienpaaren schneiden, sondern alle Ebenen eines Bündels, welche durch einen singulären Punkt ($\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{M}_\infty$) der Fläche gehen. Der Cylinder kann noch weiter zerfallen in zwei Ebenen (spezieller Fall des hyperbolischen Cylinders), oder in eine Doppelebene (spezieller Fall des parabolischen Cylinders). In diesen Fällen schneiden sämtliche Ebenen des Raumes die $F^{(2)}$ in reellen oder zusammenfallenden Linienpaaren. Dies tritt ein, sobald es aufser den durch $\mathfrak{M}$ gehenden Ebenen noch irgend eine andere Ebene im Raume giebt, welche $F^{(2)}$ in einem Linienpaare schneidet.

III. Eine Fläche 2. O., deren Berührungsebenen sämtlich elliptisch sind, enthält keine geraden Linien; vielmehr schneiden die Berührungsebenen in imaginären Linienpaaren mit reellem Doppelpunkt (Berührungspunkt) die $F^{(2)}$, und die elliptischen Strahleninvolutionen, welche die imaginären Linienpaare vertreten, sind von uns reell konstruiert worden. (S. 506.)

Die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ kann die elliptische Fläche $F^{(2)}$ in einem reellen Kegelschnitt $\varepsilon_\infty^{(2)}$ oder in einem zerfallenden Kegelschnitt, der aber notwendig ein imaginäres Linienpaar sein mufs, oder in einem imaginären Kegelschnitt schneiden, welcher durch ein reelles (elliptisches) ebenes Polarsystem vertreten wird. Wir erhalten also in dieser Klasse von Flächen drei wesentlich verschiedene Gattungen:

1) Die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ schneidet die Fläche $F^{(2)}$ in einem reellen Kegelschnitt $\varepsilon_\infty^{(2)}$. Der Pol $\mathfrak{M}$ derselben, welcher der Mittelpunkt der Fläche genannt wird, kann nicht in ε_∞ selbst liegen, denn sonst müfste der Kegelschnitt $\varepsilon_\infty^{(2)}$ in ein imaginäres Linienpaar zerfallen, was erst im zweiten Falle stattfindet. Der Mittelpunkt der Fläche liegt also im Endlichen. Er ist der Mittelpunkt eines Polarbündels hyper-

bolischen Charakters oder eines Kegels (Asymptotenkegels), welcher mit dem Kegelschnitt $\varepsilon_\infty^{(2)}$ perspektivisch liegt, wie aus der Natur des räumlichen Polarsystems bekannt ist. Der Asymptotenkegel $\mathfrak{M}^{(2)}$ hat drei zu einander rechtwinklige Hauptebenen, welche zugleich die Hauptebenen der Fläche $F^{(2)}$ sind. Zwei derselben schneiden den Asymptotenkegel in reellen Linienpaaren, die dritte in einem imaginären Linienpaare; von den drei Kegelschnitten in den Hauptebenen müssen also zwei Hyperbeln sein, der dritte könnte entweder eine Ellipse oder ein imaginärer Kegelschnitt sein; der erstere Fall, welcher beim einfachen Hyperboloid auftritt, kann hier nicht eintreten; denn nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{t}$ unserer Fläche und seine Berührungsebene τ (Polarebene), welche die $F^{(2)}$ in einem imaginären Linienpaare schneiden mufs, so wird die Schnittlinie von τ und ε_∞ der Träger einer elliptischen Punktinvolution sein müssen; wird diese mit $\mathfrak{M}$ durch eine Ebene ε verbunden (oder durch $\mathfrak{M}$ eine Parallelebene zu τ gelegt), so wird ε auch den Asymptotenkegel $\mathfrak{M}^{(2)}$ in einem imaginären Linienpaare schneiden müssen, oder was dasselbe sagt, in den äufseren Raum des Asymptotenkegels hineinfallen; in dem Polarbündel $\mathfrak{M}$ wird also der Polarstrahl zur Ebene ε notwendig in den inneren Raum des Asymptotenkegels hineinfallen; dieser Polarstrahl, der konjugierte Strahl zu $|\tau\,\varepsilon_\infty|$ geht aber notwendig durch $\mathfrak{t}$, den Berührungspunkt, also *alle Punkte* $\mathfrak{t}$ *unserer* $F^{(2)}$ *liegen in dem inneren Raume des Asymptotenkegels* $\mathfrak{M}^{(2)}$. Dasselbe Räsonnement zeigt, dafs beim einfachen Hyperboloid (bei dem jede Berührungsebene in einem reellen Linienpaare schneidet) alle Punkte desselben in dem äufseren Kegelraume des Asymptotenkegels $\mathfrak{M}^{(2)}$ liegen. Während also bei diesem die Punkte aufserhalb des Asymptotenkegels ein zusammenhängendes Flächengebiet erfüllen, werden bei unserer Fläche in dem inneren Raume des Asymptotenkegels zwei getrennte Flächengebiete (Schalen) von den Punkten der $F^{(2)}$ erfüllt werden, die im Unendlichen durch den Kegelschnitt $\varepsilon_\infty^{(2)}$ zusammenhängen. Wir nennen daher unsere Fläche ein *zweischaliges Hyperboloid*. Von den drei Hauptaxen, den Schnittlinien der drei Hauptebenen des Asymptotenkegels, mufs daher die eine in den inneren Kegel-

raum hineinfallen und das Hyperboloid in zwei reellen Punkten schneiden; die beiden andern fallen in den äufseren Kegelraum und sind daher die Träger elliptischer Punktinvolutionen in dem räumlichen Polarsystem, dessen Kernfläche das zweischalige Hyperboloid ist. Die drei Kegelschnitte in den Hauptebenen oder die drei Hauptschnitte des zweischaligen Hyperboloids sind also:

$$\mathfrak{H}_{ab}^{(2)} \quad \mathfrak{H}_{ac}^{(2)} \quad \mathfrak{J}_{bc}^{(2)},$$

zwei Hyperbeln und ein imaginärer Kegelschnitt (vertreten durch ein elliptisches ebenes Polarsystem); der Unterschied zwischen dem zweischaligen und dem einschaligen Hyperboloid hinsichtlich der Hauptaxen läfst sich also so aussprechen, dafs bei ersterem die a-Axe reell, die b-Axe und c-Axe imaginär, bei letzterem die a-Axe imaginär, die b-Axe und c-Axe reell sind.

Ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid, welche denselben Asymptotenkegel haben, stehen in ähnlichem Zusammenhange mit einander, wie zwei konjugierte Hyperbeln mit denselben beiden Asymptoten. Durch diejenige Hauptaxe (a-Axe) des Asymptotenkegels, welche in den inneren Kegelraum hineinfällt, gehen nämlich zwei zu einander rechtwinklige Ebenen (die $[ab]$-Ebene und die $[ac]$-Ebene); jede dieser beiden Hauptebenen schneidet den Asymptotenkegel in einem reellen Linienpaar; für das eine derselben als Asymptoten konstruieren wir zwei konjugierte Hyperbeln, deren eine also die reelle a-Axe und die imaginäre b-Axe, die andere die reelle b-Axe und die imaginäre a-Axe hat; für das andere Linienpaar (in der $[ac]$-Ebene) als Asymptoten konstruieren wir uns ebenfalls zwei konjugierte Hyperbeln, deren eine die reelle a-Axe und die imaginäre c-Axe, die andere die reelle c-Axe und die imaginäre a-Axe hat. Dann bestimmen die beiden Hyperbeln mit der reellen a-Axe das zweischalige, die beiden Hyperbeln mit der imaginären a-Axe das einschalige Hyperboloid, die in einem ganz ähnlichen Zusammenhange mit einander stehen, wie zwei konjugierte Hyperbeln mit denselben Asymptoten in der Ebene (denn nach § 21 ist das räumliche Polarsystem bestimmt durch zwei konjugierte Ebenen mit den ihnen zugehörigen ebenen Polarsystemen). Solche zwei

Hyperboloide können als „konjugierte Hyperboloide“ bezeichnet werden.

Wir können, um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, hier nicht näher eingehen auf den Zusammenhang zweier solchen Hyperboloide, worauf wir später zurückkommen, und bemerken nur noch, dafs bei dem zweischaligen Hyperboloid jede Berührungsebene τ in einem Punkte t den Asymptotenkegel $\mathfrak{M}^{(2)}$ in einer Ellipse schneiden mufs, deren Mittelpunkt t ist; denn, da $\mathfrak{M}$ und ε^{∞}, t und τ Pole und Polarebenen des räumlichen Polarsystems sind, so ist $|\mathfrak{M}t| = d$ der konjugierte Strahl zu $|\varepsilon^{\infty}\tau| = d_1^{\infty}$. Das Polarbündel, welches dem Punkte $\mathfrak{M}$ im räumlichen Polarsystem zugehört, ist aber identisch mit demjenigen, dessen Kernfläche der Asymptotenkegel ist; für dieses sind d und $[\mathfrak{M}d_1^{\infty}]$ Polarstrahl und Polarebene, folglich schneidet der Asymptotenkegel die Ebene τ, welche durch d_1^{∞} geht, in einem Kegelschnitt, für welchen t und d_1^{∞} Pol und Polare sind, also t der Mittelpunkt ist. Dafs dieser Kegelschnitt Ellipse sein mufs, folgt daraus, dafs d_1^{∞} der Träger einer elliptischen Punktinvolution im räumlichen Polarsystem ist. Weitere Eigenschaften, die denen der ebenen Hyperbel durchaus analog sind, werden wir später kennen lernen. (S. 529.)

2) Die unendlich-entfernte Ebene ε_{∞} schneidet die $F^{(2)}$ in einem zerfallenden Kegelschnitt $\varepsilon_{\infty}^{(2)}$, welcher aus einem imaginären Linienpaar besteht, von dem nur der reelle Doppelpunkt $\mathfrak{P}^{\infty}$ in der Ebene ε_{∞} liegt. In diesem Falle mufs die unendlich-entfernte Ebene ε_{∞} selbst eine Berührungsebene $F^{(2)}$ sein, weil sie dieselbe in einem imaginären Linienpaar schneidet, und $\mathfrak{P}^{\infty}$ ist ihr Berührungspunkt. Diese Oberfläche heifst ein Paraboloid, weil die unendlich-entfernte Ebene ε_{∞} eine Berührungsebene derselben ist, und zwar ein elliptisches Paraboloid, weil diese Berührungsebene, also auch sämtliche übrigen elliptischer Art sind, während für das hyperbolische Paraboloid (§ 29), welches ebenfalls ε_{∞} zur Berührungsebene hat, sämtliche Berührungsebenen hyperbolischer Art sind.

Da das elliptische Paraboloid überhaupt nur den einzigen reellen unendlich-entfernten Punkt $\mathfrak{P}^{\infty}$ hat, so werden

sämtliche ebenen Schnitte durch dasselbe Ellipsen sein, mit Ausnahme derjenigen, welche durch $\mathfrak{P}^\infty$ gehen; diese werden Parabeln sein, weil ε_∞ Berührungsebene ist, und Hyperbeln lassen sich niemals aus dem elliptischen Paraboloid schneiden, ebensowenig, wie sich Ellipsen aus dem hyperbolischen Paraboloid schneiden lassen.

Durch den Punkt $\mathfrak{P}^\infty$ ist eine bestimmte Richtung im Raume gegeben und durch diese eine einzige bestimmte Stellung, welche rechtwinklig zu ihr ist, d. h. wenn wir beliebig viele parallele Strahlen nach $\mathfrak{P}^\infty$ ziehen und zu ihnen rechtwinklige Ebenen stellen, so laufen dieselben sämtlich durch eine feste Gerade c_1^∞ der unendlich-entfernten Ebene. Durch diese feste Gerade c_1^∞ geht nun eine reelle Berührungsebene ε_∞ des elliptischen Paraboloids, folglich notwendig noch eine zweite reelle Berührungsebene τ_0, die in einem endlichen Punkte $\mathfrak{S}$ das elliptische Paraboloid berührt. Dieser ausgezeichnete Punkt $\mathfrak{S}$ heifst der Scheitel des Paraboloids und seine Berührungsebene τ die Berührungsebene im Scheitel. Die Verbindungslinie $|\mathfrak{S}\mathfrak{P}^\infty| = c$ ist die konjugierte Gerade zu c_1^∞ im räumlichen Polarsystem, dessen Kernfläche das elliptische Paraboloid ist. Die Gerade c heifst die Axe des elliptischen Paraboloids. Zu ihr treten als die beiden andern Hauptaxen des Paraboloids a^∞ und b^∞, welche in ε_∞ liegen, die Axen der elliptischen Strahleninvolution, welche das imaginäre Linienpaar in ε_∞ vertritt. $\mathfrak{P}^\infty$ ist als der Mittelpunkt des elliptischen Paraboloids aufzufassen, in welchem sich die drei Hauptaxen $a^\infty\, b^\infty\, c$ schneiden. Da die elliptische Strahleninvolution in ε_∞, deren Mittelpunkt $\mathfrak{P}^\infty$ ist, und die mit der elliptischen Punktinvolution, welche c_1^∞ zugehört, perspektivisch liegt, als durch die Fläche $F^{(2)}$ gegeben zu betrachten ist, so sind auch ihre zu einander rechtwinkligen Axen a^∞ und b^∞ bekannt; von den drei Hauptebenen des Paraboloids ist eine ε_∞, die beiden andern die Ebenen $[ca^\infty]$ und $[cb^\infty]$, welche in zwei Parabeln:

$$\mathfrak{P}^{(2)}_{ca^\infty} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}^{(2)}_{cb^\infty}$$

das elliptische Paraboloid schneiden. Diese beiden Hauptschnitte, welche sich in der c-Axe $|\mathfrak{S}\mathfrak{P}^\infty|$ schneiden, haben

gleichzeitig c zu Parabelaxen; aber die Öffnungen beider Parabeln liegen nach derselben Richtung hin, während sie beim hyperbolischen Paraboloid nach entgegengesetzten Richtungen lagen. Dies ist ein charakteristischer Unterschied beider Paraboloide.

In der That, denken wir uns durch die Gerade c_1^∞, in welcher die Berührungsebene τ im Scheitel die Ebene ε_∞ schneidet, ein Parallelebenenbüschel gelegt, so mufs jede Ebene desselben das elliptische Paraboloid entweder in einer reellen Ellipse oder in einem imaginären Kegelschnitt schneiden, und der Durchschnittspunkt mit der c-Axe ist Mittelpunkt, die Schnittlinien mit den Ebenen $[ca^\infty]$ und $[cb^\infty]$ sind die Hauptaxen für den Durchschnittskegelschnitt. Schneidet daher eine solche durch c_1^∞ gelegte Ebene die eine Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ca^\infty}$ in reellen Punkten, so mufs sie auch die andere Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{cb^\infty}$ in reellen Punkten schneiden, weil eine Ellipse immer zwei reelle Hauptaxen hat; im andern Falle wird eine solche Ebene keine der beiden Parabeln $\mathfrak{P}^{(2)}_{cb^\infty}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}_{ca^\infty}$ treffen können. Die Parabeln haben daher ihre Öffnungen nach derselben Richtung der c-Axe hin. Daraus folgt, dafs die Berührungsebene τ im Scheitel des elliptischen Paraboloids den ganzen unendlichen Raum in zwei Halbräume teilt, von denen der eine alle Punkte des Paraboloids enthält, der andere keinen Punkt desselben. In gleicher Weise erkennen wir, dafs für das hyperbolische Paraboloid die Parabeln in den beiden Hauptebenen, die sich in der c-Axe schneiden, ihre Öffnungen nach entgegengesetzten Seiten gerichtet haben.

Wir können auch hier, ähnlich wie bei den Hyperboloiden, ein elliptisches und ein hyperbolisches Paraboloid in die Lage zu einander versetzen, dafs ihre Hauptebenen zusammenfallen, sowie ihre Scheitel, aber in einer der beiden Hauptebenen die Parabeln identisch sind, während sie in der andern zwar dieselben Axen haben und gleich sind, ihre Öffnungen aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind; in der dritten Hauptebene ε_∞ werden dann die Asymptoten der hyperbolischen Strahleninvolution beim hyperbolischen Paraboloid koinzidieren mit den Potenzstrahlen der elliptischen Strahleninvolution beim elliptischen Paraboloid.

und solche zwei Paraboloide können „konjugiert“ genannt werden. Sind beide Parabeln einander gleich, so wird das elliptische Paraboloid ein Rotationsparaboloid, das hyperbolische ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid (S. 218).

3) Die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ schneidet die $F^{(2)}$ in einem imaginären Kegelschnitte $\varepsilon_\infty^{(2)}$. In diesem Falle wird die $F^{(2)}$ von jeder beliebigen Ebene ε in einer Ellipse geschnitten, weil die Schnittlinie $|\varepsilon, \varepsilon_\infty|$ keine reellen Punkte der Durchschnittskurve enthalten kann. Die Fläche heifst daher ein Ellipsoid; alle Punkte derselben liegen im Endlichen. Der Pol der unendlich-entfernten Ebene ε_∞, der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Ellipsoids, liegt ebenfalls im Endlichen und ist der Mittelpunkt eines elliptischen Polarbündels (S. 42) mit einem imaginären Kernkegel, welches dem räumlichen Polarsystem zugehört, dessen Kernfläche das Ellipsoid ist. Dies elliptische Polarbündel hat drei zu einander rechtwinklige Hauptebenen, welche das Ellipsoid in drei Ellipsen schneiden:

$$\mathfrak{E}_{ab}^{(2)} \quad \mathfrak{E}_{ac}^{(2)} \quad \mathfrak{E}_{bc}^{(2)};$$

die Durchschnittslinien derselben sind die drei Hauptaxen des Polarbündels und zugleich des Ellipsoids.

Hierdurch sind alle möglichen Annahmen, welche gemacht werden können, erschöpft, und wir haben alle reellen Flächen 2. O., die es überhaupt giebt, aufgezählt. Zu den von früher her uns bekannten geradlinigen Flächen 2. O. sind nur noch drei neue Flächen hinzugetreten: Das zweischalige Hyperboloid, das elliptische Paraboloid und das Ellipsoid.

Definieren wir die Fläche 2. O. als Kernfläche eines räumlichen Polarsystems (S. 166), so kommt zu den bisherigen Gebilden nur noch ein neues hinzu, nämlich die imaginäre Fläche zweiter Ordnung, welche zwar keinen reellen Punkt besitzt, aber vertreten wird von einem durchaus reellen räumlichen Gebilde, dem elliptischen Polarsystem. Dasselbe hat einen im Endlichen liegenden reellen Mittelpunkt $\mathfrak{M}$, den Pol der unendlich-entfernten Ebene ε_∞; $\mathfrak{M}$ ist der Mittelpunkt eines elliptischen Polarbündels, welches drei reelle Hauptaxen und Hauptebenen hat; erstere sind die Träger dreier bestimmten elliptischen Punktinvolutionen im

räumlichen Polarsystem, letztere die Träger dreier elliptischen ebenen Polarsysteme, deren Kernkegelschnitte imaginär sind:

$$\mathfrak{J}_{ab}^{(2)} \quad \mathfrak{J}_{ac}^{(2)} \quad \mathfrak{J}_{bc}^{(2)},$$

und diese heifsen die Hauptschnitte der imaginären Fläche in den drei zu einander rechtwinkligen Hauptebenen.

Die imaginäre Fläche kann in gewisser Weise als „konjugiert" aufgefafst werden zu dem reellen Ellipsoid; man braucht nämlich nur bei letzterem die drei hyperbolischen Punktinvolutionen auf den drei Haupttaxen dadurch in elliptische Punktinvolutionen zu verwandeln, dafs man die Asymptotenpunkte (Doppelpunkte) derselben in Potenzpunkte verwandelt (Th. d. K. S. 60), um zu den Punktinvolutionen auf den Hauptaxen der imaginären Fläche zu gelangen.

Geht man von dem räumlichen Polarsysteme aus, so tritt an Stelle des Haupteinteilungsprinzips, welches bei den reellen Flächen zweiter Ordnung in der Beschaffenheit der Berührungsebenen bestand, ein anderes, nämlich, wie wir früher gesehen haben (S. 160 u. 161) die Beschaffenheit der Punkt- oder Ebeneninvolutionen für irgend zwei konjugierte Strahlen ss_1 des räumlichen Polarsystems oder, wenn man will, die Beschaffenheit irgend eines Polartetraëders; beide Gebilde besitzen in einem und demselben Polarsystem einen unveränderlichen Charakter und liefern die Unterscheidung zwischen geradlinigen und nicht-geradlinigen Flächen 2. O.; letztere werden alsdann nach den unendlich-entfernten Elementen einzuteilen sein. Artet das räumliche Polarsystem in ein einfaches Polarbündel aus, so erscheint als dessen Kernfläche der reelle oder imaginäre Kegel.

Wir machen schliefslich noch auf gewisse Grenzübergänge aufmerksam, welche von einer Gattung von Flächen 2. O. zu einer andern Gattung überführen, ebenso wie in der Ebene der Übergang von Ellipse zu Hyperbel durch ein Punktepaar vermittelt wird. (Eine gerade Linie, in der zwei Punkte gegeben sind, kann als unendlich-schmale Ellipse aufgefafst werden, wenn man die Strecke zwischen den beiden Punkten betrachtet und als unendlich-schmale Hyperbel, wenn man die beiden unendlich-langen Stücke aufserhalb der Strecke betrachtet; eine Erweiterung des einen oder des

andern Liniengebiets zu einem Flächengebiet führt entweder zur Ellipse oder zur Hyperbel; das Punktepaar bildet also den Übergang von der einen zur andern. Liegt einer der beiden Punkte im Unendlichen, so ist die halbe unendlichlange Gerade die Grenze einer Parabel.) In ähnlicher Weise vermittelt eine ebene Hyperbel den Übergang vom einschaligen zum zweischaligen Hyperboloid, eine ebene Parabel den Übergang vom elliptischen zum hyperbolischen Paraboloid und eine ebene Ellipse den Übergang vom einschaligen Hyperboloid zum Ellipsoid.

Ein Hyperbel teilt nämlich das ganze Gebiet ihrer Ebene in zwei Räume, welche wir als inneren und äusseren Raum unterschieden haben; dieser wird von sämtlichen Tangenten der Hyperbel erfüllt, jener von keiner getroffen. Der äufsere Raum kann nun aufgefafst werden als ein unendlich-abgeplattetes einschaliges Hyperboloid, der innere Hyperbelraum als ein unendlich-abgeplattetes zweischaliges Hyperboloid, und die ebene Hyperbel bildet in diesem Sinne, indem sie beide Gebilde in sich vereinigt, den Übergang von dem einen zum andern Hyperboloid. Umgekehrt gelangen wir auch, indem wir uns den äufseren oder den inneren Raum der ebenen Hyperbel nach einer dritten Dimension erweitert denken, zu dem einschaligen oder zu dem zweischaligen Hyperboloid. In gleicher Weise teilt die Parabel das ganze Gebiet ihrer Ebene in zwei Räume, welche als äufserer und innerer Raum derselben unterschieden werden, indem jener von sämtlichen Tangenten der Parabel erfüllt, dieser von keiner getroffen wird. Der äufsere Raum kann aufgefafst werden als ein unendlich-abgeplattetes hyperbolisches Paraboloid, der innere Parabelraum als ein unendlich-abgeplattetes elliptisches Paraboloid, und die ebene Parabel bildet in diesem Sinne, indem sie beide Gebilde in sich vereinigt, den Übergang von dem einen zum andern Paraboloid. Umgekehrt gelangen wir auch, indem wir uns den äufseren oder den inneren Raum einer ebenen Parabel nach einer dritten Dimension erweitert denken, zu dem hyperbolischen oder zu dem elliptischen Paraboloid.

Endlich teilt eine ebene Ellipse das ganze Gebiet ihrer

Ebene in zwei Räume, einen endlichen, den inneren Raum, und einen unendlich-grofsen, den äufseren Raum. Der letztere kann aufgefafst werden als ein unendlich-abgeplattetes einschaliges Hyperboloid, der erstere als ein unendlich-abgeplattetes Ellipsoid, und die ebene Ellipse bildet in diesem Sinne, indem sie beide Gebilde in sich vereinigt, den Übergang von dem einschaligen Hyperboloid zum Ellipsoid. Umgekehrt gelangen wir auch, indem wir uns den inneren oder den äufseren Raum einer Ellipse nach einer dritten Dimension erweitert denken, einmal zum Ellipsoid und das andere Mal zum einschaligen Hyperboloid.

Wir haben hier dreimal den Übergang von einer geradlinigen zu einer nicht-geradlinigen Fläche 2. O. In dem Grenzübergange reduzieren sich die Regelscharen der geradlinigen Fläche auf die Tangenten eines Kegelschnitts, während die nicht-geradlinige Fläche 2. O. sich auf das Gebiet innerhalb des Kegelschnitts reduziert, welches von keiner Tangente getroffen wird.

Für die drei nicht-geradlinigen Flächen findet noch ein Übergang statt vom zweischaligen Hyperboloid durch das elliptische Paraboloid zum Ellipsoid, analog dem Übergange von der Hyperbel durch die Parabel zur Ellipse; indem nämlich der Kegelschnitt in der unendlich-entfernten Ebene ε_∞ kontinuierlich aus einem reellen Kegelschnitt durch einen Nullkegelschnitt (imaginäres Linienpaar) in einen imaginären Kegelschnitt übergeht, vollzieht sich jener Übergang der drei Flächen 2. O. in einander. Ein anderer Übergang vom einschaligen zum zweischaligen Hyperboloid findet statt durch den Kegel, ebenso wie ein zusammenfallendes Linienpaar (Doppellinie) den Übergang von einem reellen Linienpaar zu einem imaginären Linienpaar bildet. Dieser Übergang veranschaulicht sich am besten, wenn wir uns ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid denken, welche denselben Asymptotenkegel haben; während das einschalige Hyperboloid in dem Raume aufserhalb des Kegels, das zweischalige in dem Raume innerhalb des Kegels liegt, kann man durch allmähliche Änderung beide in den Grenzfall des Kegels überführen; dieser enthält die zusammenfallenden Linienpaare (Kegelstrahlen), das einschalige Hyperboloid die Erzeugenden

der beiden Regelscharen, das zweischalige Hyperboloid durch jeden seiner Punkte in der Berührungsebene ein imaginäres Linienpaar.

§ 58. Die Mittelpunktsflächen 2. O. Metrische Beziehungen zwischen den konjugierten Durchmessern derselben.

Nach dem Vorigen giebt es unter den allgemeinen Oberflächen 2. O. (mit Ausschlufs der Kegelfläche) vier, welche ihren Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ im Endlichen liegen haben, nämlich das einschalige Hyperboloid, das zweischalige Hyperboloid, das Ellipsoid und die imaginäre Fläche, d. h. für diese vier Flächen liegt der Pol $\mathfrak{M}$ der unendlich-entfernten Ebene ε_∞ nicht im Unendlichen, ist also ein Punkt $\mathfrak{M}$ im Endlichen, der die Eigenschaft besitzt, dafs alle durch ihn gezogenen Strahlen (Durchmesser) Träger von Punktinvolutionen sind, die $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunkt haben; je nachdem diese Punktinvolutionen elliptisch oder hyperbolisch sind, wird ein solcher Durchmesser d keinen Punkt der Fläche enthalten oder zwei reelle Punkte, die von $\mathfrak{M}$ gleich weit abstehen. Um beide Fälle zu umfassen, wollen wir die Potenz der zugehörigen Punktinvolutionen einführen:

$$P_d,$$

welche positiv ist für die hyperbolische, negativ für die elliptische Punktinvolution und immer gleich dem Rechteck aus den Abständen zweier konjugierten Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ der Punktinvolution vom Mittelpunkt $\mathfrak{M}$:

$$P_d = \mathfrak{M}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{x}'.$$

Zwischen diesen Durchmessern durch $\mathfrak{M}$ bestehen nun gewisse metrische Beziehungen, die für alle vier oben genannten Flächen in gleicher Weise abgeleitet werden können.

$\mathfrak{M}$ ist der Mittelpunkt eines Polarbündels, welches ihm im räumlichen Polarsystem, dessen Kernfläche $F^{(2)}$ ist, zugehört. Ziehen wir durch $\mathfrak{M}$ einen beliebigen Strahl A, so gehört zu demselben, als Polarstrahl, eine bestimmte Polarebene α im Polarbündel $\mathfrak{M}^{(2)}$; ziehen wir in der Ebene α einen zweiten beliebigen Strahl B durch $\mathfrak{M}$, so wird der Ebene $[AB]$ ein bestimmter Strahl C als Polarstrahl zugehören, der sowohl in der Ebene α, der Polarebene des

Strahles A, als auch in der Ebene β, der Polarebene des Strahles B liegen mufs, also der Schnittstrahl $|\alpha\beta| = C$ ist. Die drei Strahlen A B C bilden ein Polardreikant im Polarbündel, indem jeder von ihnen der Polarstrahl für die gegenüberliegende Ebene ist (S. 38). In Bezug auf unsere Fläche $F^{(2)}$ heifsen die drei Kanten eines solchen Polardreikants im Polarbündel $\mathfrak{M}^{(2)}$ drei konjugierte Durchmesser A B C derselben, und die Potenzen der ihnen zugehörigen Punktinvolutionen sollen bezeichnet werden durch:

$$P_A \quad P_B \quad P_C.$$

Solche konjugierte Durchmessersysteme können, wie wir sehen, in grofser Mannigfaltigkeit hergestellt werden, indem ein Durchmesser A willkürlich durch $\mathfrak{M}$ gezogen werden kann, der andere B in der Ebene α liegen mufs, aber beliebig durch $\mathfrak{M}$ angenommen werden darf, und der dritte C dann vollständig bestimmt ist. Ein ausgezeichnetes Polardreikant bilden die Hauptaxen der $F^{(2)}$ (§ 57), welche wir mit a b c und deren zugehörige Potenzwerte wir mit

$$P_a \quad P_b \quad P_c$$

bezeichnen; dieses Polardreikant ist das einzige, welches aus drei zu einander rechtwinkligen Strahlen besteht. Die drei Seitenflächen eines Polardreikants schneiden die $F^{(2)}$ in Kegelschnitten, für welche die beiden Kanten, welche die Seitenfläche enthält, ein Paar konjugierter Durchmesser sind.

Fassen wir zunächst die $[AB]$-Ebene auf mit den beiden konjugierten Durchmessern A B und dem in ihr enthaltenen Kegelschnitte $\gamma^{(2)}$, so werden die Potenzwerte P_A und P_B durch je ein Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}'$ auf A und $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{b}'$ auf B vollständig bestimmt, nämlich:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{a} \, . \, \mathfrak{M}\mathfrak{a}' = P_A; \quad \mathfrak{M}\mathfrak{b} \, . \, \mathfrak{M}\mathfrak{b}' = P_B$$

(Fig. 23), wobei die Paare $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{b}'$ beliebig aus den Punktinvolutionen gewählt werden können. Ziehen wir durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Parallele zu B und A, die sich in $\mathfrak{d}$ treffen, so ist $|\mathfrak{M}\mathfrak{d}| = D$ ein beliebiger dritter Durchmesser; die Richtung des zu D konjugierten Durchmessers E ist offenbar parallel der Verbindungslinie $|\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'|$, der Polare von $\mathfrak{d}$; schneidet also D die Gerade $|\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'|$ in $\mathfrak{d}'$, so ist

$$\mathfrak{M}\mathfrak{d} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{d}' = P_D$$

die Potenz der Punktinvolution, welche den Durchmesser D zugehört.

Denken wir uns nun das Dreieck $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$. in welchem

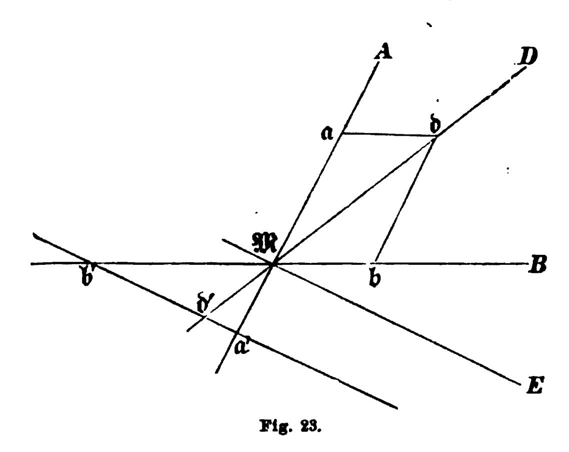


Fig. 23.

$\mathfrak{a}\mathfrak{d} = \mathfrak{M}\mathfrak{b}$ ist, auf eine zu E rechtwinklige Gerade projiziert, so erhalten wir bekanntlich:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{a} \,.\, \sin(A, E) + \mathfrak{M}\mathfrak{b} \,.\, \sin(B, E) = \mathfrak{M}\mathfrak{d} \,.\, \sin(D, E)$$

und andererseits ist:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{a}' \,.\, \sin(A, E) = \mathfrak{M}\mathfrak{b}' \,.\, \sin(B, E) = \mathfrak{M}\mathfrak{d}' \,.\, \sin(D, E),$$

woraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}'} + \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{b}}{\mathfrak{M}\mathfrak{b}'} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{d}}{\mathfrak{M}\mathfrak{d}'} \,.$$

Aus dieser elementaren Beziehung ergiebt sich ein doppeltes Resultat:

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}^2}{P_A} + \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{b}^2}{P_B} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{d}^2}{P_D} \quad \text{und} \quad \frac{P_A}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}'^2} + \frac{P_B}{\mathfrak{M}\mathfrak{b}'^2} = \frac{P_D}{\mathfrak{M}\mathfrak{d}'^2},$$

und da

$$\mathfrak{M}\mathfrak{a} : \mathfrak{M}\mathfrak{b} : \mathfrak{M}\mathfrak{d} = \sin(BD) : \sin(AD) : \sin(AB)$$

ist, so erhalten wir die beiden Beziehungen:

$$\text{(I).} \quad \ldots \quad \frac{\sin^2(BD)}{P_A} + \frac{\sin^2(AD)}{P_B} = \frac{\sin^2(AB)}{P_D}$$

$$\text{(II)} \,.\, P_A \,.\, \sin^2(AE) + P_B \,.\, \sin^2(BE) = P_D \,.\, \sin^2(DE) \,.$$

Die Gleichung (I) lehrt den Wert der Potenz P_D für

einen beliebig gegebenen Durchmesser D ermitteln, sobald man die Potenzwerte P_A und P_B kennt. Die Gleichung (II) giebt, wenn wir die konjugierten Durchmesser D und E mit einander vertauschen:

$$P_A \,.\, \sin^2(AD) + P_B \,.\, \sin^2(BD) = P_E \,.\, \sin^2(DE),$$

und, da infolge der Gleichung (I) die linke Seite gleich wird

$$P_A \,.\, P_B \,.\, \frac{\sin^2(AB)}{P_D},$$

so folgt die Beziehung:

$$P_A \,.\, P_B \,.\, \sin^2(AB) = P_D \,.\, P_E \,.\, \sin^2(DE),$$

bei welcher links nur Elemente stehen, welche von dem Paare konjugierter Durchmesser AB, rechts nur Elemente, welche von dem Paare konjugierter Durchmesser DE abhängen; verändern wir also das erstere beliebig, so bleibt die rechte Seite unverändert, also ist

$$(1.)\qquad P_A \,.\, P_B \,.\, \sin^2(AB) = \text{konst.}$$

für alle Paare konjugierter Durchmesser, die man in einer festen Ebene $[AB]$ wählen mag, insbesondere also auch gleich dem Produkte der Potenzen auf den Axen $P_a \,.\, P_b$ für den Kegelschnitt $\gamma^{(2)}$.

Bemerken wir ferner, dafs die Gleichung (II):

$$P_A \,.\, \sin^2(AE) + P_B \,.\, \sin^2(BE) = P_D \,.\, \sin^2(DE)$$

auf der linken Seite von dem Paare konjugierter Durchmesser AB abhängt, die rechte Seite dasselbe aber nicht enthält, so wird, wenn wir E, also auch D festhalten, dagegen das Paar AB beliebig verändern, allemal

$$P_A \,.\, \sin^2(AE) + P_B \,.\, \sin^2(BE) = \text{konst.}$$

sein, d. h. unverändert bleiben, oder wenn wir statt des willkürlich gewählten festen Durchmessers E einen andern zu demselben rechtwinkligen wählen, auch für alle Paare AB:

$$P_A \,.\, \cos^2(AE) + P_B \cos^2(BE) = \text{konst.}$$

sein müssen. Hieraus folgt durch Addition die bekannte Beziehung:

$$(2.)\qquad P_A + P_B = \text{konst.}$$

für alle Paare konjugierter Durchmesser des Kegelschnittes $\gamma^{(2)}$.

Diese Beziehung hat sich aber in zwei andere aufgelöst,

die noch einer Verallgemeinerung fähig sind, von der wir sogleich Gebrauch machen werden. Denken wir uns nämlich durch $\mathfrak{M}$ einen beliebigen Strahl S im Raume gezogen, dessen rechtwinklige Projektion auf die Ebene $[AB]$ der Strahl E sei, so haben wir in dem rechtwinkligen Dreikant AES:

$$\cos(SA) = \cos(EA) \,.\, \cos(ES)$$

(vgl. Fig. 16, S. 382) und in dem rechtwinkligen Dreikant BES

$$\cos(SB) = \cos(EB) \,.\, \cos(ES)\,,$$

folglich ergiebt sich aus der mit $\cos^2(SE)$ multiplizierten Relation

$$P_A \,.\, \cos^2(AE) + P_B \,.\, \cos^2(BE) = \text{konst.}$$

die neue Beziehung:

$$P_A \,.\, \cos^2(SA) + P_B \,.\, \cos^2(SB) = \text{konst.}$$

für alle Paare konjugierter Durchmesser $A\,B$ in der Ebene γ und einen beliebigen festen Strahl S im Raume, der durch $\mathfrak{M}$ gezogen ist. Hieraus folgt aber, da $P_A + P_B =$ konst. ist, auch

$$(3.)\qquad P_A \,.\, \sin^2(SA) + P_B \,.\, \sin^2(SB) = \text{konst.}$$

für alle Paare konjugierter Durchmesser $A\,B$ in der Ebene γ und einen beliebigen festen Strahl S im Raume, der durch $\mathfrak{M}$ gezogen ist.

Gehen wir jetzt zu dem räumlichen Polarbündel $\mathfrak{M}^{(2)}$ über und nehmen drei konjugierte Durchmesser $A\,B\,C$ der $F^{(2)}$; ein beliebiger vierter Durchmesser sei A_1; die in dem Polarbündel zu A_1 konjugierte Ebene α_1 ist dadurch völlig bestimmt; wir können aber in derselben ein Paar konjugierter Durchmesser $B_1\,C_1$ so wählen, dafs B_1 in der Ebene $[A_1C]$ liegt, dann ist C_1 völlig bestimmt.

Da nun $A_1\,B_1\,C$ in einer Ebene liegen, so müssen die drei Ebenen $[B_1C_1]\,[C_1A_1]\,[AB]$ sich in einer Geraden schneiden, und da die beiden ersten Ebenen sich in C_1 schneiden, so mufs die Ebene $[AB]$ durch C_1 gehen, oder

$$A \quad B \quad C_1$$

müssen in einer Ebene liegen.

Bezeichnen wir nun die Schnittlinie:

$$|[AB],\ [A_1B_1]| = S,$$

so werden ABC_1S in einer Ebene

und A_1B_1CS ebenfalls in einer Ebene

liegen, und da $[CC_1]$ die Polarebene des Polarstrahls S ist, so haben wir in jeder dieser beiden Ebenen zwei Paare konjugierter Durchmesser, nämlich

$$\begin{array}{ccc} AB & \text{und} & C_1S \\ A_1B_1 & \text{und} & CS. \end{array}$$

Hiernach ergeben sich die oben nachgewiesenen Relationen (2.):

$$\begin{cases} P_A + P_B = P_{C_1} + P_S \\ P_S + P_C = P_{A_1} + P_{B_1}, \end{cases}$$

aus deren Summe folgt:

$$P_A + P_B + P_C = P_{A_1} + P_{B_1} + P_{C_1}.$$

Da aber der Durchmesser A_1 ganz willkürlich gewählt war, und in der Polarebene $[B_1C_1]$ desselben für jedes Paar konjugierter Durchmesser die Summe $P_{B_1} + P_{C_1}$ denselben Wert behält, so ist überhaupt für irgend drei konjugierte Durchmesser ABC die Summe

$$P_A + P_B + P_C = \text{konst.},$$

d. h. die Summe der Potenzen der drei Punktinvolutionen auf irgend drei konjugierten Durchmessern einer Mittelpunktsfläche 2. O. hat immer denselben konstanten Wert, ist also auch gleich $P_a + P_b + P_c$ für die drei Hauptaxen der Fläche.

Zweitens haben wir in den beiden Ebenen $[ABC_1S]$ und $[A_1B_1CS]$ die Beziehungen (1.) oben nachgewiesen:

$$\begin{cases} P_A \,.\, P_B \sin^2(AB) = P_S \,.\, P_{C_1} \,.\, \sin^2(SC_1) \\ P_{A_1} \,.\, P_{B_1} \sin^2(A_1B_1) = P_S \,.\, P_C \,.\, \sin^2(SC), \end{cases}$$

und wenn wir einmal den räumlichen Strahl C mit dem Paare AB und C_1S in Verbindung setzen, die oben nachgewiesene Relation (3.):

$$P_A \,.\, \sin^2(CA) + P_B \,.\, \sin^2(CB) = P_{C_1} \,.\, \sin^2(CC_1) + P_S \,.\, \sin^2(CS),$$

andererseits, wenn wir den räumlichen Strahl C_1 mit den

Paaren konjugierter Durchmesser $A_1 B_1$ und CS in Verbindung setzen:

$$P_{A_1}.\sin^2(C_1A_1)+P_{B_1}\sin^2(C_1B_1)=P_C.\sin^2(CC_1)+P_S\sin^2(C_1S).$$

Multiplizieren wir aber die erste der beiden letzten Gleichungen mit P_C, die zweite mit P_{C_1} und ziehen sie von der vorigen ab, so folgt wegen der obigen Relationen:

$$P_B P_C \sin^2(BC) + P_C P_A \sin^2(CA) + P_A P_B \sin^2(AB)$$
$$= P_{B_1} P_{C_1} \sin^2(B_1 C_1) + P_{C_1} P_{A_1} \sin^2(C_1 A_1) + P_{A_1} P_{B_1} \sin^2(A_1 B_1).$$

Da aber der Durchmesser A_1 ganz willkürlich gewählt war und in der Polarebene $[B_1 C_1]$ desselben für jedes Paar konjugierter Durchmesser, sowohl das Glied $P_{B_1} P_{C_1} \sin^2(B_1 C_1)$, als auch die Summe $P_{B_1} \sin^2(A_1 B_1) + P_{C_1} \sin^2(A_1 C_1)$ denselben Wert behält, so ist überhaupt für irgend drei konjugierte Durchmesser ABC die Summe:

$$P_B P_C \sin^2(BC) + P_C P_A \sin^2(CA) + P_A P_B \sin^2(AB) = \text{konst.},$$

d. h.: Bildet man für irgend drei konjugierte Durchmesser einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung aus den Potenzen der drei zugehörigen Punktinvolutionen die Produkte je zweier und multipliziert sie mit dem Quadrate des Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels, so hat die Summe dieser drei Produkte immer denselben konstanten Wert, ist also auch gleich $P_b P_c + P_c P_a + P_a P_b$ für die drei Hauptaxen der Fläche.

Drittens giebt das Produkt der beiden vorhin betrachteten Gleichungen:

$$P_A . P_B . P_C . \sin^2(AB) \sin^2(SC)$$
$$= P_{A_1} . P_{B_1} . P_{C_1} . \sin^2(A_1 B_1) \sin^2(S C_1).$$

Wir haben aber in dem Dreikant ACS bekanntlich:

$$\frac{\sin(CS)}{\sin(CA)} = \frac{\sin([AB], [AC])}{\sin([AB], [A_1 B_1])},$$

da ABC_1S und A_1B_1CS in je einer Ebene liegen, und ebenso in dem Dreikant $A_1 C_1 S$:

$$\frac{\sin(C_1 S)}{\sin(C_1 A_1)} = \frac{\sin([A_1 B_1], [A_1 C_1])}{\sin([A_1 B_1], [AB])}$$

und durch Division beider Gleichungen folgt:

$$\left\{\frac{\sin(CS)}{\sin(C_1S)}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin(CA)\,\sin([AB],[AC])}{\sin(C_1A_1)\sin([A_1B_1],[A_1C_1])}\right\}^2.$$

Dies substituiert in die vorige Gleichung giebt:

$$P_A\,P_B\,P\ .\ \sin^2(AB)\sin^2(AC)\sin^2([AB],[AC])$$
$$= P_{A_1}\,P_{B_1}\,P_{C_1}\ .\ \sin^2(A_1B_1)\sin^2(A_1C_1)\sin^2([A_1B_1],[A_1C_1]).$$

Die Gröſse $\sin^2(A_1B_1)\sin^2(A_1C_1)\sin^2([A_1B_1],[A_1C_1])$, welche allein von den Seiten- und Kantenwinkeln des Dreikants $A_1B_1C_1$ abhängt, ist eine bekannte, in Bezug auf die drei Kanten symmetrische Funktion der Winkel, welche v. Staudt das Quadrat des räumlichen Sinus eines Dreikants $A_1B_1C_1$ genannt hat und welche wir kurz bezeichnen wollen durch

$$S^2(A_1B_1C_1).$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung die Winkel des Dreikants

$$(B_1C_1) = \alpha_1 \quad (C_1A_1) = \beta_1 \quad (A_1B_1) = \gamma_1$$

und die Kantenwinkel:

$$([A_1B_1],[A_1C_1]) = A_1 \quad ([B_1C_1],[B_1A_1]) = B_1 \quad ([C_1A_1],[C_1B_1]) = C_1,$$

so ist

$$\cos\alpha_1 = \cos\beta_1\cos\gamma_1 + \sin\beta_1\sin\gamma_1\cos A_1,$$

also

$$\cos A_1 = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_1}{\sin\beta_1\sin\gamma_1}$$

$$\sin^2 A_1 = \frac{\sin^2\beta_1\sin^2\gamma_1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\beta_1\cos^2\gamma_1 + 2\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\gamma_1}{\sin^2\beta_1\sin^2\gamma_1}$$

also

$$\sin^2\beta_1\sin^2\gamma_1\sin^2 A_1$$
$$= 1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\beta_1 - \cos^2\gamma_1 + 2\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\gamma_1$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 & 1 & \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 & \cos\alpha_1 & 1 \end{vmatrix} = S^2(A_1B_1C_1)$$

und wegen der Symmetrie dieses Ausdrucks:

$$\sin^2\beta_1\sin^2\gamma_1\sin^2 A_1 = \sin^2\gamma_1\sin^2\alpha_1\sin^2 B_1$$
$$= \sin^2\alpha_1\sin^2\beta_1\sin^2 C_1 = S^2(A_1B_1C_1).$$

Wir können daher den obigen Ausdruck auch so schreiben:

$$P_A \,.\, P_B \,.\, P_C \,.\, S^2(A\,B\,C)$$
$$= P_{A_1} \,.\, P_{B_1} \,.\, P_{C_1} \,.\, \sin^2(B_1 C_1) \,.\, \sin^2(B_1 A_1) \,.\, \sin^2([B_1 C_1], [B_1 A_1]);$$

da nun der Durchmesser A_1 ganz willkürlich gewählt war, und in der Polarebene $[B_1\, C_1]$ desselben für jedes Paar konjugierter Durchmesser, sowohl das Produkt $P_{B_1}\, P_{C_1} \sin^2(B_1\, C_1)$, als auch das Produkt $\sin^2(B_1\, A_1) \,.\, \sin^2([B_1 C_1], [B_1 A_1])$ bekanntlich denselben Wert behält, so ist überhaupt für irgend drei konjugierte Durchmesser $A\,B\,C$ das Produkt:

$$P_A \,.\, P_B \,.\, P_C \,.\, S^2(A, B, C) = \text{konst.},$$

d. h.: Für irgend drei konjugierte Durchmesser einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung ist das Produkt aus den Potenzen der zugehörigen Punktinvolutionen in das Quadrat des räumlichen Sinus des von den drei konjugierten Durchmessern gebildeten Dreikants von konstantem Werte, also auch gleich $P_a\, P_b\, P_c$ für die drei Hauptaxen der Fläche, da der räumliche Sinus eines dreirechtwinkligen Dreikants gleich 1 ist.*)

---

*) Durch den räumlichen Sinus eines Dreikants läſst sich bekanntlich das Tetraëdervolumen ausdrücken. Sind $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ vier beliebige Punkte im Raume, die Ecken eines Tetraëders, und bezeichnet man dessen Kanten und Seitenflächen:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{A} = a, \quad \mathfrak{D}\mathfrak{B} = b, \quad \mathfrak{D}\mathfrak{C} = c, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C} = a_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{A} = b_1, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = c_1,$$
$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = \alpha, \quad [\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{A}] = \beta, \quad [\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \gamma, \quad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \delta,$$

das Volumen des Tetraëders durch v, so ist:

$$6v = abc \,.\, \sin(a, b) \,.\, \sin(c, \gamma) = abc \,.\, \sin(b, c) \,.\, \sin(a, \alpha)$$
$$= abc \,.\, \sin(c, a) \,.\, \sin(b, \beta).$$

Wir können aber die Neigungswinkel (a, α) (b, β) (c, γ) durch Flächenwinkel ausdrücken:

$$\sin(a, \alpha) = \sin(a, b) \,.\, \sin(\alpha, \gamma) = \sin(a, c) \,.\, \sin(\alpha, \beta) \text{ u. s. f.}$$

also ist:

$$6v = abc \,.\, \sin(ab) \,.\, \sin(ac) \,.\, \sin(\beta, \gamma)$$
$$= abc \,.\, \sin(bc) \,.\, \sin(ba) \,.\, \sin(\gamma, \alpha)$$
$$= abc \,.\, \sin(ca) \,.\, \sin(cb) \,.\, \sin(\alpha, \beta)$$

oder nach dem Obigen:

$$(6v)^2 = a^2 b^2 c^2 \,.\, S^2(abc),$$

Dies letzte Resultat läſst eine bemerkenswerte Folgerung zu: Nehmen wir nämlich die beiden Hyperboloide, welche (S. 512) als konjugierte bezeichnet wurden, die denselben Asymptotenkegel haben, und von denen das eine ein einschaliges, das andere ein zweischaliges ist, so wissen wir, daſs, wenn $\mathfrak{t}$ ein Punkt des zweischaligen Hyperboloids und τ seine Berührungsebene ist, dieselbe den Asymptotenkegel $\mathfrak{M}^{(2)}$ in einer Ellipse schneiden muſs, deren Mittelpunkt $\mathfrak{t}$ ist; ferner muſs eine durch $\mathfrak{M}$ parallel zu τ gelegte Ebene das konjugierte (einschalige) Hyperboloid in einer Ellipse schneiden, welche mit der vorigen kongruent ist, weil jede durch $|\mathfrak{M}\mathfrak{t}$ gelegte Ebene die beiden Hyperboloide in konjugierten Hyperbeln und die Ebene τ in einer Tangente an einer derselben schneidet; wenn nun der Durchmesser $|\mathfrak{M}\mathfrak{t}|$ mit A und irgend zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse mit B und C bezeichnet werden, so drückt das mit π^2 multiplizierte Produkt $P_B \cdot P_C \sin^2(B\,C)$ das Quadrat der Fläche der Ellipse aus und $P_A \cdot \sin^2(AB)\sin^2([BA],[BC])$ das Quadrat der Höhe eines Kegels, dessen Spitze $\mathfrak{M}$ und dessen Grundfläche jene Ellipse ist. $P_A P_B P_C S^2(A\,B\,C)$ drückt also das Quadrat des Volumens dieses Kegels aus (bis auf einen Zahlenfaktor), und der vorige Satz läſst sich so aussprechen:

---

wo $$S^2(abc) = \begin{vmatrix} 1, & \cos(ab), & \cos(ac) \\ \cos(ba), & 1, & \cos(bc) \\ \cos(ca), & \cos(cb), & 1 \end{vmatrix}$$ bedeutet.

Der räumliche Sinus des Dreikants ist 0, wenn die drei Kanten in eine Ebene fallen, und 1, wenn sie drei zu einander rechtwinklige Strahlen sind.

Mit Hilfe des räumlichen Sinus lassen sich leicht bei einem Parallelepipedon die Verhältnisse der Kanten zu der räumlichen Diagonale desselben ausdrücken. Bezeichnen wir die drei in einer Ecke des Parallelepipeds zusammenstoſsenden Kanten durch abc und die räumliche Diagonale desselben durch d, so haben offenbar die beiden Pyramiden, deren Kanten $a\,b\,c$ und $a\,b\,d$ sind, gleiches Volumen, also ist

$$(abc)^2 S^2(abc) = (abd)^2 S^2(abd),$$

also:

$$c^2 : d^2 = S^2(abd) : S^2(abc),$$

mithin allgemein:

$$a^2 : b^2 : c^2 : d^2 = S^2(bcd) : S^2(acd) : S^2(abd) : S^2(abc)$$

analog dem bekannten Satze der Trigonometrie.

Eine veränderliche Ebene, welche von einem festen Kegel zweiten Grades $\mathfrak{M}^{(2)}$ ein konstantes Volumen abschneidet, umhüllt ein zweischaliges Hyperboloid, dessen Berührungspunkt mit der Ebene allemal der Mittelpunkt der Ellipse ist, in welcher die Ebene den Kegel $\mathfrak{M}^{(2)}$ schneidet. Der Kegel selbst ist der Asymptotenkegel des Hyperboloids.

Wir erkennen hierin das räumliche Analogon bekannter Eigenschaften der ebenen Hyperbel.

Sind $A\ B\ C$ drei konjugierte Durchmesser einer Mittelpunktsfläche $F^{(2)}$ und $P_A\ P_B\ P_C$ die Potenzen der ihnen zugehörigen Punktinvolutionen, so läſst sich die Potenz der auf einem beliebigen vierten Durchmesser D befindlichen Punktinvolution auf folgende Art ermitteln:

Da die drei Ebenen des Dreikants $A\ B\ C$ und die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ ein Polartetraëder im räumlichen Polarsystem bilden, dessen Kernfläche $F^{(2)}$ ist, so werden die drei Paar Gegenkanten des Polartetraëders konjugierte Strahlen im Polarsystem sein, also zu A der konjugierte Strahl $|[BC]\,\varepsilon_\infty|$ u. s. f.

Ziehen wir durch $\mathfrak{M}$ einen beliebigen vierten Durchmesser D, nehmen irgend einen Punkt $\mathfrak{d}$ desselben und legen durch ihn drei Ebenen parallel den Ebenen $[BC]$ $[CA]$ $[AB]$, welche den Strahlen $A\ B\ C$ in den Punkten $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ begegnen mögen, dann erhalten wir die sechs Seitenflächen eines Parallelepipeds (Fig. 24), von welchem D eine Diagonale ist; die Pole der drei Seitenflächen, welche sich in $\mathfrak{d}$ schneiden, seien $\mathfrak{a}'\ \mathfrak{b}'\ \mathfrak{c}'$ auf den Durchmessern $A\ B\ C$, so daſs also die Werte der Potenzen für die den drei konjugierten Durchmessern zugehörigen Punktinvolutionen sind:

$$P_A = \mathfrak{M}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}'; \quad P_B = \mathfrak{M}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{b}'; \quad P_C = \mathfrak{M}\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{c}'.$$

Die Ebene $[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']$ ist die Polarebene des Punktes $\mathfrak{d}$, trifft also den Strahl $|\mathfrak{M}\mathfrak{d}|$ in dem Punkte $\mathfrak{d}'$, so daſs

$$\mathfrak{M}\mathfrak{d} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{d}' = P_D$$

die Potenz der Punktinvolution auf dem Durchmesser D ist. Legen wir die Ebene $[CD]$, welche die Ebene $[AB]$ in der Diagonale $\mathfrak{M}\mathfrak{c}$ des Parallelogramms schneidet, dessen Seiten

$\mathfrak{Ma}$ und $\mathfrak{Mb}$ sind, so wird $\mathfrak{e}$ der Pol von $|\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'|$ sein im ebenen Polarsystem in der Ebene $[AB]$; also schneidet $|\mathfrak{Me}|$

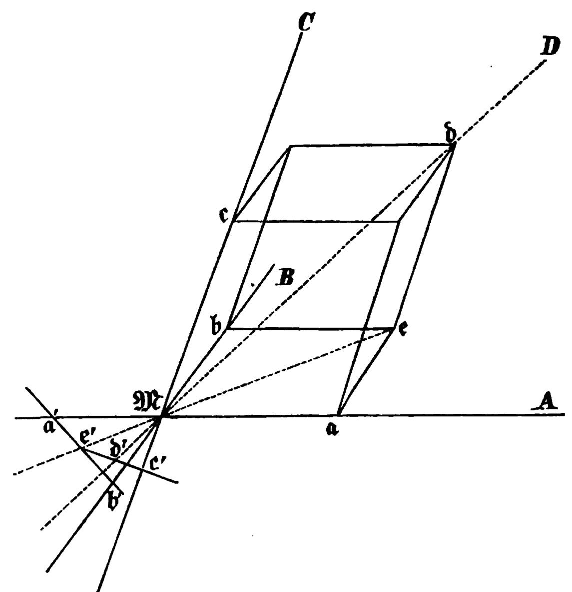


Fig. 24.

die Gerade $|\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'|$ im Punkte $\mathfrak{c}'$, der zu $\mathfrak{e}$ konjugiert ist, und wir haben auf S. 521 die elementare Beziehung gefunden:

$$\frac{\mathfrak{Ma}}{\mathfrak{Ma}'} + \frac{\mathfrak{Mb}}{\mathfrak{Mb}'} = \frac{\mathfrak{Me}}{\mathfrak{Me}'}.$$

In der Ebene $[CD]$ ist in gleicher Weise $\mathfrak{Md}$ die Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten $\mathfrak{Mc}$ und $\mathfrak{Me}$ sind, und die Polare von $\mathfrak{d}$ in dem Polarsysteme in der Ebene $[CD]$ ist $|\mathfrak{c}'\mathfrak{e}'|$, welche in $\mathfrak{d}'$ von $|\mathfrak{Md}|$ getroffen wird, also:

$$\frac{\mathfrak{Mc}}{\mathfrak{Mc}'} + \frac{\mathfrak{Me}}{\mathfrak{Me}'} = \frac{\mathfrak{Md}}{\mathfrak{Md}'}.$$

Aus der Summe beider Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{Ma}}{\mathfrak{Ma}'} + \frac{\mathfrak{Mb}}{\mathfrak{Mb}'} + \frac{\mathfrak{Mc}}{\mathfrak{Mc}'} = \frac{\mathfrak{Md}}{\mathfrak{Md}'},$$

eine elementare Relation, die nun in doppelter Weise für uns verwertet werden kann; es folgt aus ihr:

$$\frac{\mathfrak{Ma}^2}{P_A} + \frac{\mathfrak{Mb}^2}{P_B} + \frac{\mathfrak{Mc}^2}{P_C} = \frac{\mathfrak{Md}^2}{P_D}$$

oder, wenn wir (s. Anmerkung auf S. 528) die Quadrate der Strecken im Zähler, Kanten und Diagonale des Parallelepipeds, ersetzen durch die Quadrate der räumlichen Sinus zwischen den Dreikanten, die aus den vier Strahlen $A\ B\ C\ D$ gebildet werden:

$$\text{I)} \qquad \frac{S^2(BCD)}{P_A} + \frac{S^2(ACD)}{P_B} + \frac{S^2(ABD)}{P_C} = \frac{S^2(ABC)}{P_D},$$

eine Beziehung, welche den Wert der Potenz P_D der Punktinvolution auf einem beliebigen Durchmesser D liefert, ausgedrückt durch die Potenzen $P_A\ P_B\ P_C$ der Punktinvolutionen auf den gegebenen drei konjugierten Durchmessern $A\ B\ C$.

Andererseits liefert aber die vorige Relation folgende Gleichung:

$$\frac{P_A}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}'^2} + \frac{P_B}{\mathfrak{M}\mathfrak{b}'^2} + \frac{P_C}{\mathfrak{M}\mathfrak{c}'^2} = \frac{P_D}{\mathfrak{M}\mathfrak{d}'^2},$$

und bezeichnen wir die zu dem Durchmesser D konjugierte Ebene im Polarbündel $\mathfrak{M}^{(2)}$ mit δ, so liegen $\mathfrak{a}'\ \mathfrak{b}'\ \mathfrak{c}'\ \mathfrak{d}'$ in der Ebene δ, und es ist:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{a}' \,.\, \sin(A, \delta) = \mathfrak{M}\mathfrak{b}' \,.\, \sin(B, \delta) = \mathfrak{M}\mathfrak{c}' \,.\, \sin(C, \delta) \\ = \mathfrak{M}\mathfrak{d}' \,.\, \sin(D, \delta),$$

so dafs sich die Beziehung so gestaltet:

$$\text{II)} \qquad P_A \sin^2(A, \delta) + P_B \sin^2(B, \delta) + P_C \sin^2(C, \delta) \\ = P_D \sin^2(D, \delta).$$

Aus der Beziehung I) ergiebt sich u. A., wenn wir für $A\ B\ C$ insbesondere dasjenige System konjugierter Durchmesser setzen, welches die drei zu einander rechtwinkligen konjugierten Strahlen des Polarbündels $\mathfrak{M}^{(2)}$, die Axen $a\ b\ c$ der Fläche $F^{(2)}$, bilden, wodurch:

$$S^2(abc) = 1, \quad S^2(abd) = \cos^2(d, c) \quad \text{u. s. f.}$$

wird, folgende Beziehung:

$$\frac{\cos^2(d, a)}{P_a} + \frac{\cos^2(d, b)}{P_b} + \frac{\cos^2(d, c)}{P_c} = \frac{1}{P_d},$$

wo $d = D$ ein beliebiger vierter Durchmesser ist. Nehmen wir statt d der Reihe nach drei beliebige zu einander recht-

winklige Durchmesser $d_1\, d_2\, d_3$ und addieren die erhaltenen Beziehungen, so folgt, da (S. 383)

$$\cos^2(d_1 a) + \cos^2(d_2 a) + \cos^2(d_3 a) = 1$$

ist:

$$\frac{1}{P_{d_1}} + \frac{1}{P_{d_2}} + \frac{1}{P_{d_3}} = \frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = \text{konst.}, \quad \text{d. h.:}$$

Die Summe der reziproken Werte der Potenzen von den Punktinvolutionen auf irgend drei zu einander rechtwinkligen Durchmessern eines räumlichen Polarsystems ist konstant, also gleich der Summe der reziproken Werte der Potenzen der auf den drei Hauptaxen der Fläche $F^{(2)}$ befindlichen Punktinvolutionen.

In der Beziehung II) kommen die drei konjugierten Durchmesser $A\, B\, C$ allein auf der linken Seite vor, während die rechte Seite von denselben unabhängig ist, und in diese nur eingehen die Ebene δ, der zu ihr konjugierte Durchmesser D und die Potenz der ihm zugehörigen Punktinvolution.

Wenn wir daher an die Stelle von $A\, B\, C$ irgend ein anderes System dreier konjugierter Durchmesser $A_1\, B_1\, C_1$ treten lassen, so bleibt die rechte Seite ungeändert, d. h.:

$$P_A \sin^2(A, \delta) + P_B \sin^2(B, \delta) + P_C \sin^2(C, \delta) = \text{konst.}$$

für alle beliebigen Tripel von je drei konjugierten Durchmessern (oder alle Polardreikante des Polarbündels $\mathfrak{M}^{(2)}$) und eine beliebige festgehaltene Ebene δ.

Setzen wir an Stelle der Ebene δ ihre Normale N, so wird die vorige Relation:

$$P_A \cos^2(A, N) + P_B \cos^2(B, N) + P_C \cos^2(C, N) = \text{konst.}$$

für alle Tripel konjugierter Durchmesser $A\, B\, C$ und einen beliebigen festen Strahl N; da aber, wie wir auf S. 524 gesehen haben, allgemein $P_A + P_B + P_C = \text{konst.}$ ist, so folgt durch Abziehen:

$$P_A \sin^2(A, N) + P_B \sin^2(B, N) + P_C \sin^2(C, N) = \text{konst.},$$

d. h.: Wenn man für irgend drei konjugierte Durchmesser einer Mittelpunktsfläche 2. O. die Werte der Potenzen der zugehörigen Punktinvolutionen multipliziert mit den Quadraten des Sinus oder Cosinus der Winkel, welche die drei Richtungen der

konjugierten Durchmesser mit irgend einer festen Richtung im Raume bilden, so ist die Summe dieser Produkte konstant für alle Tripel von konjugierten Durchmessern.

Hierdurch zerlegt sich die oben gefundene Relation:

$$P_A + P_B + P_C = \text{konst.}$$

in zwei andere, die von einer willkürlich gewählten Richtung N abhängen.

Die obige Beziehung II) läfst eine andere Folgerung zu: Da D und δ einen beliebigen Durchmesser und die ihm konjugierte Durchmesserebene bezeichneten, so wird, wenn wir für δ die Normale n dieser Ebene einführen, die Beziehung II) folgende:

$$P_A \cos^2 (A, n) + P_B \cos^2 (B, n) + P_C \cos^2 (C, n) \\ = P_D \cos^2 (D, n).$$

Ist nun D ein reeller Durchmesser, welcher die Fläche $F^{(2)}$ in reellen Punkten durchbohrt, zwischen denen $\mathfrak{M}$ in der Mitte liegt, so wird die zu D konjugierte Ebene parallel sein der Berührungsebene in einem der Endpunkte dieses Durchmessers, und P_D wird gleich sein dem Quadrate des Halbmessers, $= d^2$; also wird $d^2 \cos^2 (d, n)$ das Quadrat von der Länge des Perpendikels sein, welches aus dem Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ auf die Berührungsebene in dem Endpunkte des Durchmessers d herabgelassen werden kann; bezeichnen wir dieses Perpendikel mit p, so haben wir also:

$$P_A \cos^2 (A, n) + P_B \cos^2 (B, n) + P_C \cos^2 (C, n) = p^2$$

oder, wenn wir für das System der drei konjugierten Durchmesser $A\ B\ C$ die drei Axen $a\ b\ c$ wählen:

$$P_a \cos^2 (a, n) + P_b \cos^2 (b, n) + P_c \cos^2 (c, n) = p^2.$$

Denken wir uns drei zu einander rechtwinklige Berührungsebenen an die $F^{(2)}$ gelegt, so werden deren Normalen $n\ n'\ n''$ auch drei zu einander rechtwinklige Strahlen sein, und die drei Perpendikel aus $\mathfrak{M}$ auf die drei rechtwinkligen Berührungsebenen, welche sich in $\mathfrak{P}$ schneiden mögen, werden die drei Kanten eines Parallelepipeds sein, von dem $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ gegenüberliegende Ecken sind, und dessen Seitenflächen

paarweise den drei Berührungsebenen parallel laufen; folglich ist:

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = (\mathfrak{M}\mathfrak{P})^2,$$

und da bekanntlich

$$\cos^2(a, n) + \cos^2(a, n') + \cos^2(a, n'') = 1 \text{ u. s. w.},$$

so erhalten wir:

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{P})^2 = P_a + P_b + P_c = \text{konst.}, \quad \text{d. h.:}$$

Der Schnittpunkt dreier zu einander rechtwinkligen Berührungsebenen einer Fläche 2. O. $F^{(2)}$ liegt allemal auf einer mit der Fläche konzentrischen Kugel, deren Radius zum Quadrate hat: $P_a + P_b + P_c$. Wir wollen diese die „Orthogonalkugel" der Fläche $F^{(2)}$ nennen.

Durch die drei Konstanten:

$$P_A + P_B + P_C = c_1 = P_a + P_b + P_c,$$

$$P_B P_C \sin^2(B, C) + P_C P_A \sin^2(C, A) + P_A P_B \sin^2(A, B) = c_2$$
$$= P_b P_c + P_c P_a + P_a P_b,$$

$$P_A P_B P_C S^2(ABC) = c_3 = P_a P_b P_c$$

sind die Koëffizienten einer kubischen Gleichung

$$x^3 - c_1 x^2 + c_2 x - c_3 = 0$$

gegeben, deren Wurzeln P_a P_b P_c die Quadrate der Hauptaxen der Mittelpunktsfläche oder die Potenzen der Punktinvolutionen sind, welche den Hauptaxen zugehören, sobald irgend drei konjugierte Durchmesser mit den ihnen zugehörigen Punktinvolutionen gegeben sind.

§ 59. Metrische Beziehungen für das räumliche Polarsystem, von welchem der Mittelpunkt und ein beliebiges Polartetraëder gegeben sind.

Sobald man von einem räumlichen Polarsystem den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ (Pol der unendlich-entfernten Ebene ε_∞) und ein beliebiges Polartetraëder $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ kennt, ist dasselbe vollständig bestimmt (S. 149). Wir stellen uns die Aufgabe, die drei vorigen Konstanten c_1 c_2 c_3 zu ermitteln.

Da für das Polarsystem die Elemente:

Pol:	Polarebene:
𝔄	[𝔅 ℭ 𝔇]
𝔅	[ℭ 𝔇 𝔄]
ℭ	[𝔇 𝔄 𝔅]
𝔇	[𝔄 𝔅 ℭ]
𝔐	ε_∞

gegeben sind, so wird die Verbindungslinie |𝔐𝔄| die Ebene [𝔅ℭ𝔇] in einem Punkte 𝔪 treffen, welcher der Mittelpunkt des ebenen Polarsystems ist, das der Ebene [𝔅ℭ𝔇] zugehört; für dasselbe ist 𝔅ℭ𝔇 ein Polardreieck, und wir können leicht die beiden den konjugierten Durchmessern zugehörigen Konstanten ermitteln (Fig. 25). Verlängern wir |𝔪𝔅| bis zum Schnittpunkte 𝔟 mit der Kante |ℭ𝔇|, so ist:

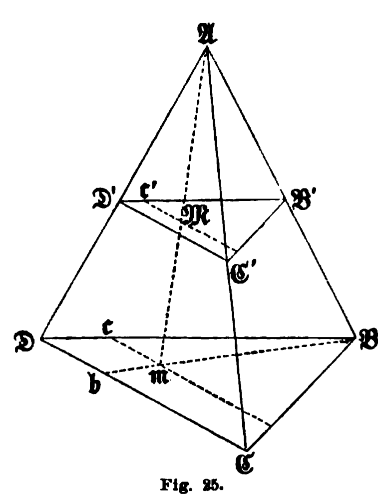


Fig. 25.

$$𝔪𝔅 . 𝔪𝔟$$

die Potenz der Punktinvolution auf dem Durchmesser |𝔪𝔅| des ebenen Polarsystems; der zu diesem konjugierte Durchmesser ist die Parallele durch 𝔪 zu ℭ𝔇; trifft diese Parallele die Kante |𝔅𝔇| in 𝔠, so ist die Potenz der Punktinvolution auf dem zu |𝔪𝔅| konjugierten Durchmesser:

$$𝔪𝔠 . 𝔟ℭ.$$

Legen wir jetzt durch 𝔐 eine Parallelebene zu [𝔅ℭ𝔇], so ist dieselbe die Polarebene zu dem Strahle |𝔐𝔄| im Polarbündel $𝔐^{(2)}$, und trifft diese Parallelebene die Tetraëderkanten in 𝔅′ ℭ′ 𝔇′, so ist die Ebene [𝔅′ℭ′𝔇′] der Träger eines neuen ebenen Polarsystems, für welches der Punkt 𝔐 der Mittelpunkt ist und die Potenzen der Punktinvolutionen auf zwei konjugierten Durchmessern leicht ausgedrückt werden durch die vorigen Potenzen; bezeichnen wir die Potenz auf dem Durchmesser |𝔐𝔄| durch:

$$P_A = 𝔐𝔄 . 𝔐𝔪,$$

und die Potenz auf dem Durchmesser $|\mathfrak{M}\mathfrak{B}'|$ durch P_B, so wird dieselbe also ermittelt werden können: da $\mathfrak{B}'$ auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ liegt, so mufs die Polarebene von $\mathfrak{B}'$ (im räumlichen Polarsysteme) durch die Gegenkante $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ gehen; da ferner $\mathfrak{B}'$ in der Durchmesserebene $[\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}']$ liegt, so mufs die Polarebene durch den unendlich-entfernten Punkt des konjugierten Durchmessers $|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|$ gehen oder parallel $|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|$ sein; hieraus folgt, dafs die Polarebene von $\mathfrak{B}'$ auf dem Durchmesser $|\mathfrak{M}\mathfrak{B}'|$ von $\mathfrak{M}$ aus ein Stück abschneidet, welches gleich ist $\mathfrak{m}\mathfrak{b}$; also ist die Potenz auf dem Durchmesser $|\mathfrak{M}\mathfrak{B}'|$:

$$P_B = \mathfrak{M}\mathfrak{B}' \, . \, \mathfrak{m}\mathfrak{b} .$$

Endlich ist der zu $|\mathfrak{M}\mathfrak{B}'|$ konjugierte Durchmesser, dessen Potenz durch P_C bezeichnet werde, die durch $\mathfrak{M}$ zu $|\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'|$ parallel gezogene Gerade, und in gleicher Weise finden wir daher:

$$P_C = \mathfrak{M}\mathfrak{c}' \, . \, \mathfrak{b}\mathfrak{C} ,$$

und, da sich wegen der Parallelität verhält:

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}'}{\mathfrak{m}\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}\mathfrak{m}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{c}'}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}\mathfrak{m}} ,$$

so haben wir:

$$P_A = \mathfrak{M}\mathfrak{A} \, . \, \mathfrak{M}\mathfrak{m} ; \quad P_B = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}\mathfrak{m}} \, . \, \mathfrak{m}\mathfrak{B} \, . \, \mathfrak{m}\mathfrak{b} ; \quad P_C = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}\mathfrak{m}} \, . \, \mathfrak{m}\mathfrak{c} \, . \, \mathfrak{b}\mathfrak{C} .$$

In der Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ ist nun bekanntlich, wenn wir um das Dreieck $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ einen Kreis beschreiben und die Potenz des Punktes $\mathfrak{m}$ in Bezug auf diesen Kreis nehmen, dieselbe gleich:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{B} \, . \, \mathfrak{m}\mathfrak{b} + \mathfrak{m}\mathfrak{c} \, . \, \mathfrak{b}\mathfrak{C}$$

(Th. d. K. S. 185); wenn wir daher durch diesen Kreis und den Punkt $\mathfrak{A}$ eine Kugel legen, d. h. dem Tetraëder $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ eine Kugel umschreiben, so wird die Potenz des Punktes $\mathfrak{m}$ in Bezug auf diese Kugel dieselbe sein, wie in Bezug auf jenen Kreis, also nach dem Obigen:

$$(P_B + P_C) \cdot \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}} ;$$

sie ist aber auch, wenn wir annehmen, dafs der Strahl $|\mathfrak{m}\mathfrak{A}|$ die umschriebene Kugel zum andern Male in $\mathfrak{A}'$ treffe, gleich

$$\mathfrak{m}\mathfrak{A} \, . \, \mathfrak{m}\mathfrak{A}' ,$$

folglich ist

$$P_B + P_C = \mathfrak{m}\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}$$
$$P_A = \mathfrak{M}\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}$$
$$\overline{P_A + P_B + P_C = \mathfrak{M}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}',}$$

d. h. gleich der Potenz des Punktes $\mathfrak{M}$ in Bezug auf die dem Tetraëder umschriebene Kugel; bezeichnen wir diese Potenz mit $P_{\mathfrak{K}}$, so dafs:

$$\text{(I)} \qquad P_A + P_B + P_C = P_{\mathfrak{K}}$$

ist, so läfst sich der Satz aussprechen:

Die Potenz des Mittelpunktes $\mathfrak{M}$ eines räumlichen Polarsystems in Bezug auf die einem beliebigen Polartetraëder umschriebene Kugel ist konstant, gleich der Summe der Potenzen der drei Punktinvolutionen, welche den Hauptaxen des Polarsystems zugehören. Erinnern wir uns nun (S. 534), dafs diese Summe $P_a + P_b + P_c$ gleich dem Quadrate des Radius der „Orthogonalkugel" ist, d. h. derjenigen Kugel, welche sämtliche Schnittpunkte je dreier rechtwinkligen Berührungsebenen der $F^{(2)}$ enthält, so läfst sich der Satz aussprechen:

Die Orthogonalkugel einer Fläche $F^{(2)}$, welche die Schnittpunkte je dreier zu einander rechtwinkligen Berührungsebenen der $F^{(2)}$ enthält, schneidet jede einem Polartetraëder (in Bezug auf $F^{(2)}$) umschriebene Kugel rechtwinklig.

Zweitens wissen wir, dafs in dem ebenen Polarsystem der Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ das Produkt der Potenzen

$$\mathfrak{m}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}\mathfrak{C} \cdot \sin^2(|\mathfrak{m}\mathfrak{B}|, |\mathfrak{m}\mathfrak{c}|) = 2rp_2p_3p_4$$

ist (Th. d. K. S. 185), wo r den Radius des dem Dreieck $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ umschriebenen Kreises und $p_2\, p_3\, p_4$ die Perpendikel bedeuten, welche von $\mathfrak{m}$ auf die Seiten $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$, $|\mathfrak{D}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ herabgelassen sind; hieraus folgt:

$$P_B \cdot P_C \cdot \sin^2(B, C) = \left(\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}}{\mathfrak{m}\mathfrak{A}}\right)^2 \cdot 2rp_2p_3p_4.$$

Da ferner

$$P_A = \mathfrak{M}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{m},$$

und das Perpendikel h_1 von $\mathfrak{A}$ auf die Ebene $[\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}']$ so ausgedrückt werden kann:

$$h_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{A} \, . \, \sin(B, A) \, . \, \sin([BA], [BC]) \, ,$$

so erhalten wir (S. 526):

$$P_A \, . \, P_B \, . \, P_C \, . \, S^2(ABC) = 2r \, . \, p_2 p_3 p_4 \, . \, h_1^2 \, . \, \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A} \, . \, \mathfrak{M}\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}\mathfrak{A} \, . \, \mathfrak{m}\mathfrak{A}} \, .$$

Die Gröſsen auf der rechten Seite lassen sich aber leicht umgestalten. Bezeichnen wir nämlich die vier Höhen des Tetraëders $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ durch

$$H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4$$

und die vier ihnen parallelen Perpendikel von dem Punkte $\mathfrak{M}$ auf die Tetraëderflächen durch

$$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \, ,$$

so verhält sich:

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}}{\mathfrak{m}\mathfrak{A}} = \frac{h_1}{H_1} \qquad \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}}{\mathfrak{A}\mathfrak{m}} = \frac{P_1}{H_1} \, ,$$

folglich:

$$P_A \, P_B \, P_C \, . \, S^2(ABC) = -\, 2r \, . \, p_2 p_3 p_4 \, . \, h_1^3 \, . \, \frac{P_1}{H_1^2} \, .$$

Endlich drücken wir das Volumen der Pyramide $(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{m})$ so aus: $\frac{1}{3} \, . \, \frac{1}{2} \, (\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \, . \, p_2 \, . \, H_1$ und andererseits, wenn wir als Grundfläche das Dreieck $(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ nehmen und als Höhe das aus $\mathfrak{m}$ auf dieselbe gefällte Perpendikel, dessen Gröſse ist $P_2 \cdot \frac{H_1}{h_1}$, so: $\frac{1}{3} \, (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \cdot P_2 \cdot \frac{H_1}{h_1}$, woraus folgt:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D} \, . \, p_2 h_1 = 2(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \, . \, P_2$$

und analog:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{B} \, . \, p_3 h_1 = 2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}) \, . \, P_3$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} \, . \, p_4 h_1 = 2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \, . \, P_4 \, ,$$

folglich, da bekanntlich

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \, . \, (\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \, . \, (\mathfrak{D}\mathfrak{B}) = 4r \, . \, (\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$$

ist, ergiebt sich:

$$P_A P_B P_C \, . \, S^2(ABC) = -\, 4 P_1 P_2 P_3 P_4 \, \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \, (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}) \, (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D})}{(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \, . \, H_1^2} \, ,$$

oder, wenn wir das Volumen v des Tetraëders $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ einführen:

$$\begin{aligned} 3v &= (\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \, . \, H_1 \\ &= (\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{A}) \, . \, H_2 \\ &= (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}) \, . \, H_3 \\ &= (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \, . \, H_4 \, , \end{aligned}$$

so ergiebt sich:

(II) $P_A \cdot P_B \cdot P_C \cdot S^2(ABC) = -(6v)^2 \cdot \frac{P_1 P_2 P_3 P_4}{H_1 H_2 H_3 H_4}$,

d. h.: **Wenn man aus dem Mittelpunkt 𝔐 eines räumlichen Polarsystems auf die vier Seitenflächen eines beliebigen Polartetraëders die Perpendikel fällt und die Verhältnisse derselben zu den ihnen parallelen Höhen des Tetraëders multipliziert mit dem negativen Quadrate des sechsfachen Tetraëdervolumens, so ist dieses Produkt konstant, gleich dem Produkt der Potenzen der drei Punktinvolutionen, welche den Hauptaxen des Polarsystems zugehören.**

Um die übrig bleibende dritte Konstante c_2 zu ermitteln, wählen wir ein anderes System konjugierter Durchmesser, als dasjenige, welches in den beiden vorigen Fällen in Betracht kam, bei welchem nämlich ein Durchmesser von 𝔐 nach einer Tetraëderecke 𝔄 ging und die konjugierte Ebene, welche die beiden andern konjugierten Durchmesser enthielt, der gegenüberliegenden Tetraëderfläche [𝔅ℭ𝔇] parallel war.

Das neue System konjugierter Durchmesser konstruieren wir so:

Die Gegenkanten |𝔄𝔅| und |ℭ𝔇| des Polartetraëders sind die Träger von Punktinvolutionen, deren Mittelpunkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$ seien, während die ihnen konjugierten unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{m}^\infty$ und $\mathfrak{m}_1^\infty$ sind. Da nun die Gegenkanten des Polartetraëders konjugierte Strahlen im räumlichen Polarsysteme sind, so ist:

[𝔐ℭ𝔇] die Polarebene von $\mathfrak{m}^\infty$, geht also durch $\mathfrak{m}$,
[𝔐𝔄𝔅] „ „ „ $\mathfrak{m}_1^\infty$, „ „ „ $\mathfrak{m}_1$.

Die Ebenen [𝔐ℭ𝔇] und [𝔐𝔄𝔅] schneiden sich also in der Geraden $|\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1|$, welche durch 𝔐 gelegt die beiden Gegenkanten |𝔄𝔅| und |ℭ𝔇| trifft; es giebt nur *eine* solche Gerade $|\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1|$ durch 𝔐, und ihr ist konjugiert die unendlich-entfernte Gerade $|\mathfrak{m}^\infty \mathfrak{m}_1^\infty|$.

Die zu dem Durchmesser $|\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1|$ konjugierte Durchmesserebene ist die Ebene [𝔐$\mathfrak{m}^\infty \mathfrak{m}_1^\infty$], d. h. die durch 𝔐 parallel zu dem Paare von Gegenkanten |𝔄𝔅| und |ℭ𝔇| gelegte Ebene.

Ziehen wir durch 𝔐 (Fig. 26) eine Parallele A zu der

Kante $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und eine Parallele B zu der Kante $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$, bezeichnen wir ferner den Durchmesser $|\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1|$ mit C, so ist offenbar von A der konjugierte Strahl im räumlichen Polarsystem die unendlich-entfernte Gerade der Ebene $[\mathfrak{M}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ oder $[BC]$, von B der konjugierte Strahl im räumlichen Polarsystem die unendlich-entfernte Gerade der Ebene $[\mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ oder $[AC]$; und von C der konjugierte Strahl im räumlichen Polarsystem $|\mathfrak{m}^\infty \mathfrak{m}_1^\infty|$ oder die unendlich-entfernte Gerade der Ebene $[AB]$, folglich bilden

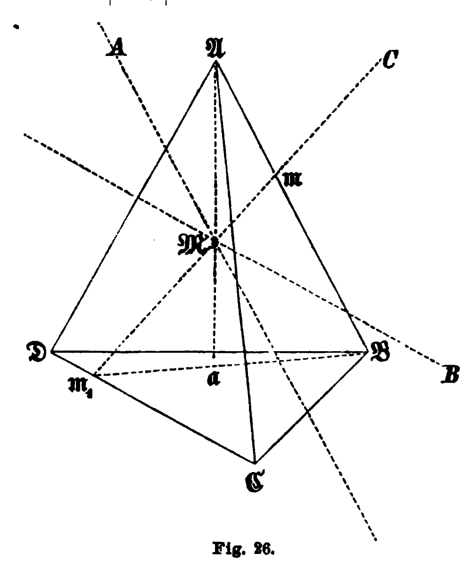


Fig. 26.

$$A\ B\ C$$

ein Polardreikant im Polarbündel $\mathfrak{M}^{(2)}$, sind also drei konjugierte Durchmesser des Polarsystems; diese sind es, welche wir der folgenden Betrachtung zu Grunde legen wollen. Wir können zunächst den Satz aussprechen:

Zieht man durch den Mittelpunkt eines räumlichen Polarsystems zwei Parallele zu einem Paar konjugierter Strahlen desselben und diejenige dritte Gerade, welche dem Paare konjugierter Strahlen begegnet, so erhält man allemal drei konjugierte Durchmesser des Polarsystems.

Um nun die Potenzen

$$P_A \quad P_B \quad P_C$$

der drei Punktinvolutionen zu ermitteln, welche diesen konjugierten Durchmessern zugehören, bemerken wir zunächst, dafs

$$P_C = \mathfrak{M}\mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{m}_1$$

ist; ferner liegt der Durchmesser A in der Ebene $[\mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$,

ist parallel der Kante $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, und diese selbst ist der Träger einer Punktinvolution, von welcher $\mathfrak{m}$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ ein Paar konjugierter Punkte ist, deren Potenz also $= \mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B}$ ist. Wir haben also in der Ebene $[\mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ ein ebenes Polarsystem, von welchem $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt, $\mathfrak{m}_1$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ Pol und Polare und die Punktinvolution auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ bekannt ist; folglich wird die Potenz der Punktinvolution auf dem zu $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ parallelen Durchmesser sein:

$$P_A = \mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B}\cdot\frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}}.$$

Ziehen wir ferner $|\mathfrak{A}\mathfrak{M}|$, welche Gerade die gegenüberliegende Tetraëderfläche in $\mathfrak{a}$ treffe, so werden $\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}_1$ in einer Geraden liegen, und bezeichnen wir, dem Früheren entsprechend, die Perpendikel aus $\mathfrak{M}$ und aus $\mathfrak{A}$ auf die Seitenfläche $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ durch P_1 und H_1, so haben wir:

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}} = \frac{P_1}{H_1} = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}\cdot\frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}},$$

folglich
$$P_A = \mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,.\,\frac{P_1}{H_1};$$

vertauschen wir dagegen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit einander, und bezeichnen wir in gleicher Weise die aus $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ auf die gegenüberliegende Seitenfläche des Tetraëders $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ herabgelassenen Perpendikel durch P_2 und H_2, so erhalten wir ebenso

$$P_A = \mathfrak{m}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{B}\mathfrak{A}\,.\,\frac{P_2}{H_2}.$$

Wir bemerken noch, daſs aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{P_1}{H_1} + \frac{P_2}{H_2} = P_A\left\{\frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{B}\mathfrak{A}}\right\}$$
$$= \frac{P_A}{\mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}}.$$

Bezeichnen wir in gleicher Weise die Perpendikel aus $\mathfrak{M}$ auf die übrigen Tetraëderflächen durch P_3 und P_4, die mit ihnen parallelen Höhen durch H_3 und H_4, so haben wir die beiden Relationen:

$$\begin{cases} \dfrac{P_1}{H_1} + \dfrac{P_2}{H_2} = \dfrac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}} \\[2ex] \dfrac{P_3}{H_3} + \dfrac{P_4}{H_4} = \dfrac{\mathfrak{m}\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}, \end{cases}$$

woraus beiläufig folgt:

$$\frac{P_1}{H_1} + \frac{P_2}{H_2} + \frac{P_3}{H_3} + \frac{P_4}{H_4} = 1,$$

wovon wir später Gebrauch machen werden.

Wenn wir die beiden vorigen Beziehungen in der Form:

$$\frac{1}{P_1 H_1} = \frac{1}{P_A} \cdot \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}}{H_1^2}; \quad \frac{1}{P_2 H_2} = \frac{1}{P_A} \cdot \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{A}}{H_2^2}$$

addieren, so folgt:

$$\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} = \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2}{P_A} \left\{ \frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + \frac{1}{H_2^2} \cdot \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} \right\}.$$

An Stelle der Höhen H_1 H_2 auf der rechten Seite können wir die Perpendikel aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf die Gegenkante $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ einführen. Bezeichnen wir das Perpendikel aus $\mathfrak{A}$ auf $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ durch $h_{\mathfrak{A}}$, das Perpendikel aus $\mathfrak{B}$ auf $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ durch $h_{\mathfrak{B}}$, so wird das Volumen des Tetraëders sich so ausdrücken lassen:

$$6v = \mathfrak{C}\mathfrak{D} \cdot h_{\mathfrak{A}} \cdot H_2 = \mathfrak{C}\mathfrak{D} \cdot h_{\mathfrak{B}} \cdot H_1,$$

also wird:

$$\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} = \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2 \cdot (\mathfrak{C}\mathfrak{D})^2}{P_A \cdot (6v)^2} \left\{ h_{\mathfrak{B}}^2 \cdot \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + h_{\mathfrak{A}}^2 \cdot \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} \right\},$$

oder, da das Tetraëdervolumen (S. 210) sich so ausdrücken läfst:

$$6v = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{D} \cdot \sin(|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|) \cdot k,$$

wo k die kürzeste Entfernung zwischen den Gegenkanten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ bedeutet, so wird

$$\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} = \frac{1}{P_A \sin^2(A, B)} \cdot \frac{1}{k^2} \left\{ h_{\mathfrak{B}}^2 \cdot \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + h_{\mathfrak{A}}^2 \cdot \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} \right\};$$

da die kürzeste Entfernung zwischen den Gegenkanten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$

$$k = \mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 \cdot \sin(C, [AB]),$$

so wird auch:

$$k^2 \cdot \sin^2(A, B) = (\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1)^2 \, S^2(ABC).$$

Denken wir uns nun in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{p}$ der Geraden $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ eine Normalebene auf derselben errichtet und die Punkte $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{B}$ auf diese projiziert, so dafs die Fufspunkte der von ihnen auf diese Ebene herabgelassenen Perpendikel $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{m}'$ $\mathfrak{B}'$ werden, also:

$$h_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{p}\mathfrak{A}', \quad \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{m}'\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'}$$

$$h_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{p}\mathfrak{B}', \quad \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{m}'\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'},$$

so wird nach einem bekannten Elementarsatze für das ebene Dreieck $\mathfrak{p}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'$ (S. 414):

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{A}')^2 \frac{\mathfrak{m}'\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'} + (\mathfrak{p}\mathfrak{B}')^2 \frac{\mathfrak{m}'\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'} = -(\mathfrak{p}\mathfrak{m}')^2 + \mathfrak{m}'\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{m}'\mathfrak{B}';$$

da aber

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{m}')^2 = (\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1)^2 \cdot \sin^2(B, C),$$
$$\mathfrak{m}'\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{m}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{m}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{B} \cdot \sin^2(B, A)$$

ist, so vereinfacht sich unser obiger Ausdruck:

$$\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} = -\frac{1}{P_A} \cdot \frac{\sin^2(B, C)}{S^2(A B C)} + \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{B}}{\cdot P_A} \cdot \frac{1}{k^2},$$

d. h. nach S. 527:

$$= -\frac{1}{P_A \cdot \sin^2(A, [BC])} + \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

Eine zweite durchaus analoge Beziehung erhalten wir, wenn wir die Kante $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ mit der Kante $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ oder den Durchmesser A mit dem Durchmesser B vertauschen, nämlich:

$$\frac{1}{P_3 H_3} + \frac{1}{P_4 H_4} = -\frac{1}{P_B \cdot \sin^2(B, [CA])} + \frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}\mathfrak{m}} \cdot \frac{1}{k^2},$$

und die Summe der beiden letzten Relationen giebt:

$$\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} + \frac{1}{P_3 H_3} + \frac{1}{P_4 H_4} =$$

$$-\frac{1}{P_A \cdot \sin^2(A, [BC])} - \frac{1}{P_B \cdot \sin^2(B, [CA])} + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1} + \frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}\mathfrak{m}}\right).$$

Es ist aber:

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1} + \frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}\mathfrak{m}} = \frac{(\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1)^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{M}} = -\frac{(\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1)^2}{P_C}$$

$$= -k^2 \frac{1}{P_C \cdot \sin^2(C, [AB])}.$$

Mithin erhalten wir folgendes Resultat:

$$\frac{1}{P_A \sin^2(A, [BC])} + \frac{1}{P_B \sin^2(B, [CA])} + \frac{1}{P_C \sin^2(C, [AB])}$$

$$= -\left\{\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} + \frac{1}{P_3 H_3} + \frac{1}{P_4 H_4}\right\}.\text{*)}$$

---

*) Dieser Satz ist von v. Staudt in der Schrift: „Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen II. Ordnung" (Nürnberg 1867) S. 57 ohne Beweis angegeben.

Dieser Satz giebt die noch fehlende dritte Konstante, denn, da

$$S^2(ABC) = \sin^2(B,C) . \sin^2(A,[BC]) = \sin^2(C,A)\sin^2(B,[CA])$$
$$= \sin^2(A,B)\sin^2(C,[AB])$$

ist, so folgt:

$$\frac{P_B P_C \sin^2(B,C) + P_C P_A \sin^2(C,A) + P_A P_B \sin^2(A,B)}{P_A P_B P_C S^2(ABC)}$$
$$= -\left\{\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} + \frac{1}{P_3 H_3} + \frac{1}{P_4 H_4}\right\},$$

also nach dem Obigen (S. 539):

$$\text{III)}\quad P_B P_C \sin^2(B,C) + P_C P_A \sin^2(C,A) + P_A P_B \sin^2(A,B)$$
$$= (6v)^2 \cdot \frac{P_1 P_2 P_3 P_4}{H_1 H_2 H_3 H_4}\left\{\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} + \frac{1}{P_3 H_3} + \frac{1}{P_4 H_4}\right\},$$

ein Satz, der sich leicht in Worten aussprechen läſst, aber kürzer so ausgedrückt werden kann:

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = -\left\{\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} + \frac{1}{P_3 H_3} + \frac{1}{P_4 H_4}\right\},$$

d. h.: Wenn man von dem Mittelpunkte eines räumlichen Polarsystems die Perpendikel fällt auf die Seitenflächen eines beliebigen Polartetraëders, die Längen derselben mit den gleichlaufenden Tetraëderhöhen multipliziert und die negative Summe der reziproken Produkte bildet, so erhält man einen konstanten Wert, der gleich ist der Summe der reziproken Potenzen der Punktinvolutionen auf den drei Hauptaxen des Polarsystems.

Auch das erste oben gefundene Resultat:

$$\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} = -\frac{1}{P_A \sin^2(A,[BC])} + \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1} \cdot \frac{1}{k^2}$$

läſst sich als Satz aussprechen, wenn wir die beiden konjugierten Strahlen $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = s$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}| = s_1$ des räumlichen Polarsystems festhalten mit den ihnen zugehörigen Punktinvolutionen, wodurch deren Mittelpunkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$ fest bleiben, ebenso wie der zu s parallele Durchmesser A und die zugehörige Punktinvolution P_A, also die ganze rechte Seite der

letzten Gleichung, während auf der linken Seite das durch die Kante $s_1 = |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ gelegte Paar konjugierter Ebenen der zugehörigen Ebeneninvolution verändert wird; wir erhalten also folgenden Satz:

Sind s und s_1 zwei konjugierte Strahlen eines räumlichen Polarsystems, und nimmt man aus der dem Strahle s_1 zugehörigen Ebeneninvolution irgend ein Paar konjugierter Ebenen, welches von dem konjugierten Strahle s in den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ getroffen wird; fällt man aus diesen Punkten die Perpendikel H_1 H_2 auf die beiden konjugierten Ebenen und auch aus dem Mittelpunkte des Polarsystems die Perpendikel P_1 P_2 auf dieselben, so ist die Summe:

$$\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} = \text{konst.}$$

Auch die beiden übrigen Konstanten c_1 und c_3 lassen sich vermittelst des gewählten Systems der konjugierten Durchmesser A B C leicht bestimmen.

Wir haben nämlich auf S. 541 gefunden:

$$\frac{P_1}{H_1}(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2 = \frac{P_A(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2}{\mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}}; \qquad \frac{P_2}{H_2}(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2 = \frac{P_A(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2}{\mathfrak{m}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{B}\mathfrak{A}};$$

hieraus folgt durch Addition:

$$\frac{P_1}{H_1}(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2 + \frac{P_2}{H_2}(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2 = \frac{P_A}{\mathfrak{m}\mathfrak{A}\,\mathfrak{m}\mathfrak{B}}\left\{(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + (\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}\right\},$$

und da in dem ebenen Dreieck $\mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der bekannte oben angewendete Satz gilt:

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2\cdot\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + (\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2\cdot\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} = (\mathfrak{M}\mathfrak{m})^2 - \mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B},$$

aufserdem

$$\mathfrak{M}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1 = P_C$$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{m}\mathfrak{B}\cdot\frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}} = P_A$$

ist, so folgt:

$$\frac{P_1}{H_1}(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2 + \frac{P_2}{H_2}(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2 = -P_A - P_C\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}}$$

und in gleicher Weise:

$$\frac{P_3}{H_3}(\mathfrak{M}\mathfrak{C})^2 + \frac{P_4}{H_4}(\mathfrak{M}\mathfrak{D})^2 = -P_B - P_C\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1},$$

woraus folgt:

$$\frac{P_1}{H_1}(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2 + \frac{P_2}{H_2}(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2 + \frac{P_3}{H_3}(\mathfrak{M}\mathfrak{C})^2 + \frac{P_4}{H_4}(\mathfrak{M}\mathfrak{D})^2$$
$$= -\left\{P_A + P_B + P_C\right\} = -P_{\mathfrak{K}}.$$

Dafs dies in der That mit dem früher gefundenen Resultat I) in Übereinstimmung ist, können wir auch leicht direkt erkennen, wenn wir die vorige Gleichung so schreiben:

$$\frac{P_1}{H_1}(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2 + \frac{P_2}{H_2}(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2 = -\mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B}\,\frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}} + (\mathfrak{M}\mathfrak{m})^2\,\frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}}.$$

Denken wir uns nun eine Kugel dem Tetraëder umschrieben, so wird $\mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B}$ die Potenz des Punktes $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die umschriebene Kugel sein, also, wenn $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}'$ die beiden Punkte sind, in welchen die dem Tetraëder $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ umschriebene Kugel dem Durchmesser $C = |\mathfrak{M}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1|$ begegnet, so ist:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B} = \mathfrak{m}\mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{c}',$$

oder, wenn wir mit $\mathfrak{O}$ den Mittelpunkt zwischen $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}'$ bezeichnen:

$$= (\mathfrak{m}\mathfrak{O})^2 - (\mathfrak{O}\mathfrak{c})^2,$$

wir haben also:

$$\frac{P_1}{H_1}(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2 + \frac{P_2}{H_2}(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2 = -(\mathfrak{m}\mathfrak{O})^2\cdot\frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}} + (\mathfrak{O}\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{m}^2)\,\frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}}$$

und ebenso:

$$\frac{P_3}{H_3}(\mathfrak{M}\mathfrak{C})^2 + \frac{P_4}{H_4}(\mathfrak{M}\mathfrak{D})^2 = -(\mathfrak{m}_1\mathfrak{O})^2\cdot\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1} + (\mathfrak{O}\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{m}_1^2)\,\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}.$$

Da nun nach dem bekannten oben angewendeten Elementarsatze:

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{O})^2\,.\,\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}} + (\mathfrak{M}_1\mathfrak{O})^2\cdot\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1} = -(\mathfrak{M}\mathfrak{O})^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1$$

ist, so folgt:

$$\frac{P_1}{H_1}(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2 + \frac{P_2}{H_2}(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2 + \frac{P_3}{H_3}(\mathfrak{M}\mathfrak{C})^2 + \frac{P_4}{H_4}(\mathfrak{M}\mathfrak{D})^2$$
$$= -(\mathfrak{M}\mathfrak{O})^2 + (\mathfrak{O}\mathfrak{c})^2 = -\mathfrak{M}\mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{M}\mathfrak{c}' = -P_{\mathfrak{K}}$$

w. z. b. w.

Endlich erhalten wir durch Multiplikation der beiden früheren Gleichungen:

$$\frac{P_1}{H_1}\cdot\frac{P_2}{H_2}\,\mathfrak{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B}\,.\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,.\,(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = P_A P_A$$

oder:

$$\frac{P_1}{H_1} \cdot \frac{P_2}{H_2} \mathfrak{M}\mathfrak{m} \, . \, \mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 = -\frac{P_A \cdot P_C}{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2}$$

und ebenso:

$$\frac{P_3}{H_3} \cdot \frac{P_4}{H_4} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_1\mathfrak{m} = -\frac{P_B \cdot P_C}{(\mathfrak{C}\mathfrak{D})^2},$$

also:

$$-\frac{P_1 P_2 P_3 P_4}{H_1 H_2 H_3 H_4} (\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1)^2 = P_A P_B P_C \frac{1}{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2 \, . \, (\mathfrak{C}\mathfrak{D})^2}.$$

Es ist aber offenbar:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 \, . \, \sin (C, [AB]) = k,$$

wo k die kürzeste Distanz zwischen den beiden Gegenkanten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ bedeutet, und das Tetraëdervolumen:

$$6v = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \, . \, (\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \, . \, k \, . \, \sin (|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|)$$

(S. 210), folglich erhalten wir:

$$-\frac{P_1 P_2 P_3 P_4}{H_1 H_2 H_3 H_4} (6v)^2 = P_A \, . \, P_B \, . \, P_C \, . \, S^2(ABC),$$

was unsere obige Relation II) ist. (S. 539.)

§ 60. Weitere Beziehungen metrischer Art.

Die im vorigen Paragraphen gefundene Beziehung:

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = -\left\{\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} + \frac{1}{P_3 H_3} + \frac{1}{P_4 H_4}\right\}$$

läfst noch eine andere Form zu, auf welche wir hier eingehen wollen.

Wir haben oben (S. 541) gefunden:

$$P_A = \mathfrak{m}\mathfrak{A} \, . \, \mathfrak{m}\mathfrak{B} \, . \, \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1};$$

wenn wir aus den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Perpendikel fällen auf die Ebene $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]$ oder $[BC]$ (Fig. 26) und diese Perpendikel bezeichnen durch

$$P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \quad \text{und} \quad P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]},$$

so ist:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{A} \, . \, \sin (A, [BC]) = P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}$$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{B} \, . \, \sin (A, [BC]) = P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]},$$

folglich:

$$P_A \, . \, \sin^2 (A, [BC]) = P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \cdot \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}.$$

Wir haben ferner auf S. 544 gefunden:

$$\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} = -\frac{1}{P_A \sin^2(A, [BC])} + \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1} \cdot \frac{1}{k^2},$$

wo k die kürzeste Distanz der Gegenkanten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ des Tetraëders bedeutet; es folgt also:

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}\left\{\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2}\right\} = \frac{-1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}} + \frac{1}{k^2}.$$

Endlich haben wir auf S. 541 die Beziehung ermittelt:

$$\frac{P_1}{H_1} + \frac{P_2}{H_2} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1},$$

also können wir die vorige Beziehung auch so schreiben:

$$\left\{\frac{P_1}{H_1} + \frac{P_2}{H_2}\right\}\left\{\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2}\right\} = -\frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}} + \frac{1}{k^2}.$$

In gleicher Weise erhalten wir, wenn wir die Kante $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ an Stelle der Kante $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ setzen:

$$\left\{\frac{P_3}{H_3} + \frac{P_4}{H_4}\right\}\left\{\frac{1}{P_3 H_3} + \frac{1}{P_4 H_4}\right\} = -\frac{1}{P^{\mathfrak{C}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{M}]} \cdot P^{\mathfrak{D}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{M}]}} + \frac{1}{k^2}.$$

Solcher Beziehungen können wir jetzt für jedes der drei Paare Gegenkanten des Tetraëders $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ zwei aufstellen, und alle sechs Gleichungen addieren; auf der rechten Seite vom Gleichheitszeichen tritt dann zuerst als negativer Teil eine Summe von sechs Gliedern auf, die wir der Kürze wegen durch ein Summenzeichen ausdrücken, indem wir nur ein allgemeines Glied der Summe hinschreiben, also:

$$-\sum^{(6)} \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}},$$

sodann, wenn

k die kürzeste Entfernung der Gegenkanten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$
l „ „ „ „ „ $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ „ $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}|$
m „ „ „ „ „ $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$ „ $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$

bezeichnet, als positiver Teil:

$$2\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2}\right),$$

eine Gröfse, die wir bekanntlich ersetzen können durch:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{H_1^2} + \frac{1}{H_2^2} + \frac{1}{H_3^2} + \frac{1}{H_4^2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2}\right);^{*)}$$

*) Eine von F. Joachimsthal angegebene Beziehung (vergl. R. Baltzer: Die Elemente der Mathematik, Buch VI, § 6, S. 351).

bezeichnen wir endlich zur Abkürzung die Produkte und Quotienten:

$$\frac{1}{P_1 H_1} = p_1, \quad \frac{1}{P_2 H_2} = p_2, \quad \frac{1}{P_3 H_3} = p_3, \quad \frac{1}{P_4 H_4} = p_4,$$

$$\frac{P_1}{H_1} = q_1, \quad \frac{P_2}{H_2} = q_2, \quad \frac{P_3}{H_3} = q_3, \quad \frac{P_4}{H_4} = q_4,$$

so giebt die Summe der obigen sechs Gleichungen folgendes Resultat:

$$\begin{aligned}&(p_1+p_2)(q_1+q_2)+(p_3+p_4)(q_3+q_4)\\ &+(p_1+p_3)(q_1+q_3)+(p_2+p_4)(q_2+q_4)\\ &+(p_1+p_4)(q_1+q_4)+(p_2+p_3)(q_2+q_3)\\ &=2\left\{\frac{1}{H_1^2}+\frac{1}{H_2^2}+\frac{1}{H_3^2}+\frac{1}{H_4^2}\right\}-\sum^{(6)}\frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}\cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}}.\end{aligned}$$

Die ausgeführte Multiplikation auf der linken Seite vom Gleichheitszeichen giebt 24 Glieder, die sich offenbar so zusammenziehen lassen:

$$2\{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4\} + \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4\}\{q_1 + q_2 + q_3 + q_4\}.$$

Da aber

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 = \frac{1}{H_1^2}+\frac{1}{H_2^2}+\frac{1}{H_3^2}+\frac{1}{H_4^2}$$

und (S. 542)

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$$

ist, so folgt die merkwürdige Beziehung:

$$\text{I)}\quad \frac{1}{P_1 H_1}+\frac{1}{P_2 H_2}+\frac{1}{P_3 H_3}+\frac{1}{P_4 H_4} = -\sum^{(6)}\frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}\cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}},$$

oder nach dem Obigen (S. 544, III)):

$$\frac{1}{P_a}+\frac{1}{P_b}+\frac{1}{P_c} = \sum^{(6)}\frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}\cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}},$$

oder, wenn wir die frühere Bezeichnung restituieren:

$$= \sum^{(6)}\frac{1}{\mathrm{m}\mathfrak{A}\,.\,\mathrm{m}\mathfrak{B}\,\sin^2(A,[BC])},$$

d. h.: W e n n m a n i n e i n e m r ä u m l i c h e n P o l a r s y s t e m, d e s s e n M i t t e l p u n k t $\mathfrak{M}$ i s t, e i n b e l i e b i g e s P o l a r t e t r a ë d e r ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$) n i m m t, s o i s t j e d e K a n t e d e s s e l b e n d e r T r ä g e r e i n e r P u n k t i n v o l u t i o n; m u l t i p l i z i e r t m a n d i e P o t e n z d i e s e r P u n k t i n v o l u t i o n

$\frac{1}{P_1 H_1}$ + ... Neigungswinkels
...gierte Ebene durch
... Summe der rezipro-
...dukte konstant sein,

wo k die kü... ...er reziproken Werte
Tetraëders ... ...tinvolutionen auf den
...

En... ...n der Form geschrieben:

$$\sum_{(6)} \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}} = 0$$

also ... ...er konjugierten Durchmesser
... ...tz, wenn wir nur bedenken,
... Perpendikel sind, wie sie

In ... $\sum$ stehen, nämlich P_1 das aus
a... ...Perpendikel und H_1 das aus $\mathfrak{A}$
...Perpendikel u. s. f.; wir können also
...er letzten Gleichung mit den sechs
...n den vier Punkten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$
... $\mathfrak{M}$ als gleichwertig hinzufügen
...assen, dafs $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt
...nes Polartetraëders im räumlichen
...tes liefert folgenden Satz:

...beliebige Punkte im Raume
... drei derselben durch eine
... aus den beiden übrigen die
... Ebene herablassen; das Pro-
... Perpendikel wird negativ oder
...dem die Ebene diese beiden
... nicht trennt; man erhält im
... Produkte; die algebraische
...oken Werte dieser zehn Pro-

...interessanten Satz auch direkt be-
...aussch...ken folgenden

...Raume sich nicht treffende Ge-

... 38.

rade s und s_1 gegeben sind, und durch s drei beliebige Ebenen $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$ gelegt werden, welche der Geraden s_1 in den Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ begegnen, wenn man ferner aus je zweien dieser Punkte auf die Ebene, welche durch den dritten Punkt geht, Perpendikel herabläſst und die Summe der reziproken Produkte dieser Perpendikel bildet, so erhält man das reziproke Quadrat des kürzesten Abstandes zwischen den beiden Geraden $s\,s_1$, oder in Zeichen:

$$\frac{1}{P^{\mathfrak{a}_2}_{\varepsilon_1}\,P^{\mathfrak{a}_3}_{\varepsilon_1}}+\frac{1}{P^{\mathfrak{a}_3}_{\varepsilon_2}\,P^{\mathfrak{a}_1}_{\varepsilon_2}}+\frac{1}{P^{\mathfrak{a}_1}_{\varepsilon_3}\,P^{\mathfrak{a}_2}_{\varepsilon_3}}=\frac{1}{k^2},$$

wo $P^{\mathfrak{a}_i}_{\varepsilon_k}$ das Perpendikel aus dem Punkte $\mathfrak{a}_i$ auf die Ebene ε_k bedeutet und k die kürzeste Entfernung zwischen den gegebenen beiden Geraden s und s_1 bezeichnet.

Zum Beweise dieses Satzes durchschneiden wir die Figur durch eine Transversalebene ε, welche auf dem Strahle s rechtwinklig stehe in dem Punkte $\mathfrak{O}$; läſst man von $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ die drei Perpendikel auf diese Ebene herab, und seien die Fuſspunkte derselben $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3$, so gilt der Satz:

$$\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_1^2}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\,.\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3}+\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_2^2}{\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\,.\,\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1}+\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_3^2}{\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_1\,.\,\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_2}=1.$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{b}_i\,\mathfrak{b}_k=\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k\,.\,\sin\,(s,\,s_1)$$

und, wenn h_i das Perpendikel bezeichnet, welches von $\mathfrak{a}_i$ auf die Gerade s herabgelassen wird:

$$\mathfrak{O}\,\mathfrak{b}_i=h_i,$$

wonach die vorige Beziehung die Gestalt annimmt:

$$\frac{h_1^2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\,.\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3}+\frac{h_2^2}{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\,.\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1}+\frac{h_3^2}{\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1\,.\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2}=\sin^2\,(s,\,s_1).$$

Nehmen wir nun in dem Strahle s zwei beliebige Punkte $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$ an, dann läſst sich das Volumen v des Tetraëders $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k$ in doppelter Weise ausdrücken:

$$6\,v=(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2)\,.\,(\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k)\,.\,\sin\,(s,\,s_1)\,.\,k=(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2)\,.\,h_i\,.\,P^{\mathfrak{a}_k}_{\varepsilon_i},$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k\,.\,\sin\,(s,\,s_1)\,.\,k=h_i\,.\,P^{\mathfrak{a}_k}_{\varepsilon_i},$$

mit dem Quadrate des Sinus des Neigungswinkels ihrer Richtung gegen die konjugierte Ebene durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$, so wird die Summe der reziproken Werte dieser sechs Produkte konstant sein, nämlich gleich der Summe der reziproken Werte der Potenzen der drei Punktinvolutionen auf den Hauptaxen des Polarsystems.

Aber die Relation I) selbst, in der Form geschrieben:

$$\frac{1}{P_1H_1} + \frac{1}{P_2H_2} + \frac{1}{P_3H_3} + \frac{1}{P_4H_4} + \sum^{(6)} \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}} = 0$$

liefert einen von der Theorie der konjugierten Durchmesser unabhängigen geometrischen Satz, wenn wir nur bedenken, daſs P_1H_1 etc. ebenfalls solche Perpendikel sind, wie sie unter dem Summenzeichen $\sum^{6}$ stehen, nämlich P_1 das aus $\mathfrak{M}$ auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ herabgelassene Pespendikel und H_1 das aus $\mathfrak{A}$ auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ herabgelassene Perpendikel u. s. f.; wir können also die vier ersten Glieder der letzten Gleichung mit den sechs übrigen vereinigen, wenn wir den vier Punkten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ im Raume den fünften Punkt $\mathfrak{M}$ als gleichwertig hinzufügen und die Auffassung fallen lassen, daſs $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die Ecken eines Polartetraëders im räumlichen Polarsystem sein sollen. Dies liefert folgenden Satz:

Wenn man fünf beliebige Punkte im Raume hat, so kann man je drei derselben durch eine Ebene verbinden und aus den beiden übrigen die Perpendikel auf diese Ebene herablassen; das Produkt dieser beiden Perpendikel wird negativ oder positiv sein, je nachdem die Ebene diese beiden Punkte trennt oder nicht trennt; man erhält im ganzen zehn solcher Produkte; die algebraische Summe der reziproken Werte dieser zehn Produkte ist null.*)

Wir können diesen interessanten Satz auch direkt beweisen, wenn wir vorausschicken folgenden

Hilfssatz:

Wenn zwei im Raume sich nicht treffende Ge-

*) v. Staudt a. a. O. S. 58.

rade s und s_1 gegeben sind, und durch s drei beliebige Ebenen $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$ gelegt werden, welche der Geraden s_1 in den Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ begegnen, wenn man ferner aus je zweien dieser Punkte auf die Ebene, welche durch den dritten Punkt geht, Perpendikel herabläſst und die Summe der reziproken Produkte dieser Perpendikel bildet, so erhält man das reziproke Quadrat des kürzesten Abstandes zwischen den beiden Geraden $s\,s_1$, oder in Zeichen:

$$\frac{1}{P_{\varepsilon_1}^{\mathfrak{a}_2}\,P_{\varepsilon_1}^{\mathfrak{a}_3}}+\frac{1}{P_{\varepsilon_2}^{\mathfrak{a}_3}\,P_{\varepsilon_2}^{\mathfrak{a}_1}}+\frac{1}{P_{\varepsilon_3}^{\mathfrak{a}_1}\,P_{\varepsilon_3}^{\mathfrak{a}_2}}=\frac{1}{k^2},$$

wo $P_{\varepsilon_k}^{\mathfrak{a}_i}$ das Perpendikel aus dem Punkte $\mathfrak{a}_i$ auf die Ebene ε_k bedeutet und k die kürzeste Entfernung zwischen den gegebenen beiden Geraden s und s_1 bezeichnet.

Zum Beweise dieses Satzes durchschneiden wir die Figur durch eine Transversalebene ε, welche auf dem Strahle s rechtwinklig stehe in dem Punkte $\mathfrak{O}$; läſst man von $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ die drei Perpendikel auf diese Ebene herab, und seien die Fuſspunkte derselben $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3$, so gilt der Satz:

$$\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_1^2}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\,.\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3}+\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_2^2}{\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\,.\,\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1}+\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_3^2}{\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_1\,.\,\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_2}=1.$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{b}_i\,\mathfrak{b}_k=\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k\,.\,\sin(s,s_1)$$

und, wenn h_i das Perpendikel bezeichnet, welches von $\mathfrak{a}_i$ auf die Gerade s herabgelassen wird:

$$\mathfrak{O}\,\mathfrak{b}_i=h_i,$$

wonach die vorige Beziehung die Gestalt annimmt:

$$\frac{h_1^2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\,.\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3}+\frac{h_2^2}{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\,.\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1}+\frac{h_3^2}{\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1\,.\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2}=\sin^2(s,s_1).$$

Nehmen wir nun in dem Strahle s zwei beliebige Punkte $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$ an, dann läſst sich das Volumen v des Tetraëders $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k$ in doppelter Weise ausdrücken:

$$6\,v=(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2)\,.\,(\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k)\,.\,\sin(s,s_1)\,.\,k=(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2)\,.\,h_i\,.\,P_{\varepsilon_i}^{\mathfrak{a}_k},$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k\,.\,\sin(s,s_1)\,.\,k=h_i\,.\,P_{\varepsilon_i}^{\mathfrak{a}_k},$$

mit dem Quadrate des Sinus des Neigungswinkels ihrer Richtung gegen die konjugierte Ebene durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$, so wird die Summe der reziproken Werte dieser sechs Produkte konstant sein, nämlich gleich der Summe der reziproken Werte der Potenzen der drei Punktinvolutionen auf den Hauptaxen des Polarsystems.

Aber die Relation I) selbst, in der Form geschrieben:

$$\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} + \frac{1}{P_3 H_3} + \frac{1}{P_4 H_4} + \sum^{(6)} \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}} = 0$$

liefert einen von der Theorie der konjugierten Durchmesser unabhängigen geometrischen Satz, wenn wir nur bedenken, dafs $P_1 H_1$ etc. ebenfalls solche Perpendikel sind, wie sie unter dem Summenzeichen $\sum^{6}$ stehen, nämlich P_1 das aus $\mathfrak{M}$ auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ herabgelassene Pespendikel und H_1 das aus $\mathfrak{A}$ auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ herabgelassene Perpendikel u. s. f.; wir können also die vier ersten Glieder der letzten Gleichung mit den sechs übrigen vereinigen, wenn wir den vier Punkten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ im Raume den fünften Punkt $\mathfrak{M}$ als gleichwertig hinzufügen und die Auffassung fallen lassen, dafs $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die Ecken eines Polartetraëders im räumlichen Polarsystem sein sollen. Dies liefert folgenden Satz:

Wenn man fünf beliebige Punkte im Raume hat, so kann man je drei derselben durch eine Ebene verbinden und aus den beiden übrigen die Perpendikel auf diese Ebene herablassen; das Produkt dieser beiden Perpendikel wird negativ oder positiv sein, je nachdem die Ebene diese beiden Punkte trennt oder nicht trennt; man erhält im ganzen zehn solcher Produkte; die algebraische Summe der reziproken Werte dieser zehn Produkte ist null.*)

Wir können diesen interessanten Satz auch direkt beweisen, wenn wir vorausschicken folgenden

Hilfssatz:

Wenn zwei im Raume sich nicht treffende Ge-

*) v. Staudt a. a. O. S. 58.

rade s und s_1 gegeben sind, und durch s drei beliebige Ebenen $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$ gelegt werden, welche der Geraden s_1 in den Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ begegnen, wenn man ferner aus je zweien dieser Punkte auf die Ebene, welche durch den dritten Punkt geht, Perpendikel herabläſst und die Summe der reziproken Produkte dieser Perpendikel bildet, so erhält man das reziproke Quadrat des kürzesten Abstandes zwischen den beiden Geraden $s\,s_1$, oder in Zeichen:

$$\frac{1}{P_{\varepsilon_1}^{\mathfrak{a}_2}\,P_{\varepsilon_1}^{\mathfrak{a}_3}}+\frac{1}{P_{\varepsilon_2}^{\mathfrak{a}_3}\,P_{\varepsilon_2}^{\mathfrak{a}_1}}+\frac{1}{P_{\varepsilon_3}^{\mathfrak{a}_1}\,P_{\varepsilon_3}^{\mathfrak{a}_2}}=\frac{1}{k^2},$$

wo $P_{\varepsilon_k}^{\mathfrak{a}_i}$ das Perpendikel aus dem Punkte $\mathfrak{a}_i$ auf die Ebene ε_k bedeutet und k die kürzeste Entfernung zwischen den gegebenen beiden Geraden s und s_1 bezeichnet.

Zum Beweise dieses Satzes durchschneiden wir die Figur durch eine Transversalebene ε, welche auf dem Strahle s rechtwinklig stehe in dem Punkte $\mathfrak{O}$; läſst man von $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ die drei Perpendikel auf diese Ebene herab, und seien die Fuſspunkte derselben $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3$, so gilt der Satz:

$$\frac{\mathfrak{O}\,\mathfrak{b}_1^2}{\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,.\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_3}+\frac{\mathfrak{O}\,\mathfrak{b}_2^2}{\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\,.\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_1}+\frac{\mathfrak{O}\,\mathfrak{b}_3^2}{\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_1\,.\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_2}=1.$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{b}_i\,\mathfrak{b}_k=\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k\,.\,\sin(s,s_1)$$

und, wenn h_i das Perpendikel bezeichnet, welches von $\mathfrak{a}_i$ auf die Gerade s herabgelassen wird:

$$\mathfrak{O}\,\mathfrak{b}_i=h_i,$$

wonach die vorige Beziehung die Gestalt annimmt:

$$\frac{h_1^2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\,.\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3}+\frac{h_2^2}{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\,.\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1}+\frac{h_3^2}{\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1\,.\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2}=\sin^2(s,s_1).$$

Nehmen wir nun in dem Strahle s zwei beliebige Punkte $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$ an, dann läſst sich das Volumen v des Tetraëders $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k$ in doppelter Weise ausdrücken:

$$6\,v=(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2)\,.\,(\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k)\,.\,\sin(s,s_1)\,.\,k=(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2)\,.\,h_i\,.\,P_{\varepsilon_i}^{\mathfrak{a}_k},$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k\,.\,\sin(s,s_1)\,.\,k=h_i\,.\,P_{\varepsilon_i}^{\mathfrak{a}_k},$$

mit dem Quadrate des Sinus des Neigungswinkels ihrer Richtung gegen die konjugierte Ebene durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$, so wird die Summe der reziproken Werte dieser sechs Produkte konstant sein, nämlich gleich der Summe der reziproken Werte der Potenzen der drei Punktinvolutionen auf den Hauptaxen des Polarsystems.

Aber die Relation I) selbst, in der Form geschrieben:

$$\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2} + \frac{1}{P_3 H_3} + \frac{1}{P_4 H_4} + \sum^{(6)} \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}} = 0$$

liefert einen von der Theorie der konjugierten Durchmesser unabhängigen geometrischen Satz, wenn wir nur bedenken, dafs $P_1 H_1$ etc. ebenfalls solche Perpendikel sind, wie sie unter dem Summenzeichen $\sum^{6}$ stehen, nämlich P_1 das aus $\mathfrak{M}$ auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ herabgelassene Pespendikel und H_1 das aus $\mathfrak{A}$ auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ herabgelassene Perpendikel u. s. f.; wir können also die vier ersten Glieder der letzten Gleichung mit den sechs übrigen vereinigen, wenn wir den vier Punkten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ im Raume den fünften Punkt $\mathfrak{M}$ als gleichwertig hinzufügen und die Auffassung fallen lassen, dafs $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die Ecken eines Polartetraëders im räumlichen Polarsystem sein sollen. Dies liefert folgenden Satz:

Wenn man fünf beliebige Punkte im Raume hat, so kann man je drei derselben durch eine Ebene verbinden und aus den beiden übrigen die Perpendikel auf diese Ebene herablassen; das Produkt dieser beiden Perpendikel wird negativ oder positiv sein, je nachdem die Ebene diese beiden Punkte trennt oder nicht trennt; man erhält im ganzen zehn solcher Produkte; die algebraische Summe der reziproken Werte dieser zehn Produkte ist null.*)

Wir können diesen interessanten Satz auch direkt beweisen, wenn wir vorausschicken folgenden

Hilfssatz:

Wenn zwei im Raume sich nicht treffende Ge-

*) v. Staudt a. a. O. S. 58.

rade s und s_1 gegeben sind, und durch s drei beliebige Ebenen $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ gelegt werden, welche der Geraden s_1 in den Punkten $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3$ begegnen, wenn man ferner aus je zweien dieser Punkte auf die Ebene, welche durch den dritten Punkt geht, Perpendikel herabläfst und die Summe der reziproken Produkte dieser Perpendikel bildet, so erhält man das reziproke Quadrat des kürzesten Abstandes zwischen den beiden Geraden $s s_1$, oder in Zeichen:

$$\frac{1}{P_{\varepsilon_1}^{\mathfrak{a}_2} P_{\varepsilon_1}^{\mathfrak{a}_3}} + \frac{1}{P_{\varepsilon_2}^{\mathfrak{a}_3} P_{\varepsilon_2}^{\mathfrak{a}_1}} + \frac{1}{P_{\varepsilon_3}^{\mathfrak{a}_1} P_{\varepsilon_3}^{\mathfrak{a}_2}} = \frac{1}{k^2},$$

wo $P_{\varepsilon_k}^{\mathfrak{a}_i}$ das Perpendikel aus dem Punkte $\mathfrak{a}_i$ auf die Ebene ε_k bedeutet und k die kürzeste Entfernung zwischen den gegebenen beiden Geraden s und s_1 bezeichnet.

Zum Beweise dieses Satzes durchschneiden wir die Figur durch eine Transversalebene ε, welche auf dem Strahle s rechtwinklig stehe in dem Punkte $\mathfrak{O}$; läfst man von $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3$ die drei Perpendikel auf diese Ebene herab, und seien die Fufspunkte derselben $\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{b}_3$, so gilt der Satz:

$$\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_1^2}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \cdot \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3} + \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_2^2}{\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 \cdot \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1} + \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_3^2}{\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_2} = 1.$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k \cdot \sin(s, s_1)$$

und, wenn h_i das Perpendikel bezeichnet, welches von $\mathfrak{a}_i$ auf die Gerade s herabgelassen wird:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{b}_i = h_i,$$

wonach die vorige Beziehung die Gestalt annimmt:

$$\frac{h_1^2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3} + \frac{h_2^2}{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1} + \frac{h_3^2}{\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2} = \sin^2(s, s_1).$$

Nehmen wir nun in dem Strahle s zwei beliebige Punkte $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2$ an, dann läfst sich das Volumen v des Tetraëders $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{a}_i\ \mathfrak{a}_k$ in doppelter Weise ausdrücken:

$$6v = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2) \cdot (\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k) \cdot \sin(s, s_1) \cdot k = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2) \cdot h_i \cdot P_{\varepsilon_i}^{\mathfrak{a}_k},$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k \cdot \sin(s, s_1) \cdot k = h_i \cdot P_{\varepsilon_i}^{\mathfrak{a}_k},$$

mit dem Quadrate des Sinus des Neigungswinkels ihrer Richtung gegen die konjugierte Ebene durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$, so wird die Summe der reziproken Werte dieser sechs Produkte konstant sein, nämlich gleich der Summe der reziproken Werte der Potenzen der drei Punktinvolutionen auf den Hauptaxen des Polarsystems.

Aber die Relation I) selbst, in der Form geschrieben:

$$\frac{1}{P_1H_1}+\frac{1}{P_2H_2}+\frac{1}{P_3H_3}+\frac{1}{P_4H_4}+\sum^{(6)}\frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}\cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}}=0$$

liefert einen von der Theorie der konjugierten Durchmesser unabhängigen geometrischen Satz, wenn wir nur bedenken, daſs P_1H_1 etc. ebenfalls solche Perpendikel sind, wie sie unter dem Summenzeichen $\sum^{6}$ stehen, nämlich P_1 das aus $\mathfrak{M}$ auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ herabgelassene Pespendikel und H_1 das aus $\mathfrak{A}$ auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ herabgelassene Perpendikel u. s. f.; wir können also die vier ersten Glieder der letzten Gleichung mit den sechs übrigen vereinigen, wenn wir den vier Punkten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ im Raume den fünften Punkt $\mathfrak{M}$ als gleichwertig hinzufügen und die Auffassung fallen lassen, daſs $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ die Ecken eines Polartetraëders im räumlichen Polarsystem sein sollen. Dies liefert folgenden Satz:

Wenn man fünf beliebige Punkte im Raume hat, so kann man je drei derselben durch eine Ebene verbinden und aus den beiden übrigen die Perpendikel auf diese Ebene herablassen; das Produkt dieser beiden Perpendikel wird negativ oder positiv sein, je nachdem die Ebene diese beiden Punkte trennt oder nicht trennt; man erhält im ganzen zehn solcher Produkte; die algebraische Summe der reziproken Werte dieser zehn Produkte ist null.*)

Wir können diesen interessanten Satz auch direkt beweisen, wenn wir vorausschicken folgenden

Hilfssatz:

Wenn zwei im Raume sich nicht treffende Ge-

*) v. Staudt a. a. O. S. 58.

rade s und s_1 gegeben sind, und durch s drei beliebige Ebenen $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3$ gelegt werden, welche der Geraden s_1 in den Punkten $\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3$ begegnen, wenn man ferner aus je zweien dieser Punkte auf die Ebene, welche durch den dritten Punkt geht, Perpendikel herabläfst und die Summe der reziproken Produkte dieser Perpendikel bildet, so erhält man das reziproke Quadrat des kürzesten Abstandes zwischen den beiden Geraden $s s_1$, oder in Zeichen:

$$\frac{1}{P_{\varepsilon_1}^{\mathfrak{a}_2} P_{\varepsilon_1}^{\mathfrak{a}_3}} + \frac{1}{P_{\varepsilon_2}^{\mathfrak{a}_3} P_{\varepsilon_2}^{\mathfrak{a}_1}} + \frac{1}{P_{\varepsilon_3}^{\mathfrak{a}_1} P_{\varepsilon_3}^{\mathfrak{a}_2}} = \frac{1}{k^2},$$

wo $P_{\varepsilon_k}^{\mathfrak{a}_i}$ das Perpendikel aus dem Punkte $\mathfrak{a}_i$ auf die Ebene ε_k bedeutet und k die kürzeste Entfernung zwischen den gegebenen beiden Geraden s und s_1 bezeichnet.

Zum Beweise dieses Satzes durchschneiden wir die Figur durch eine Transversalebene ε, welche auf dem Strahle s rechtwinklig stehe in dem Punkte $\mathfrak{O}$; läfst man von $\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3$ die drei Perpendikel auf diese Ebene herab, und seien die Fufspunkte derselben $\mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_2\, \mathfrak{b}_3$, so gilt der Satz:

$$\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_1^2}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \,.\, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3} + \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_2^2}{\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 \,.\, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1} + \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_3^2}{\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_1 \,.\, \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_2} = 1.$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{b}_i\,\mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k \,.\, \sin(s, s_1)$$

und, wenn h_i das Perpendikel bezeichnet, welches von $\mathfrak{a}_i$ auf die Gerade s herabgelassen wird:

$$\mathfrak{O}\,\mathfrak{b}_i = h_i,$$

wonach die vorige Beziehung die Gestalt annimmt:

$$\frac{h_1^2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \,.\, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3} + \frac{h_2^2}{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 \,.\, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1} + \frac{h_3^2}{\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2} = \sin^2(s, s_1).$$

Nehmen wir nun in dem Strahle s zwei beliebige Punkte $\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2$ an, dann läfst sich das Volumen v des Tetraëders $\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{a}_i\, \mathfrak{a}_k$ in doppelter Weise ausdrücken:

$$6v = (\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2) \,.\, (\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k) \,.\, \sin(s, s_1) \,.\, k = (\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2) \,.\, h_i \,.\, P_{\varepsilon_i}^{\mathfrak{a}_k},$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k \,.\, \sin(s, s_1) \,.\, k = h_i \,.\, P_{\varepsilon_i}^{\mathfrak{a}_k},$$

und diese Werte, in die letzte Beziehung eingesetzt, geben den zu beweisenden Satz:

$$\frac{1}{P_{s_1}^{a_2} \cdot P_{s_1}^{a_3}} + \frac{1}{P_{s_2}^{a_3} \cdot P_{s_2}^{a_1}} + \frac{1}{P_{s_3}^{a_1} \cdot P_{s_3}^{a_2}} = \frac{1}{k^2}.$$

Auf diesen Satz uns stützend nehmen wir ein beliebiges Tetraëder $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D})$ und irgend einen Punkt $\mathfrak{M}$ im Raume an, ziehen durch $\mathfrak{M}$ die einzige Gerade, welche dem Paare von Gegenkanten $|\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}|$ in den Punkten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$ begegnet, und legen die Ebene $[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{M}]$, dann giebt der vorige Satz die Beziehung:

$$\frac{1}{P^{\mathfrak{m}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]} \cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}} + \frac{1}{P^{\mathfrak{m}}_{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]} \cdot P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}} + \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]} \cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}} = \frac{1}{k^2},$$

wo k die kürzeste Distanz zwischen den Gegenkanten $|\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}|$ bedeutet.

Nun ist aber:

$$P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]} = H_1, \quad P^{\mathfrak{M}}_{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]} = P_1,$$

$$P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]} = H_2, \quad P^{\mathfrak{M}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]} = P_2,$$

und

$$\frac{P^{\mathfrak{M}}_{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}}{P^{\mathfrak{m}}_{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}} = \frac{P^{\mathfrak{M}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}}{P^{\mathfrak{m}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}} = \frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1},$$

woraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1}\left\{\frac{1}{P_1 H_1} + \frac{1}{P_2 H_2}\right\} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}\, P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}}.$$

Bemerken wir noch die Verhältnisse:

$$\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}} = \frac{P^{\mathfrak{m}}_{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}}{H_1}, \quad \frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1} = \frac{P_1}{P^{\mathfrak{m}}_{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}},$$

also

$$\frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1} \cdot \frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}} = \frac{P_1}{H_1}$$

und ebenso

$$\frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1} \cdot \frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}} = \frac{P_2}{H_2},$$

so folgt

$$\frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1} = \frac{P_1}{H_1} + \frac{P_2}{H_2},$$

also wird unsere vorige Gleichung:

$$\left\{\frac{P_1}{H_1}+\frac{P_2}{H_2}\right\}\left\{\frac{1}{P_1H_1}+\frac{1}{P_2H_2}\right\}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}\cdot P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}},$$

und in gleicher Weise erhalten wir durch Vertauschung des Paares von Gegenkanten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$:

$$\left\{\frac{P_3}{H_3}+\frac{P_4}{H_4}\right\}\left\{\frac{1}{P_3H_3}+\frac{1}{P_4H_4}\right\}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{P^{\mathfrak{C}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{M}]}\cdot P^{\mathfrak{D}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{M}]}}.$$

Die Summe beider Gleichungen giebt:

$$\left\{\frac{P_1}{H_1}+\frac{P_2}{H_2}\right\}\left\{\frac{1}{P_1H_1}+\frac{1}{P_2H_2}\right\}+\left\{\frac{P_3}{H_3}+\frac{P_4}{H_4}\right\}\left\{\frac{1}{P_3H_3}+\frac{1}{P_4H_4}\right\}$$
$$=\frac{2}{k^2}-\frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}\,P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}}-\frac{1}{P^{\mathfrak{C}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{M}]}\,P^{\mathfrak{D}}_{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{M}]}},$$

und solcher Gleichungen erhalten wir drei, indem jedes Paar von Gegenkanten auf eine führt. Bezeichnen wir daher zur Abkürzung

$$\frac{P_i}{H_i}=q_i\quad\frac{1}{P_iH_i}=p_i,$$

so folgt:

$$\begin{aligned}&(p_1+p_2)(q_1+q_2)+(p_3+p_4)(q_3+q_4)\\&+(p_1+p_3)(q_1+q_3)+(p_2+p_4)(q_2+q_4)\\&+(p_1+p_4)(q_1+q_4)+(p_2+p_3)(q_2+q_3)\\&=2\left\{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{l^2}+\frac{1}{m^2}\right\}-\sum^{(6)}\frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}\,P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}}.\end{aligned}$$

Da nun bekanntlich

$$\frac{1}{k^2}+\frac{1}{l^2}+\frac{1}{m^2}=\frac{1}{H_1^2}+\frac{1}{H_2^2}+\frac{1}{H_3^2}+\frac{1}{H_4^2}$$

ist, und die aus 24 Termen bestehende Summe von Produkten auf der linken Seite vom Gleichheitszeichen sich zusammenzieht auf:

$$\begin{aligned}&2\{p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+p_4q_4\}\\&+\{p_1+p_2+p_3+p_4\}\{q_1+q_2+q_3+q_4\},\end{aligned}$$

aufserdem aber

$$p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+p_4q_4=\frac{1}{H_1^2}+\frac{1}{H_2^2}+\frac{1}{H_3^2}+\frac{1}{H_4^2}$$

und
$$q_1+q_2+q_3+q_4=1$$
wird, so folgt:

$$\frac{1}{P_1H_1}+\frac{1}{P_2H_2}+\frac{1}{P_3H_3}+\frac{1}{P_4H_4}=-\sum^{(6)}\frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}\,P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}},$$

oder auch

$$\sum^{(4)} \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}\, P^{\mathfrak{M}}_{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}} + \sum^{(6)} \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}\, P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{M}]}} = 0,$$

oder endlich, wenn wir den willkürlichen fünften Punkt $\mathfrak{M}$ der Konformität wegen durch $\mathfrak{E}$ ersetzen:

$$\sum^{(10)} \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}]}\, P^{\mathfrak{B}}_{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}]}} = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Durch besondere Annahme der fünf willkürlich im Raume zu wählenden Punkte ergeben sich viele spezielle Sätze, die hier nicht angeführt werden sollen. Wir wollen nur noch kurz den analogen Satz der Ebene ableiten:

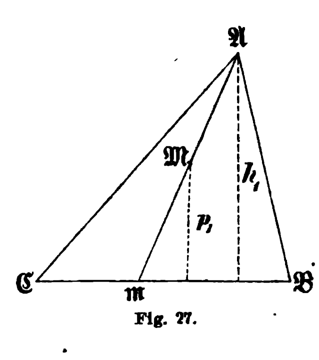


Fig. 27.

Sind $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ die Ecken eines ebenen Dreiecks, $\mathfrak{M}$ ein beliebiger vierter Punkt der Ebene und trifft $|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|$ die Gegenseite $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ in $\mathfrak{m}$, so ist bekanntlich (Fig. 27):

$$\frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2}{\mathfrak{B}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2}{\mathfrak{C}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}} + \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{m})^2}{\mathfrak{m}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{C}} = 1.$$

Ferner, wenn $h_1 h_2 h_3$ die Höhen des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $p_1 p_2 p_3$ die Perpendikel aus $\mathfrak{M}$ auf die Dreiecksseiten sind, ist:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{m})\,.\,P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|} = (\mathfrak{m}\mathfrak{B})\,.\,h_1 = (\mathfrak{B}\mathfrak{A})\,.\,p_3\,.\,\frac{h_1}{h_1-p_1}$$

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{m})\,.\,P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|} = (\mathfrak{m}\mathfrak{C})\,.\,h_1 = (\mathfrak{C}\mathfrak{A})\,.\,p_2\,.\,\frac{h_1}{h_1-p_1}$$

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C})\,.\,h_2 = (\mathfrak{C}\mathfrak{B})\,.\,h_1 = (\mathfrak{B}\mathfrak{A})\,.\,h_3,$$

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{m}\mathfrak{C}} = \frac{h_1^2}{P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|}\,P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|}}$$

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = \frac{h_1^2}{p_2 h_2}\,.\left(\frac{h_1-p_1}{h_1}\right)$$

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = \frac{h_1^2}{p_3 h_3}\,.\left(\frac{h_1-p_1}{h_1}\right),$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{1}{P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|}\cdot P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|}} + \frac{h_1-p_1}{h_1}\left\{\frac{1}{p_2 h_2} + \frac{1}{p_3 h_3}\right\} = \frac{1}{h_1^2},$$

oder auch:

$$\frac{1}{P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|} \cdot P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|}} = \left(\frac{p_1}{h_1} - 1\right)\left\{\frac{1}{p_1 h_1} + \frac{1}{p_2 h_2} + \frac{1}{p_3 h_3}\right\} + \frac{1}{p_1 h_1}.$$

Wenn wir jetzt in gleicher Weise von den Ecken $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ aus operieren, wie bisher von der Ecke $\mathfrak{A}$ aus und die erhaltenen Gleichungen addieren, so folgt wegen der Bedingung:

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1$$

die Gleichung:

$$\sum^{(3)} \frac{1}{P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|} P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|}} = -\left\{\frac{1}{p_1 h_1} + \frac{1}{p_2 h_2} + \frac{1}{p_3 h_3}\right\}$$

oder, wenn wir der Konformität wegen den Buchstaben $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{D}$ ersetzen:

$$\sum^{(6)} \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|} P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}} = 0,$$

d. h.: Wenn man vier beliebige Punkte in der Ebene hat, je zwei derselben durch eine Gerade verbindet und aus den übrigen die beiden Perpendikel auf diese Gerade fällt, so wird das Produkt derselben negativ oder positiv sein, je nachdem die verbindende Gerade die beiden übrigen Punkte trennt oder nicht trennt; die algebraische Summe der reziproken Werte der dadurch erhaltenen sechs Produkte ist Null.

Auch hier ergeben sich durch besondere Annahme der vier willkürlich zu wählenden Punkte specielle Sätze, deren Aufsuchung wir dem Leser überlassen.

Betrachtet man dagegen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ als ein Polardreieck und $\mathfrak{M}$ als den Mittelpunkt eines ebenen Polarsystems, so ist $|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|$ ein Durchmesser A und die durch $\mathfrak{M}$ zu $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ parallel gezogene Gerade der konjugierte Durchmesser B für dies Polarsystem, und es sind leicht die Potenzen der zugehörigen Punktinvolutionen zu ermitteln, nämlich:

$$P_A = \mathfrak{M}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{M}\mathrm{m}; \qquad P_A \sin^2(A,B) = -p_1(h_1 - p_1),$$

$$P_B = \mathrm{m}\mathfrak{B} \cdot \frac{h_1 - p_1}{h_1} \cdot \mathrm{m}\mathfrak{C}; \quad P_B \sin^2(A,B) = P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|} \cdot P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|} \cdot \frac{h_1 - p_1}{h_1},$$

folglich:

$$\frac{1}{P_A \sin^2(A,B)} + \frac{1}{P_B \sin^2(A,B)} = \frac{h_1}{h_1 - p_1}\left\{\frac{1}{P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|} \cdot P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|}} - \frac{1}{p_1 h_1}\right\},$$

woraus folgt, wenn P_a und P_b die Potenzen der Punktinvolutionen auf den Hauptaxen des Polarsystems bedeuten:

$$\left(1 - \frac{p_1}{h_1}\right)\left\{\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b}\right\} = \left\{\frac{1}{P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|} \cdot P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|}} - \frac{1}{p_1 h_1}\right\}.$$

Gehen wir in gleicher Weise von der Ecke $\mathfrak{B}$ und der Ecke $\mathfrak{C}$ des Polardreiecks aus und operieren ebenso, so folgt durch Addition, da $\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1$ wird:

$$2\left\{\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b}\right\} = \frac{1}{P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|} P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|}} + \frac{1}{P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{B}|} P^{\mathfrak{A}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{B}|}} + \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{C}|} P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{C}|}}$$
$$- \frac{1}{p_1 h_1} - \frac{1}{p_2 h_2} - \frac{1}{p_3 h_3},$$

also mit Berücksichtigung des vorigen Satzes (S. 555):

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} = -\left\{\frac{1}{p_1 h_1} + \frac{1}{p_2 h_2} + \frac{1}{p_3 h_3}\right\}$$
$$= +\left\{\frac{1}{P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|} P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{A}|}} + \frac{1}{P^{\mathfrak{C}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{B}|} P^{\mathfrak{A}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{B}|}} + \frac{1}{P^{\mathfrak{A}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{C}|} P^{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{M}\mathfrak{C}|}}\right\}.$$

Berücksichtigen wir die bekannten Beziehungen:

$$\begin{cases} P_a + P_b = P_{\mathfrak{K}}, \\ P_a P_b = 2 p_1 p_2 p_3 \cdot r = (2\triangle)^2 \frac{p_1 p_2 p_3}{h_1 h_2 h_3} \end{cases}$$

(Th. d. K. S. 219), wo $P_{\mathfrak{K}}$ die Potenz des Punktes $\mathfrak{M}$ in Bezug auf den dem Dreieck $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ umschriebenen Kreis, $\triangle$ den Inhalt des Dreiecks $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$, $h_1\, h_2\, h_3$ seine Höhen, r den Radius des umschriebenen Kreises und $p_1\, p_2\, p_3$ die Perpendikel aus $\mathfrak{M}$ auf die Dreiecksseiten bedeuten, so folgt:

$$P_{\mathfrak{K}} = -(2\triangle)^2 \frac{p_1 p_2 p_3}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{1}{p_1 h_1} + \frac{1}{p_2 h_2} + \frac{1}{p_3 h_3}\right\},$$

eine metrische Beziehung, die auch leicht direkt abgeleitet und welcher folgende an die Seite gestellt werden kann:

$$P_{\mathfrak{K}} = -\left\{\frac{p_1}{h_1}(\mathfrak{M}\mathfrak{A})^2 + \frac{p_2}{h_2}(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^2 + \frac{p_3}{h_3}(\mathfrak{M}\mathfrak{C})^2\right\}.$$

Endlich erwähnen wir noch folgenden Ausdruck für die Potenz $P_{\mathfrak{K}}$:

Wenn man durch einen Punkt $\mathfrak{M}$ in der Ebene eines

Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ Parallele zieht zu den Seiten $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ desselben, welche in den Punkten $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ die andern Dreiecksseiten treffen, so ist allemal (Fig. 28):

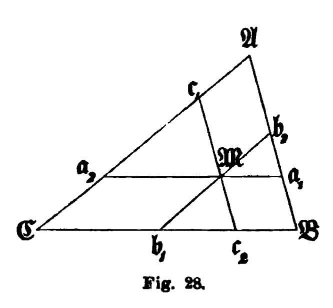


Fig. 28.

$$P_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{M}\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{M}\mathfrak{b}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{M}\mathfrak{c}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{c}_2.$$

Wir unterdrücken den elementaren Beweis dieser Beziehung, welche als besonderen Fall den Ptolemäus'schen Satz in sich schliefst, sowie anderer metrischen Beziehungen, die sich hieran anknüpfen lassen und eine ergiebige Quelle für geometrische Aufgaben darbieten.

§ 61. Die Fokalkegelschnitte des räumlichen Polarsystems.*)

Die Oberfläche zweiter Ordnung oder das sie vertretende räumliche Polarsystem besitzt gewisse Eigenschaften, welche den Eigenschaften der Brennpunkte eines Kegelschnitts analog sind, und die uns im Folgenden beschäftigen sollen.

Die Betrachtung des räumlichen Polarsystems (§ 19 und § 55) hat uns gezeigt, dafs jeder Punkt im Raume der Mittelpunkt eines Polarbündels wird, indem irgend ein durch diesen Punkt gezogener Strahl und seine Verbindungsebene mit dem konjugierten Strahl Polarstrahl und Polarebene dieses Polarbündels sind. Wir wissen ferner (§ 10), dafs es im Polarbündel im allgemeinen sechs Strahlen (Brennstrahlen) giebt, deren zugehörige Ebeneninvolutionen orthogonal sind, also giebt es auch im räumlichen Polarsystem durch einen beliebigen Punkt im allgemeinen sechs Strahlen, deren zugehörige Ebeneninvolutionen orthogonal sind; von diesen sind allemal zwei reell und die vier übrigen imaginär. Die Gesamtheit aller solchen

*) Die Haupteigenschaften der Fokalkegelschnitte hat zuerst M. Chasles in seinem Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Edition seconde (1875), Note XXXI, ohne Beweis angegeben.

Strahlen, welche die Axen orthogonaler Ebeneninvolutionen im räumlichen Polarsysteme sind, bildet einen gewissen Strahlenkomplex, von welchem wir nur besondere Elemente hier aufsuchen wollen. Es kann nämlich vorkommen, dafs für einen besonderen Punkt 𝔓 im Raume die beiden reellen Brennstrahlen des zugehörigen Polarbündels zusammenfallen. Ein solches besonderes Polarbündel $𝔓^{(2)}$ wird ein rotatorisches, d. h. es hat nicht nur ein Tripel von Hauptaxen, sondern unendlich-viele; die beiden zusammenfallenden Brennstrahlen bilden eine der Hauptaxen, und die beiden andern sind in der auf ihr rechtwinkligen Ebene irgend ein Paar zu einander rechtwinkliger Strahlen. In dem Falle, dafs das Polarbündel $𝔓^{(2)}$ einen reellen Kernkegel hat, den Berührungskegel aus 𝔓 an die Kernfläche $F^{(2)}$ des räumlichen Polarsystems, bedeutet dies also so viel, als die Ermittelung solcher Punkte 𝔓, deren Berührungskegel an eine Fläche $F^{(2)}$ Rotationskegel (Kreiskegel oder gerade Kegel) werden; aber wir können von der Realität absehen und die Frage allgemeiner stellen:

Welches ist der Ort solcher Punkte im räumlichen Polarsystem, deren zugehörige Polarbündel zwei zusammenfallende Fokalstrahlen haben? oder mit andern Worten: Wo liegen solche Punkte im räumlichen Polarsystem, deren zugehörige Polarbündel in einer ihrer Hauptebenen eine orthogonale Strahleninvolution besitzen?

Um diese Frage zu beantworten, konstruieren wir zunächst zu einem beliebigen Punkte 𝔓 das zugehörige Polarbündel $𝔓^{(2)}$, indem wir durch 𝔓 eine veränderliche Ebene ε legen und den Pol derselben mit 𝔓 durch einen Strahl l verbinden; dann sind l und ε Polarstrahl und Polarebene des Polarbündels $𝔓^{(2)}$. Soll nun a eine Hauptaxe dieses Polarbündels sein, so mufs zu jeder durch a gelegten Ebene der Polarstrahl in der Normalebene des Strahles a liegen, und soll zugleich a die Axe einer zugehörigen orthogonalen Ebeneninvolution sein, so mufs zu jeder durch a gelegten Ebene der Polarstrahl normal auf dieser Ebene stehen. Die letztere Bedingung involviert zugleich die erstere; denn sobald zu jeder durch a gelegten Ebene der Polarstrahl normal ist, werden

sämtliche Polarstrahlen zu den durch a gelegten Ebenen in der Normalebene des Strahles a liegen; dieser wird also eine Hauptaxe des Polarbündels $\mathfrak{P}^{(2)}$ sein. Diese Bedingung ist zugleich notwendig und hinreichend, denn, sobald es nur eine Ebene giebt durch a, deren Polarstrahl nicht auf ihr normal ist, kann zwar a noch die Axe einer orthogonalen Ebeneninvolution im räumlichen Polarsystem sein, aber nicht mehr eine Hauptaxe des Polarbündels $\mathfrak{P}^{(2)}$. Nun giebt es aber im allgemeinen durch a immer eine Ebene, deren Polarstrahl nicht zu ihr normal ist, nämlich diejenige, welche durch a und den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des räumlichen Polarsystems gelegt werden kann. Diese ist nämlich eine Durchmesserebene, deren Pol in ε_∞ liegt in einer Richtung, die im allgemeinen nicht zu ihr normal ist; nur in dem besonderen Falle, wenn a in einer der Hauptebenen des räumlichen Polarsystems liegt, wird die geforderte Bedingung erfüllt werden können.

Wir sehen also, dafs die gesuchten Geraden a (d. h. die Rotationsaxen rotatorischer Polarbündel), folglich auch die Punkte $\mathfrak{P}$ selbst nur aufgesucht werden dürfen in einer der drei Hauptebenen des räumlichen Polarsystems, und dafs aufserhalb derselben überhaupt keine Punkte von der verlangten Beschaffenheit vorhanden sein können. Dadurch wird die Ermittelung der Punkte $\mathfrak{P}$ und der Axen a wesentlich vereinfacht, und wir durchmustern nunmehr blofs eine der drei Hauptebenen des räumlichen Polarsystems und übertragen die Betrachtung auf jede der beiden andern; wir setzen dabei eine Mittelpunktsfläche $F^{(2)}$ voraus und wollen die Modifikation, welche für den Fall der Paraboloide eintritt, besonders behandeln.

Nehmen wir in einer Hauptebene des räumlichen Polarsystems eine beliebige Gerade l an, so wird die konjugierte Gerade l_1 auf der Hauptebene senkrecht stehen in einem Punkte $\mathfrak{p}_1$, welcher der Pol der Geraden l ist in demjenigen ebenen Polarsystem, welches die betrachtete Hauptebene enthält. Die Gerade l_1 ist der Träger einer Punktinvolution, deren Mittelpunkt $\mathfrak{p}_1$ ist; nennen wir also $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ irgend zwei konjugierte Punkte desselben, so wird:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{x}' = \text{konst.}$$

Zu der Ebene $[l\mathfrak{x}]$ ist also $\mathfrak{x}'$ der Pol im räumlichen Polar-

system; ein Perpendikel aus dem Punkte $\mathfrak{x}'$ auf die Ebene $[l\mathfrak{x}]$ liegt aber notwendig in der durch l_1 rechtwinklig zu l gelegten Ebene, weil l und l_1 selbst in rechtwinkligen Richtungen sich finden. Lassen wir daher auch aus $\mathfrak{p}_1$ ein Perpendikel auf l herab, dessen Fufspunkt $\mathfrak{q}$ sei, so wird $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}|$ der kürzeste Abstand zwischen den Geraden l und l_1 sein, und wir haben in dem Dreieck $\mathfrak{q}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$, dessen Ebene durch l_1 geht und zu l normal ist, zwei Höhen, deren Durchschnittspunkt $\mathfrak{p}$ heifse, folglich die bekannte Beziehung:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{x}' + \mathfrak{p}_1\mathfrak{q}\,.\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{p} = 0.$$

Da nun das Rechteck $\mathfrak{p}_1\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{x}'$ konstant bleibt, wenn das Punktepaar $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ der Punktinvolution auf l_1 sich verändert, da ferner $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}|$ fest bleibt, so wird auch der Punkt $\mathfrak{p}$ sich nicht ändern; wir schliefsen also:

Wenn man um eine beliebige Gerade l in einer Hauptebene des räumlichen Polarsystems eine veränderliche Ebene dreht und aus dem Pole derselben ein Perpendikel auf sie herabläfst, so trifft dasselbe die Hauptebene in einem unveränderlichen Punkte $\mathfrak{p}$.

Wir haben hierdurch eine neue Abhängigkeit in unserem Operationsfelde hergestellt, indem wir einer beliebigen Geraden l einen bestimmten Punkt $\mathfrak{p}$ zuordnen. Die Konstruktion dieses zugeordneten Punktes $\mathfrak{p}$ geschieht so:

Die Gerade l habe zum Pol in dem gegebenen Polarsysteme, dessen Träger die betrachtete Hauptebene ist, einen bestimmten Punkt $\mathfrak{p}_1$ derselben; aus $\mathfrak{p}_1$ fällt man das Perpendikel $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}|$ auf l und errichtet in $\mathfrak{p}_1$ das Perpendikel l_1 auf der Hauptebene; l_1 ist der Träger einer bestimmten dem räumlichen Polarsystem zugehörigen Punktinvolution, deren Potenz $P_{\mathfrak{p}_1}$ sei; ist $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ ein beliebiges Punktepaar dieser Punktinvolution, so wird der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{q}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ der gesuchte Punkt $\mathfrak{p}$ sein, welcher durch die Bedingung bestimmt wird:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{q} + P_{\mathfrak{p}_1} = 0.$$

Wir wollen jetzt nachweisen, dafs die so zusammengehörigen Elemente $\mathfrak{p}$ und l Pol und Polare eines neuen ebenen Polarsystems in der betrachteten

Hauptebene sind, welches mit dem ebenen Polarsystem des Hauptschnittes in nahem Zusammenhange steht.

Nennen wir $\mathfrak{M}$ den Mittelpunkt, $a\ b\ c$ die drei Hauptaxen des räumlichen Polarsystems, die Potenzen der ihnen zugehörigen Punktinvolutionen:

$$P_a \quad P_b \quad P_c$$

und operieren zunächst in der Hauptebene $[ab]$. Wir wählen unter allen Geraden l derselben, deren zugehörige Punkte $\mathfrak{p}$ wir konstruieren, zuerst solche, die zur b-Axe parallel laufen; wird die a-Axe von einer solchen Geraden l in $\mathfrak{q}$ getroffen, so ist ihr Pol $\mathfrak{p}_1$ durch die Bedingung bestimmt:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{p}_1 = P_a,$$

und das in $\mathfrak{p}_1$ auf der $[ab]$-Ebene errichtete Perpendikel, welches parallel zur c-Axe ist, trägt eine Punktinvolution, deren Potenz wir leicht ermitteln; in der $[ac]$-Ebene sind nämlich die a-Axe und die c-Axe die Hauptaxen des ebenen Polarsystems, und es verhält sich bekanntlich:

$$P_{\mathfrak{p}_1} : P_c = \mathfrak{p}_1\mathfrak{q} : \mathfrak{M}\mathfrak{q},$$

[denn es ist (Fig. 29)

$$P_{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{x}'$$

$$P_c = \mathfrak{M}\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{y}',$$

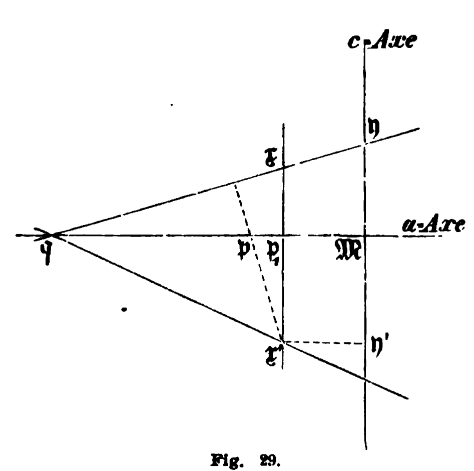


Fig. 29.

und da $\mathfrak{p}_1\mathfrak{x}' = \mathfrak{M}\mathfrak{y}'$ ist, so folgt:

$$P_{\mathfrak{p}_1} : P_c = \mathfrak{p}_1\mathfrak{x} : \mathfrak{M}\mathfrak{y} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{q} : \mathfrak{M}\mathfrak{q}].$$

Da nun der Punkt $\mathfrak{p}$ bestimmt wird durch die Bedingung:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p} + P_{\mathfrak{p}_1} = 0$$

oder

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p} + P_c \cdot \frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}}{\mathfrak{M}\mathfrak{q}} = 0,$$

so folgt:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p} + P_c = 0,$$

oder

$$\mathfrak{M}\mathfrak{q}\{\mathfrak{M}\mathfrak{p} - \mathfrak{M}\mathfrak{p}_1\} + P_c = 0,$$

also erhalten wir:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{q} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{p} = P_a - P_c.$$

Hieraus folgt, dafs, während die Gerade l parallel zur b-Axe sich bewegt und die a-Axe in $\mathfrak{q}$ schneidet, der zugehörige Punkt $\mathfrak{p}$ auf der a-Axe sich so verändert, dafs das Punktepaar $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ eine neue Punktinvolution auf der a-Axe durchläuft, deren Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ und deren Potenz $P_a - P_c$ ist.

In gleicher Weise erkennen wir, dafs, wenn die Gerade l sich parallel zur a-Axe verschiebt, und die b-Axe in einem Punkte $\mathfrak{q}$ schneidet, der zugehörige Punkt $\mathfrak{p}$ auf der b-Axe sich derart verändert, dafs $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ ein Punktepaar einer neuen Punktinvolution wird, deren Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ und deren Potenz $P_b - P_c$ ist.

Von diesen beiden besonderen Lagen der Geraden l in der $[ab]$-Ebene gehen wir nun zu der allgemeinen Lage dieser Geraden über (Fig. 30); möge sie die a-Axe und die b-Axe in den Punkten $\mathfrak{q}_a$ und $\mathfrak{q}_b$ treffen, und seien die zugehörigen, soeben ermittelten Punkte $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_b$, also:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}\mathfrak{q}_a \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{p}_a = P_a - P_c \\ \mathfrak{M}\mathfrak{q}_b \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{p}_b = P_b - P_c. \end{cases}$$

Nennen wir $\mathfrak{p}_a'$ und $\mathfrak{p}_b'$ diejenigen beiden Punkte auf der a-Axe und b-Axe, welche in den ursprünglichen zugehörigen

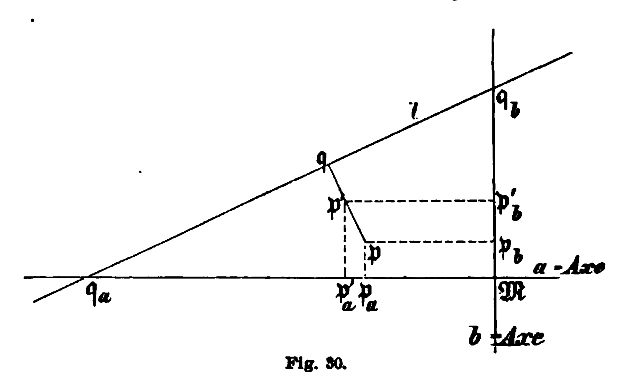


Fig. 30.

Punktinvolutionen den Punkten $\mathfrak{q}_a$ und $\mathfrak{q}_b$ konjugiert sind, also:

$$P_a = \mathfrak{M}\mathfrak{q}_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{p}'_a$$
$$P_b = \mathfrak{M}\mathfrak{q}_b \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{p}'_b,$$

so wird:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{q}_a \cdot \mathfrak{p}_a\mathfrak{p}'_a = P_c = \mathfrak{M}\mathfrak{q}_b \cdot \mathfrak{p}_b\mathfrak{p}'_b,$$

also

$$\frac{\mathfrak{p}_a\mathfrak{p}'_a}{\mathfrak{p}_b\mathfrak{p}'_b} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{q}_b}{\mathfrak{M}\mathfrak{q}_a}.$$

Ziehen wir nun durch $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_b$ Parallele zu den beiden Hauptaxen in der $[ab]$-Ebene, die sich in $\mathfrak{p}$ treffen, und auch durch $\mathfrak{p}'_a$ und $\mathfrak{p}'_b$ Parallele zu den Hauptaxen, die sich in $\mathfrak{p}'$ treffen, so können $\mathfrak{p}_a\mathfrak{p}'_a$ und $\mathfrak{p}_b\mathfrak{p}'_b$ als die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks aufgefaſst werden, dessen Hypotenuse $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ ist; ferner sind auch $\mathfrak{M}\mathfrak{q}_a$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{q}_b$ die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Gerade l bildet, und da die Katheten beider rechtwinkligen Dreiecke proportional sind, so sind dieselben ähnlich, also ihre Winkel gleich, d. h.:

$$\angle\, \mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'_a = \angle\, \mathfrak{q}_b\mathfrak{q}_a\mathfrak{M},$$

folglich ist $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}'|$ rechtwinklig auf l, oder umgekehrt: der Punkt $\mathfrak{p}$ liegt in dem Perpendikel, welches aus $\mathfrak{p}'$ auf die Gerade l gefällt ist; $\mathfrak{p}'$ ist aber der Pol der Geraden l in dem ebenen Polarsystem, welches der Hauptebene $[ab]$ zugehört. Denken wir uns nun in $\mathfrak{p}'$ das Perpendikel auf der $[ab]$-Ebene errichtet, so ist dasselbe parallel der c-Axe und der Träger einer Punktinvolution, deren Potenz $P_{\mathfrak{p}'}$ durch die Potenz P_c leicht ausgedrückt wird. Es verhält sich nämlich $P_{\mathfrak{p}'}$ zu P_c, wie die Abstände der Punkte $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{M}$ von der Geraden l, oder, da der letztere Abstand wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke, $= \mathfrak{M}\mathfrak{q}_a \cdot \frac{\mathfrak{p}_a\mathfrak{p}'_a}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}$, so folgt:

$$\frac{P_{\mathfrak{p}'}}{P_c} = -\frac{\mathfrak{p}'\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}'\mathfrak{p}}{\mathfrak{M}\mathfrak{q}_a \cdot \mathfrak{p}_a\mathfrak{p}'_a}$$

oder, da $P_c = \mathfrak{M}\mathfrak{q}_a \cdot \mathfrak{p}_a\mathfrak{p}'_a$ ist, wie wir eben gesehen haben, so wird:

$$P_{\mathfrak{p}'} + \mathfrak{p}'\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}'\mathfrak{p} = 0,$$

d. h.: Wenn die Gerade l beliebig in der $[ab]$-Ebene angenommen wird, so bestimme man ihren Pol $\mathfrak{p}'$ in demjenigen ebenen Polarsystem, welches der $[ab]$-Ebene zugehört,

fälle das Perpendikel $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{p}'$ auf l und bestimme auf demselben den Punkt $\mathfrak{p}$ so, dafs:

$$\mathfrak{p}'\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}'\mathfrak{p} + P_{\mathfrak{p}'} = 0$$

wird, wo $P_{\mathfrak{p}'}$ die Potenz derjenigen Punktinvolution bedeutet, welche dem in $\mathfrak{p}'$ auf der Ebene $[a\,b]$ errichteten Perpendikel zugehört; dies ist aber identisch mit der früheren Konstruktion, die wir jetzt durch folgende neue ersetzen können:

In der $[a\,b]$-Ebene werden auf den beiden Hauptaxen zwei neue Punktinvolutionen konstruiert, welche $\mathfrak{M}$ zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt und zu Potenzen haben:

auf der a-Axe: $P_a - P_c$ auf der b-Axe: $P_b - P_c$;

schneidet irgend eine Gerade l die Träger der beiden Punktinvolutionen in $\mathfrak{q}_a$ und $\mathfrak{q}_b$, deren konjugierte Punkte $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_b$ sind, so treffen sich die durch $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_b$ zu den Hauptaxen parallel gezogenen Geraden in dem Punkte $\mathfrak{p}$, welcher der Geraden l zugeordnet wird. Dies ist aber nichts anderes, als die bekannte Konstruktion eines ebenen Polarsystems (Th. d. K. S. 411ff.), von welchem $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt, die a-Axe und die b-Axe die Hauptaxen, die Potenzen der zugehörigen Punktinvolutionen aber

$$P_a - P_c \quad \text{und} \quad P_b - P_c$$

sind. Wir haben also nachgewiesen, dafs die durch obige Konstruktion einander zugeordneten Elemente l und $\mathfrak{p}$ Polare und Pol dieses neuen ebenen Polarsystems sind, welches wir auf dem Träger $[a\,b]$ konstruiert haben. — Das in dieser Weise auf der $[a\,b]$-Ebene konstruierte neue Polarsystem besitzt, wie wir wissen, im allgemeinen eine einfache Mannigfaltigkeit solcher besonderen Strahlen l, deren Pole $\mathfrak{p}$ in ihnen selbst liegen oder mit ihnen incident sind; diese besonderen Strahlen l sind die Tangenten eines gewissen Kernkegelschnitts $\mathfrak{K}_{ab}^{(2)}$ und die incidenten Pole $\mathfrak{p}$ die Berührungspunkte der Tangenten mit diesem Kegelschnitt; derselbe kann, je nach der Natur des Polarsystems reell oder imaginär sein.

Sei t eine Tangente des Kernkegelschnitts $\mathfrak{K}_{ab}^{(2)}$ und $\mathfrak{t}$ ihr Berührungspunkt; sei ferner t_1 die konjugierte Gerade von

t im räumlichen Polarsystem, d. h. das in dem Punkte $\mathfrak{t}_1$, dem Pol der Geraden t, errichtete Perpendikel auf der Ebene $[a\,b]$. Da t und $\mathfrak{t}$ incidente Elemente des neuen ebenen Polarsystems sind, so mufs $\mathfrak{t}$ der Fufspunkt des aus $\mathfrak{t}_1$ auf t herabgelassenen Perpendikels sein, folglich ist $\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_1$ die kürzeste Entfernung zwischen den Geraden t und t_1, die auf beiden normal steht.

Der Konstruktion zufolge ist nun, da in unserm besonderen Falle $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{t}$ zusammenfallen:

$$(\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t})^2 + P_{\mathfrak{t}_1} = 0,$$

oder, wenn $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ irgend ein Paar konjugierter Punkte derjenigen Punktinvolution ist, welche der Geraden t_1 zugehört:

$$\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{x}' + (\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t})^2 = 0$$

und hieraus folgt, dafs die Strahlen $\mathfrak{t}\,\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{t}\,\mathfrak{x}'$ zu einander rechtwinklig sein müssen, folglich auch die Ebenen $[t\,\mathfrak{x}]$ und $[t\,\mathfrak{x}']$, d. h. die dem Strahl t zugehörige Ebeneninvolution im räumlichen Polarsystem ist eine orthogonale. Zweitens besitzt aber der Punkt $\mathfrak{t}$ die Eigenschaft, dafs der Pol der Ebene $[\mathfrak{t}\,t_1]$ auf t liegt, und diese Ebene $[\mathfrak{t}\,t_1]$ auf dem Strahl t normal steht, folglich ist t notwendig eine Hauptaxe des Polarbündels, welches dem Punkte $\mathfrak{t}$ im räumlichen Polarsystem zugehört. Der Punkt $\mathfrak{t}$ hat also die zu Anfang geforderte Eigenschaft, dafs das ihm zugehörige Polarbündel eine Hauptaxe hat, deren zugehörige Ebeneninvolution orthogonal ist, oder, was dasselbe sagt, dafs seine beiden reellen Fokalstrahlen zusammenfallen; nennen wir demgemäfs ein solches Polarbündel, bei welchem die einer Hauptaxe zugehörige Ebeneninvolution eine orthogonale ist, ein rotatorisches Polarbündel, so können wir folgendes Resultat aussprechen:

Im räumlichen Polarsystem kommt es im allgemeinen unendlich oft vor, dafs das einem Punkte $\mathfrak{t}$ zugehörige Polarbündel ein rotatorisches ist; solche Punkte $(\mathfrak{t})$ liegen in den drei Hauptebenen des räumlichen Polarsystems und bilden in jeder derselben einen (reellen oder imaginären) Kegelschnitt, der als der Kernkegelschnitt des oben konstruierten ebenen Polarsystems gefunden wird.

Die Rotationsaxen dieser Polarbündel sind die Tangenten des Kernkegelschnitts.

Wollen wir uns nur auf den reellen Fall beschränken, indem wir statt des räumlichen Polarsystems eine reelle Fläche $F^{(2)}$ und statt eines Polarbündels den Berührungskegel aus einem Punkte an die Fläche $F^{(2)}$ setzen, so würde der Ausspruch so lauten:

Der Ort solcher Punkte, von denen aus sich an eine gegebene Oberfläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$ ein gerader Berührungskegel (Rotationskegel) legen läfst, besteht aus drei Kegelschnitten, deren jeder in einer der drei Hauptebenen der $F^{(2)}$ liegt.*)

Endlich können wir auch statt der Punkte $\mathfrak{t}$ die Geraden t auffassen und folgendes Resultat aussprechen:

Im räumlichen Polarsystem giebt es unendlich viele besondere Strahlen t, in denen zwei Fokalstrahlen eines dem räumlichen Polarsystem zugehörigen Polarbündels zusammenfallen. Diese Strahlen t liegen in den drei Hauptebenen des räumlichen Polarsystems und sind in jeder derselben die Tangenten eines bestimmten Kegelschnitts, der als Kernkegelschnitt des oben konstruierten ebenen Polarsystems gefunden wird. Die Mittelpunkte dieser besonderen Polarbündel sind die Berührungspunkte des Kernkegelschnitts.

Wir nennen diese in den drei Hauptebenen des räumlichen Polarsystems gefundenen neuen Kegelschnitte die „Fokalkegelschnitte" des räumlichen Polarsystems oder der Fläche 2. O. $F^{(2)}$ und haben sie definiert als die Kernkegelschnitte dreier bestimmten ebenen Polarsysteme in den drei Hauptebenen. Diese ebenen Polarsysteme sind in reeller Weise und zwar auf doppelte Art von uns konstruiert worden, einmal, indem wir beliebig viele Paare von Pol und Polare ($\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{p}$) konstruiert haben, und zweitens, indem wir auf den

*) Diesen Satz hat schon Steiner in Crelle's Journal für reine u. angewandte Math. Bd. I, S. 47 ausgesprochen.

Hauptaxen, welche mit denen des Hauptschnitts zusammenfallen, die zugehörigen Punktinvolutionen ermittelt haben.

§ 62. Über die Natur der Fokalkegelschnitte.

Wir wollen jetzt die Natur der Fokalkegelschnitte:

$$\mathfrak{K}_{ab}^{(2)} \quad \mathfrak{K}_{ac}^{(2)} \quad \mathfrak{K}_{bc}^{(2)}$$

in den drei Hauptebenen des räumlichen Polarsystems untersuchen, indem wir zunächst den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ desselben als im Endlichen liegend voraussetzen und bemerken, daſs der Kernkegelschnitt eines ebenen Polarsystems eine Ellipse ist, wenn die Punktinvolutionen auf den beiden Hauptaxen desselben beide hyperbolisch sind, eine Hyperbel, wenn von diesen beiden Punktinvolutionen die eine elliptisch, die andere hyperbolisch, endlich ein imaginärer Kegelschnitt ist, wenn beide Punktinvolutionen elliptisch sind (Th. d. K. S. 453); ob aber eine Punktinvolution hyperbolisch oder elliptisch ist, das hängt davon ab, ob der Wert ihrer Potenz positiv oder negativ ist; den Fall der Paraboloide, wenn $\mathfrak{M}$ im Unendlichen liegt, wollen wir besonders behandeln (§ 63).

Die drei ebenen Polarsysteme der Fokalkegelschnitte in den Hauptebenen des räumlichen Polarsystems werden bestimmt durch die Potenzen der Punktinvolutionen auf den Hauptaxen, deren Werte sind:

$$\text{für } \mathfrak{K}_{ab}^{(2)} \quad \ldots \quad \begin{cases} P_a - P_c & \text{auf der } a\text{-Axe} \\ P_b - P_c & \text{,, ,, } b\text{-Axe} \end{cases}$$

$$\text{,, } \mathfrak{K}_{ac}^{(2)} \quad \ldots \quad \begin{cases} P_a - P_b & \text{auf der } a\text{-Axe} \\ P_c - P_b & \text{,, ,, } c\text{-Axe} \end{cases}$$

$$\text{,, } \mathfrak{K}_{bc}^{(2)} \quad \ldots \quad \begin{cases} P_b - P_a & \text{auf der } b\text{-Axe} \\ P_c - P_a & \text{,, ,, } c\text{-Axe,} \end{cases}$$

und von diesen sechs Werten sind drei entgegengesetzt den drei übrigen; ferner finden die Identitäten statt:

$$(P_a - P_b) + (P_b - P_c) + (P_c - P_a) = 0$$
$$(P_b - P_a) + (P_c - P_b) + (P_a - P_c) = 0.$$

Wenn wir den drei Werten $P_b - P_c$, $P_c - P_a$, $P_a - P_b$ alle möglichen Vorzeichen geben wollen, so müssen wir doch den Fall ausschlieſsen, daſs alle drei positiv, und den Fall, daſs alle drei negativ sind, weil dann die Summe

niemals Null werden könnte; die drei übrigen Werte $P_c - P_b$, $P_a - P_c$, $P_b - P_a$ sind aber die entgegengesetzten; wir haben demgemäfs nur 6 Möglichkeiten:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
$P_b - P_c$	+	+	+	−	−	−
$P_c - P_a$	+	−	−	+	+	−
$P_a - P_b$	−	+	−	+	−	+
$P_c - P_b$	−	−	−	+	+	+
$P_a - P_c$	−	+	+	−	−	+
$P_b - P_a$	+	−	+	−	+	−,

und hieraus ergiebt sich für die Zusammenstellung in den drei Hauptebenen:

		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
$\mathfrak{K}^{(2)}_{ab}$	$P_a - P_c$	−	+	+	−	−	+
	$P_b - P_c$	+	+	+	−	−	−
$\mathfrak{K}^{(2)}_{ac}$	$P_a - P_b$	−	+	−	+	−	+
	$P_c - P_b$	−	−	−	+	+	+
$\mathfrak{K}^{(2)}_{bc}$	$P_b - P_a$	+	−	+	−	+	−
	$P_c - P_a$	+	−	−	+	+	−,

und hieraus erkennen wir, dafs in allen sechs überhaupt möglichen Fällen die drei Fokalkegelschnitte immer denselben Charakter haben, nämlich:

Von den drei Fokalkegelschnitten in den Hauptebenen eines räumlichen Polarsystems (mit endlichem Mittelpunkt) ist immer einer Ellipse, der andere Hyperbel und der dritte imaginär.

Die sechs Möglichkeiten, welche wir zu unterscheiden hatten, entsprechen lediglich den verschiedenen Anordnungen, denen die Reihenfolge der drei Werte P_a P_b P_c ihrer algebraischen Gröfse nach unterworfen werden kann, nämlich:

I. $P_b > P_c > P_a$
II. $P_a > P_b > P_c$
III. $P_b > P_a > P_c$
IV. $P_c > P_a > P_b$
V. $P_c > P_b > P_a$
VI. $P_a > P_c > P_b$.

Wie aber auch die drei gegebenen Gröfsen $P_a\, P_b\, P_c$ ihren Werten nach beschaffen sein mögen, ob positiv oder negativ, immer werden sie sich in algebraischer Aufeinanderfolge anordnen lassen, und immer können wir die Benennung der drei Hauptaxen so wählen, dafs ein beliebiger jener sechs Fälle eintritt. Hierzu wählen wir den Fall II.:

$$P_a > P_b > P_c;$$

unter dieser Voraussetzung ist der Fokalkegelschnitt in der $[ab]$-Ebene Ellipse, in der $[ac]$-Ebene Hyperbel, in der $[bc]$-Ebene imaginär, und wir bezeichnen die drei Fokalkegelschnitte demgemäfs durch:

$$E_{ab}^{(2)} \quad H_{ac}^{(2)} \quad J_{bc}^{(2)}.$$

Sie stehen mit den Kegelschnitten in den drei Hauptebenen, welche dem räumlichen Polarsystem selbst angehören, in einem einfachen Zusammenhang; da nämlich die Axen des Fokalkegelschnitts und des Hauptkegelschnitts in derselben Hauptebene zusammenfallen, die zugehörigen Potenzen aber z. B. in der $[ab]$-Ebene folgende sind: Für den

Hauptkegelschnitt:	Fokalkegelschnitt:
P_a	$P_a - P_c$
P_b	$P_b - P_c$,

so werden die Differenzen einander gleich sein:

$$P_a - P_b = (P_a - P_c) - (P_b - P_c),$$

folglich koinzidieren die Brennpunkte beider Kegelschnitte, d. h.:

Fokalkegelschnitt und Hauptkegelschnitt in derselben Hauptebene des räumlichen Polarsystems sind allemal konfokale Kegelschnitte.

Der Wert $P_a - P_c$ bestimmt für den Fokalkegelschnitt $E_{ab}^{(2)}$ die Scheitel der Fokalellipse auf der a-Axe. Derselbe Wert in der Gestalt geschrieben: $(P_a - P_b) - (P_c - P_b)$ bestimmt in der $[ac]$-Ebene für den Fokalkegelschnitt $H_{ac}^{(2)}$ die beiden Brennpunkte auf der a-Axe, folglich sind die Scheitel der Fokalellipse die Brennpunkte der Fokalhyperbel, und in gleicher Weise folgt, dafs die Scheitel der Fokalhyperbel koinzidieren mit den Brennpunkten der Fokalellipse.

Hiermit ist aber der eine der beiden reellen Fokalkegelschnitte durch den andern vollständig bestimmt, und wir haben das Resultat:

Die beiden reellen Fokalkegelschnitte liegen in den zu einander rechtwinkligen Hauptebenen der Art, dafs die Scheitel der Fokalellipse die Brennpunkte der Fokalhyperbel und die Scheitel der Fokalhyperbel die Brennpunkte der Fokalellipse sind.

Wir haben nunmehr in jeder der drei Hauptebenen des räumlichen Polarsystems zwei Kegelschnitte, nämlich den Kernkegelschnitt des ursprünglichen in der Hauptebene enthaltenen Polarsystems und den Fokalkegelschnitt; wir wollen dieselben unter Festhaltung der angenommenen algebraischen Aufeinanderfolge:

$$P_a > P_b > P_c$$

in allen vier möglichen Fällen, welche eintreten können, zusammenstellen:

I. $P_a > 0 \quad P_b > 0 \quad P_c > 0$ *Ellipsoid:*

	Hauptkegelschnitt	Fokalkegelschnitt
$[ab]$-Ebene:	$\mathfrak{E}_{ab}^{(2)}$	$E_{ab}^{(2)}$
$[ac]$-Ebene:	$\mathfrak{E}_{ac}^{(2)}$	$H_{ac}^{(2)}$
$[bc]$-Ebene:	$\mathfrak{E}_{bc}^{(2)}$	$J_{bc}^{(2)}$.

II. $P_a > 0 \quad P_b > 0 \quad P_c < 0$ *einschaliges Hyperboloid:*

	Hauptkegelschnitt	Fokalkegelschnitt
$[ab]$-Ebene:	$\mathfrak{E}_{ab}^{(2)}$	$E_{ab}^{(2)}$
$[ac]$-Ebene:	$\mathfrak{H}_{ac}^{(2)}$	$H_{ac}^{(2)}$
$[bc]$-Ebene:	$\mathfrak{H}_{bc}^{(2)}$	$J_{bc}^{(2)}$.

III. $P_a > 0 \quad P_b < 0 \quad P_c < 0$ *zweischaliges Hyperboloid:*

	Hauptkegelschnitt	Fokalkegelschnitt
$[ab]$-Ebene:	$\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$	$E_{ab}^{(2)}$
$[ac]$-Ebene:	$\mathfrak{H}_{ac}^{(2)}$	$H_{ac}^{(2)}$
$[bc]$-Ebene:	$\mathfrak{J}_{bc}^{(2)}$	$J_{bc}^{(2)}$.

IV. $P_a < 0 \quad P_b < 0 \quad P_c < 0$ imaginäre Fläche:

	Hauptkegelschnitt	Fokalkegelschnitt
$[ab]$-Ebene:	$\mathfrak{J}_{ab}^{(2)}$	$E_{ab}^{(2)}$
$[ac]$-Ebene:	$\mathfrak{J}_{ac}^{(2)}$	$H_{ac}^{(2)}$
$[bc]$-Ebene:	$\mathfrak{J}_{bc}^{(2)}$	$J_{bc}^{(2)}$.

(Die Fokalkegelschnitte sind also auch für die imaginäre Fläche $F^{(2)}$ reell.)

Bestimmen wir die Asymptoten der Fokalhyperbel $H_{ac}^{(2)}$ und nennen wir den Winkel zwischen denselben 2ε, so haben wir bekanntlich, da $P_c - P_b$ und $P_a - P_b$ die Potenzwerte der Involutionen auf den Hauptaxen der Fokalhyperbel sind:

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon = - \frac{P_c - P_b}{P_a - P_b} .$$

Setzen wir ferner, um einen reellen Fall vor Augen zu haben, die $F^{(2)}$ als zweischaliges Hyperboloid voraus, so sind die Asymptoten der beiden Haupthyperbeln bestimmt durch die Winkel:

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta = - \frac{P_b}{P_a} \text{ für die Haupthyperbel } \mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = - \frac{P_c}{P_a} \text{ für die Haupthyperbel } \mathfrak{H}_{ac}^{(2)} ,$$

2ϑ und 2φ sind aber zugleich die beiden Kegelöffnungen des Asymptotenkegels des Hyperboloids; die letzten Werte in die obige Gleichung eingesetzt geben:

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta} ,$$

woraus folgt (S. 62):

Die Asymptoten der Fokalhyperbel sind die Brennstrahlen des Asymptotenkegels der Fläche $F^{(2)}$.

Degeneriert insbesondere das Hyperboloid in einen Kegel (seinen Asymptotenkegel), so geht die Fokalhyperbel in dasjenige Linienpaar über, welches die Brennstrahlen des Kegels bilden; die Fokalellipse zieht sich auf einen Punkt (Nullkegelschnitt) zusammen.

Aus der vorigen Zusammenstellung erkennen wir, da

Hauptkegelschnitt und Fokalkegelschnitt in derselben Ebene immer konfokal sind, daſs diese Kegelschnitte unter Umständen gemeinschaftliche Punkte haben, nämlich in den Fällen I. und III., d. h. beim Ellipsoid und zweischaligen Hyperboloid, also bei den $F^{(2)}$ mit Berührungsebenen elliptischen Charakters (S. 482); denn zwei konfokale Ellipsen können niemals reelle Schnittpunkte haben, ebensowenig wie zwei konfokale Hyperbeln; dagegen müssen eine Ellipse und eine mit ihr konfokale Hyperbel sich immer in vier reellen Punkten schneiden, die symmetrisch zu den Hauptaxen liegen.*)

Wir haben daher beim Ellipsoid (I.) vier reelle Schnittpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{E}_{ac}^{(2)}$ und $H_{ac}^{(2)}$ in der $[ac]$-Ebene und beim zweischaligen Hyperboloid (III.) vier reelle Schnittpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$ und $E_{ab}^{(2)}$ in der $[ab]$-Ebene. Diese vier ausgezeichneten Punkte sollen die Kreispunkte der Fläche $F^{(2)}$ genannt werden; sie liegen beim Ellipsoid in derjenigen Hauptebene, welche die gröſste und kleinste Hauptaxe desselben enthält, beim zweischaligen Hyperboloid in derjenigen Hauptebene, welche die reelle Hauptaxe und die (im algebraischen Sinne) gröſsere imaginäre Hauptaxe

*) Wir erkennen dies unmittelbar aus den Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte: Sind $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ die beiden reellen Brennpunkte zweier konfokalen Kegelschnitte, so müſste für den Fall zweier Ellipsen, wenn $\mathfrak{p}$ ein gemeinschaftlicher Punkt derselben wäre und $2a$, $2a_1$ die Axen bedeuten, sein:

$$\mathfrak{pf} + \mathfrak{pf}_1 = 2a \qquad \mathfrak{pf} + \mathfrak{pf}_1 = 2a_1,$$

also $a = a_1$, d. h. die Ellipsen identisch sein; für den Fall zweier Hyperbeln:

$$\mathfrak{pf} - \mathfrak{pf}_1 = \pm 2a \qquad \mathfrak{pf} - \mathfrak{pf}_1 = \pm 2a_1,$$

also $a = \pm a_1$, d. h. ebenfalls die Hyperbeln identisch sein.

Dagegen für den Fall einer Ellipse und einer Hyperbel ist:

$$\mathfrak{pf} + \mathfrak{pf}_1 = 2a \qquad \mathfrak{pf} - \mathfrak{pf}_1 = \pm 2a_1,$$

also wird:

$$\mathfrak{pf} = a \pm a_1$$
$$\mathfrak{pf}_1 = a \mp a_1,$$

daher giebt es in der That vier reelle symmetrisch zu den Axen liegende Punkte, welche der Ellipse und der mit ihr konfokalen Hyperbel gemeinschaftlich sind.

enthält. Die Kreispunkte einer Fläche 2. O. besitzen eine leicht erkennbare ausgezeichnete Eigenschaft; wir wissen nämlich, dafs jeder Punkt $\mathfrak{P}$ eines Fokalkegelschnitts der Mittelpunkt eines rotatorischen Polarbündels ist im räumlichen Polarsystem, und dafs die Tangente des Fokalkegelschnitts in diesem Punkte $\mathfrak{P}$ die Rotationsaxe ist, also die auf ihr rechtwinklige Ebene in $\mathfrak{P}$ eine orthogonale Strahleninvolution enthält, welche ihr in dem Polarbündel $\mathfrak{P}^{(2)}$ zugehört. Fassen wir nun insbesondere einen der Kreispunkte auf, in welchem der Fokalkegelschnitt den Hauptkegelschnitt trifft, so wird, da diese beiden konfokalen Kegelschnitte sich rechtwinklig durchschneiden (Th. d. K. S. 352) die Tangente des Fokalkegelschnitts in einem Kreispunkte Normale des Hauptkegelschnitts sein und umgekehrt, also die zu jener Tangente in $\mathfrak{P}$ gelegte Normalebene die Berührungsebene der $F^{(2)}$ in dem Punkte $\mathfrak{P}$ und zugleich die Trägerin einer orthogonalen Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen nach den unendlich-entfernten imaginären Kreispunkten der Berührungsebene hingehen. Hierdurch rechtfertigt sich die obige Bezeichnung „Kreispunkte der Fläche $F^{(2)}$“, weil die Berührungsebene in einem solchen Punkte der Fläche dieselbe in einem Nullkreise oder in einem imaginären Linienpaare schneidet, welches nach den unendlich-entfernten imaginären Kreispunkten hingeht.

Zugleich erhellt, dafs jede Ebene, die zu einer Berührungsebene in einem Kreispunkte der $F^{(2)}$ parallel läuft, die Fläche $F^{(2)}$ in einem (reellen oder imaginären) Kreise schneiden mufs, weil die unendlich-entfernte Gerade einer solchen Ebene die Trägerin einer zugehörigen Punktinvolution im räumlichen Polarsystem ist, deren Doppelpunkte die imaginären Kreispunkte sind. Da nun die vier reellen Kreispunkte die Endpunkte zweier Durchmesser eines Hauptkegelschnitts sind, so folgt, *dafs es zwei bestimmte Stellungen für eine Ebene giebt, die eine gegebene Oberfläche 2. O. (Ellipsoid oder zweischaliges Hyperboloid) in einem Kreise schneiden soll. Diese Stellungen sind parallel den Berührungsebenen in den Kreispunkten der $F^{(2)}$ und enthalten also die Richtung einer der drei Hauptaxen. Die dadurch erhaltenen*

Parallelebenenbüschel enthalten zwei Scharen von Kreisen, welche die Fläche $F^{(2)}$ doppelt erfüllen. Den Übergang von den reellen zu den imaginären Kreisen bilden die Kreispunkte (Nullkreise) der Fläche.*)

Während hier vermittelst der Kreispunkte (die den Übergang von den reellen zu den imaginären Kreisen der Fläche $F^{(2)}$ bilden) nur beim Ellipsoid und zweischaligen Hyperboloid, also den Flächen mit elliptischen Berührungsebenen, die Kreisschnitte sich uns darbieten, finden wir bei den beiden übrigen Mittelpunktsflächen, dem einschaligen Hyperboloid und der imaginären Fläche, die beiden Stellungen der Kreisschnittebenen vermittelst des Asymptotenkegels und erkennen, dafs beim einschaligen Hyperboloid die beiden Büschel von Parallelebenen sämtlich reelle Kreise, bei der imaginären Fläche sämtlich imaginäre Kreise ausschneiden. Das Polarbündel $\mathfrak{M}^{(2)}$, welches dem Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des räumlichen Polarsystems zugehört, hat nämlich zur Kernfläche den (reellen oder imaginären) Asymptotenkegel der Fläche $F^{(2)}$, und jede Ebene, welche diesen Asymptotenkegel in einem Kreise schneidet, mufs auch die $F^{(2)}$ in einem Kreise schneiden, wie offenbar einleuchtet, weil jede Ebene die Fläche $F^{(2)}$ und ihren Asymptotenkegel in ähnlichen und ähnlich-liegenden konzentrischen Kegelschnitten schneidet. Wir haben aber für jedes Polarbündel (S. 57) zwei reelle Stellungen einer Ebene ermittelt, die den Kernkegel in einem (reellen oder imaginären) Kreise schneidet; dieselben bestimmen also gleichzeitig die Kreisschnitte der $F^{(2)}$ unabhängig von den Fokalkegelschnitten. Wir werden indessen später (§ 66) auch von diesem Gesichtspunkte aus zu den Kreisschnitten für alle vier Mittelpunktsflächen gelangen, mögen die Kreispunkte derselben reell vorhanden sein oder nicht. Zuvörderst wollen wir aber, bevor wir zu weiteren Eigenschaften der Fokalkegelschnitte übergehen, die vorige Untersuchung ergänzen für die beiden Paraboloide.

---

*) Hieraus entspringt die anschauliche Darstellung der Flächen 2. O. durch Kartonmodelle von Prof. Dr. A. Brill, Verlag von L. Brill in Darmstadt.

§ 63. Die Fokalkegelschnitte bei den Paraboloiden.

Unsere vorige Untersuchung (§ 61 und § 62) setzte voraus, dafs der Mittelpunkt des gegebenen räumlichen Polarsystems im Endlichen liegt und der Durchschnittspunkt der drei im Endlichen verlaufenden Hauptaxen ist. Setzen wir jetzt ein räumliches Polarsystem voraus, bei welchem der Pol der unendlich-entfernten Ebene ε_∞ selbst in ihr liegt ($= \mathfrak{M}^\infty$), also die Kernfläche ein Paraboloid ist, so haben die Strahlen durch $\mathfrak{M}^\infty$, welche in ε_∞ liegen, ihre konjugierten Strahlen auch in ε_∞ und durch $\mathfrak{M}^\infty$ gehend, und diese Paare konjugierter Strahlen bilden eine Strahleninvolution (welche elliptisch oder hyperbolisch ist, je nachdem das Paraboloid elliptisch oder hyperbolisch ist); ferner hat diese Strahleninvolution ein einziges bestimmtes Paar rechtwinkliger konjugierter Strahlen b^∞ und c^∞ (Axen), und endlich geht durch $\mathfrak{M}^\infty$ ein einziger unmittelbar zu bestimmender Strahl a, welcher das Paraboloid in einem solchen Punkte $\mathfrak{S}$ trifft, dafs die Berührungsebene in $\mathfrak{S}$ auf dem Strahle a normal steht, oder mit andern Worten: die zu der Richtung nach $\mathfrak{M}^\infty$ normale Stellung bestimmt in ε_∞ eine Gerade, durch welche nur noch eine zweite Berührungsebene an das Paraboloid gelegt werden kann; diese berührt in $\mathfrak{S}$, dem Scheitel des Paraboloids; $|\mathfrak{S}\mathfrak{M}^\infty| = a$ ist die endliche Hauptaxe desselben; die beiden endlichen Hauptebenen:

$$[ab^\infty] \quad \text{und} \quad [ac^\infty]$$

schneiden das Paraboloid in Parabeln:

$$\mathfrak{P}^{(2)}_{ab^\infty} \quad \mathfrak{P}^{(2)}_{ac^\infty},$$

welche in a ihre gemeinschaftliche Axe und ihre Öffnungen entweder nach derselben oder nach entgegengesetzten Richtungen haben, je nachdem das Paraboloid ein elliptisches oder ein hyperbolisches ist. Die dritte Hauptebene ist ε_∞, eine Berührungsebene des Paraboloids, und schneidet dasselbe entweder in einem reellen oder imaginären Linienpaar, je nachdem das Paraboloid hyperbolisch oder elliptisch ist (§ 29 und § 57).

Dies vorausgeschickt, suchen wir nach solchen Punkten $\mathfrak{P}$ im Raume, für welche die dem räumlichen Polarsystem

zugehörigen Polarbündel rotatorisch werden, oder der Berührungskegel aus $\mathfrak{P}$ an das Paraboloid ein Rotationskegel (gerader Kegel) wird. Zuvörderst ist klar, daſs in der Ebene ε_∞ keine reellen Punkte $\mathfrak{P}$ von der verlangten Art vorkommen können mit Ausnahme des einzigen Punktes $\mathfrak{M}^\infty$; denn jeder Punkt in ε_∞ ist Mittelpunkt eines reellen Berührungskegels an das Paraboloid, und dieser Kegel ist immer ein parabolischer Cylinder, also niemals ein Rotationskegel, auſser in dem besonderen Falle, wenn er in eine Ebene (ε_∞) ausartet, also $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{M}^\infty$ liegt. Diese Berührungsebene ε_∞ kann als ausgearteter Rotationskegel betrachtet werden, und die Hauptaxe a des Paraboloids als Rotationsaxe.

Wir schränken ferner die Untersuchung wesentlich ein durch die Bemerkung, daſs auſserhalb der beiden Hauptebenen $[ab^\infty]$ und $[ac^\infty]$ überhaupt Punkte $\mathfrak{P}$ von der verlangten Art nicht vorhanden sein können. In der That, nehmen wir an, der Punkt $\mathfrak{P}$ im Raume habe die verlangte Eigenschaft, Mittelpunkt eines rotatorischen Polarbündels zu sein, und l sei die Rotationsaxe desselben, also zugleich die Axe einer orthogonalen Ebeneninvolution im räumlichen Polarsystem, dann wird jede durch l gelegte Ebene zu ihrem Polarstrahl im Polarbündel $\mathfrak{P}^{(2)}$ die Normale dieser Ebene im Punkte $\mathfrak{P}$ haben. Denn nur, wenn dies der Fall ist, werden beide Bedingungen erfüllt: einmal liegen die Polarstrahlen aller durch l gelegten Ebenen in der Normalebene von l, also ist l eine Hauptaxe des Polarbündels $\mathfrak{P}^{(2)}$ und zweitens ist die zu l zugehörige Ebeneninvolution eine orthogonale. Giebt es dagegen nur eine einzige Ebene durch l, deren Polarstrahl im Bündel nicht zu ihr rechtwinklig ist, so kann zwar immer noch die zu l zugehörige Ebeneninvolution eine orthogonale sein, aber nicht mehr l eine Hauptaxe des Polarbündels. Nun giebt es aber im allgemeinen immer durch l eine Ebene, deren Polarstrahl nicht zu ihr rechtwinklig ist, nämlich die Ebene $[l\mathfrak{M}^\infty]$ mit der Ausnahme, daſs l (also natürlich auch $\mathfrak{P}$) in einer der beiden Hauptebenen $[ab^\infty]$ oder $[ac^\infty]$ des räumlichen Polarsystems liegt. Denn die Ebene $[l\mathfrak{M}^\infty]$ schneidet ε_∞ in einem Strahle l^∞, dessen konjugierter Strahl l_1^∞ sei; der konjugierte Strahl von l sei l_1; da nun l und l^∞ sich treffen, so müssen auch l_1 und l_1^∞ sich treffen, und ihr

Schnittpunkt wird der Pol der Ebene $[l\mathfrak{M}^\infty]$; ziehen wir also von $\mathfrak{P}$ nach dem Schnittpunkte $(l_1 l_1^\infty)$ einen Strahl, so ist dies der konjugierte Strahl zur Ebene $[l\mathfrak{M}^\infty]$ im Polarbündel $\mathfrak{P}^{(2)}$. Da aber die konjugierten Strahlen l^∞ und l_1^∞ nicht zu einander rechtwinklig sind, aufser wenn sie mit b^∞ und c^∞ zusammenfallen, so wird auch die Ebene $[l\mathfrak{M}^\infty]$ nicht rechtwinklig stehen auf einem Strahle, der von $\mathfrak{P}$ nach dem Schnittpunkte $(l_1 l_1^\infty)$ hingeht, aufser wenn l, also auch $\mathfrak{P}$, in einer der Hauptebenen $[ab^\infty]$ oder $[ac^\infty]$ liegt.

Wir brauchen nunmehr nur diese beiden Hauptebenen zu durchmustern. Die Hauptebene $[ab^\infty]$ ist die Trägerin eines ebenen Polarsystems, dessen Kernkurve eine Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab^\infty}$ ist, die zum Scheitel $\mathfrak{S}$, zur Hauptaxe a hat; ihr Brennpunkt sei $\mathfrak{f}_b$. Eine beliebige Gerade l in dieser Ebene habe zum konjugierten Strahle l_1 im räumlichen Polarsystem, eine Gerade, die in $\mathfrak{p}_1$, dem Pole der Geraden l in Bezug auf die Parabel, rechtwinklig auf deren Ebene steht und der Träger einer Punktinvolution ist, deren Mittelpunkt $\mathfrak{p}_1$ ist; durch irgend ein Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ ist also der Wert der konstanten Potenz:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{x}' = P_{\mathfrak{p}_1}$$

gegeben. Fällen wir aus $\mathfrak{p}_1$ das Perpendikel auf die Gerade l und nennen $\mathfrak{q}$ den Fufspunkt desselben, so hat das Dreieck $\mathfrak{q}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ den Höhenpunkt $\mathfrak{p}$, in der Höhe $\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1$ gelegen, so dafs

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{x}' + \mathfrak{p}_1\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p} = 0$$

ist. Da aber bei der Veränderung des Punktepaares $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ das erste Glied der linken Seite unverändert bleibt, so bleibt auch der Punkt $\mathfrak{p}$ unverändert und wird bestimmt durch die Bedingung:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p} + P_{\mathfrak{p}_1} = 0.$$

Hierdurch wird zu der willkürlich gewählten Geraden l ein bestimmter Punkt $\mathfrak{p}$ zugeordnet (wie in § 61); diese beiden zugeordneten Elemente sind Polare und Pol eines neuen ebenen Polarsystems (in der $[ab^\infty]$-Ebene), wie wir aus folgender Betrachtung erkennen:

Wir verschieben zuerst eine veränderliche Gerade l in

der Ebene $[ab^\infty]$ senkrecht zur Parabelaxe a, dann wird sich auch der Punkt $\mathfrak{p}_1$ mit dem Punkte $\mathfrak{q}$ auf derselben so verändern, dafs die Mitte zwischen $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}$ der feste Scheitel $\mathfrak{S}$ der Parabel bleibt; denn die Punkte $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}_1$ durchlaufen eine gleichseitig-hyperbolische Punktinvolution, deren im Endlichen liegender Doppelpunkt $\mathfrak{S}$ ist. Der Punkt $\mathfrak{p}$ wird aber bestimmt durch die Bedingung:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{q} + P_{\mathfrak{p}_1} = 0,$$

und es ist die Abhängigkeit der Punkte $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ von einander zu ermitteln, denn die in $\mathfrak{q}$ auf der Parabelaxe in der Ebene derselben normal stehende Gerade ist l. Die in $\mathfrak{p}_1$ auf der Parabelebene normal stehende Gerade l_1 ist die Trägerin einer Punktinvolution, deren Potenz $P_{\mathfrak{p}_1}$ ermittelt wird durch die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac^\infty}$ in der andern Hauptebene $[ac^\infty]$. Diese Parabel hat ebenfalls $\mathfrak{S}$ zum Scheitel; ihr Brennpunkt sei $\mathfrak{f}_c$, dann ist bekanntlich:

$$P_{\mathfrak{p}_1} = 4\,\mathfrak{S}\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c$$

(Th. d. K. S. 197), also wird die vorige Bedingung:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p} + 4\,\mathfrak{S}\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c = 0,$$

und da

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{q} = 2 \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{S}$$

ist, so folgt:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{p} = \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c,$$

und da

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}\mathfrak{S}$$

ist, so folgt:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\mathfrak{f}_c,$$

d. h. die Mitte des veränderlichen Punktepaares $\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}$ ist der feste Brennpunkt $\mathfrak{f}_c$ der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac^\infty}$. Das Punktepaar $\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}$ durchläuft also eine neue gleichseitig-hyperbolische Punktinvolution, deren im Endlichen liegender Doppelpunkt der Brennpunkt $\mathfrak{f}_c$ der andern Haupt-Parabel ist.

Zweitens drehen wir eine veränderliche Gerade l in der Ebene $[ab^\infty]$ um den festen Brennpunkt $\mathfrak{f}_b$ und untersuchen dabei die Abhängigkeit des Punktes $\mathfrak{p}$ von l. Ihr Pol $\mathfrak{p}_1$ in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab^\infty}$ bewegt sich dabei auf der Leitlinie B der Parabel und ist der Durchschnittspunkt des in $\mathfrak{f}_b$ auf der Geraden l errichteten Perpendikels mit der Leit-

linie B, wie aus bekannten Eigenschaften der Parabel folgt. Fällen wir daher aus $\mathfrak{p}_1$ ein Perpendikel auf l, so wird der Fufspunkt $\mathfrak{q}$ desselben der unveränderliche Punkt $\mathfrak{f}_b$, und um den Punkt $\mathfrak{p}$ auf diesem Perpendikel zu finden, haben wir die Bedingung:

$$\mathfrak{p}_1 \mathfrak{f}_b \cdot \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p} + P_{\mathfrak{p}_1} = 0;$$

es bleibt aber noch die Potenz $P_{\mathfrak{p}_1}$ zu ermitteln. Zu diesem Behufe legen wir durch die Leitlinie B, welche von der a-Axe in $\mathfrak{m}$ getroffen werden möge, eine Ebene normal zur Hauptebene $[a\, b^\infty]$; diese schneidet das Paraboloid in einem Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ ist, dessen eine Hauptaxe B ist, und dessen andere Hauptaxe also in $\mathfrak{m}$ auf der ersten senkrecht steht; die Potenzen der zugehörigen Punktinvolutionen sind folgende: trifft l die Leitlinie $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{p}_1'$, so ist die Potenz auf B (Fig. 31):

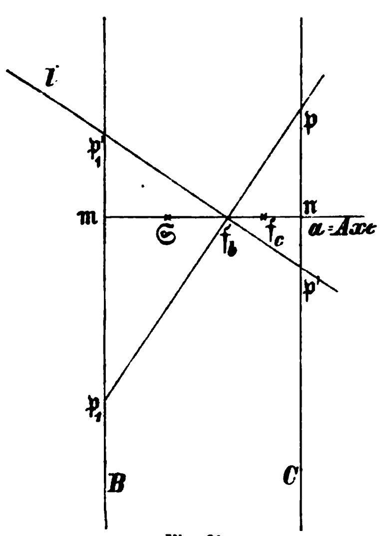


Fig. 31.

$$= \mathfrak{m}\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{p}_1',$$

und die Potenz der Punktinvolution auf der andern Hauptaxe dieses Kegelschnitts leicht zu finden durch die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac^\infty}$, nämlich nach dem Vorigen:

$$\doteq 4 \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c = 2\, \mathfrak{f}_b \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c,$$

oder, denken wir uns die Strecke $\mathfrak{f}_b \mathfrak{f}_o$ über $\mathfrak{f}_c$ hinaus um sich selbst verlängert bis $\mathfrak{n}$, so dafs

$$\mathfrak{f}_b \mathfrak{f}_c = \mathfrak{f}_o \mathfrak{n}$$

wird, dann ist:

$$2\, \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c = \mathfrak{m}\mathfrak{n},$$

also die Potenz

$$P_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{f}_b \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{n},$$

und hieraus läfst sich die Potenz $P_{\mathfrak{p}_1}$ ausdrücken (S. 561):

$$P_{\mathfrak{p}_1} : P_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_1 : \mathfrak{p}_1' \mathfrak{m},$$

also wird:

$$P_{\mathfrak{p}_1} = \frac{\mathfrak{f}_b\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_1'\mathfrak{m}}\,\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{f}_b{}^2 \cdot \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}{\mathfrak{f}_b\mathfrak{m}};$$

demnach wird die vorige Bedingung:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{f}_b \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{n} + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{f}_b\mathfrak{m} = 0,$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{f}_b} = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}_b},$$

d. h. wenn wir uns durch den oben konstruierten Punkt $\mathfrak{n}$ eine Parallele C zur Leitlinie B gezogen denken, so ist der gesuchte Punkt $\mathfrak{p}$ der Durchschnittspunkt derselben mit der Verbindungslinie $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{f}_b|$. Bei der Drehung von l durchläuft also der Punkt $\mathfrak{p}_1$ die Gerade B und der Punkt $\mathfrak{p}$ die feste Gerade C; bezeichnen wir noch den Schnittpunkt der Geraden l mit C durch $\mathfrak{p}'$, so ist:

$$\mathfrak{n}\mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{n}\mathfrak{p}' = -\,\mathfrak{n}\mathfrak{f}_b{}^2,$$

also sind $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ ein Paar konjugierter Punkte einer Punktinvolution auf C.

Nachdem wir für zwei besondere Lagen der Geraden l die Abhängigkeit des zugehörigen Punktes $\mathfrak{p}$ ermittelt haben, wird es leicht sein, für eine ganz beliebige Lage von l den zugehörigen Punkt $\mathfrak{p}$ zu konstruieren.

Wir nehmen eine beliebige Gerade l in der Hauptebene $[a\,b^\infty]$ und konstruieren zuerst ihren Pol $\mathfrak{p}_1$ in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$ in folgender Weise (Fig. 32):

Ist $\mathfrak{f}_b$ der Brennpunkt, B die Leitlinie der Parabel, und schneidet l die Parabelaxe a in $\mathfrak{a}$, die Leitlinie B in $\mathfrak{b}$, so wird die Polare von $\mathfrak{a}$ die in $\mathfrak{a}'$ auf der Parabelaxe errichtete Senkrechte sein, wo

$$\mathfrak{a}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\mathfrak{a}'$$

ist, und die Polare von $\mathfrak{b}$ die auf der Verbindungslinie $|\mathfrak{b}\mathfrak{f}_b$ im Punkte $\mathfrak{f}_b$ errichtete Senkrechte. Der Schnittpunkt der beiden Polaren von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist aber der Pol $\mathfrak{p}_1$ der Geraden l. Es hängt also im Grunde die Konstruktion des zu der gegebenen Geraden l zugehörigen Poles $\mathfrak{p}_1$ allein ab von den beiden festen Punkten $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{S}$, Brennpunkt und Scheitel der Parabel. Um nun den Punkt $\mathfrak{p}$ zu konstruieren, müssen wir von $\mathfrak{p}_1$ das Perpendikel $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}$ auf l herablassen und auf demselben den Punkt $\mathfrak{p}$ demgemäfs bestimmen, dafs

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p} + P_{\mathfrak{p}_1} = 0$$

wird; also ist zunächst die Potenz $P_{\mathfrak{p}_1}$ zu ermitteln. Dies

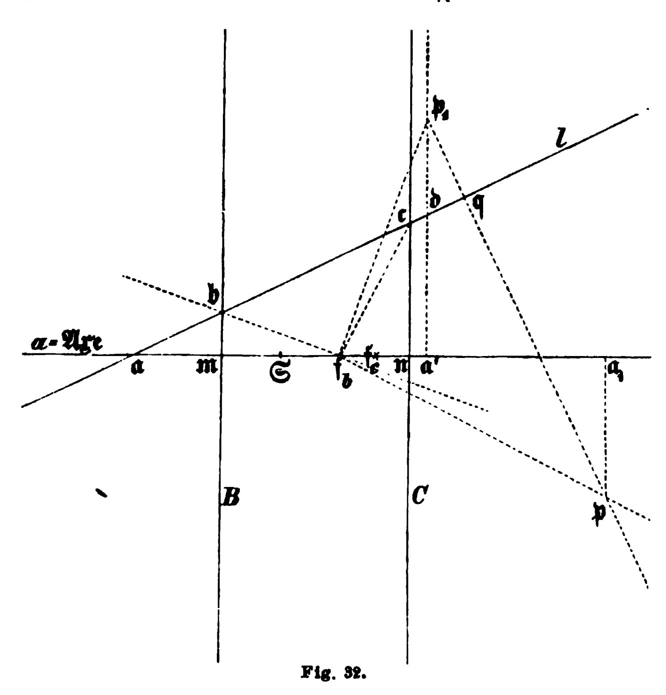


Fig. 32.

geschieht, indem wir zuerst die Potenz $P_{\mathfrak{a}'}$ der Punktinvolution ausdrücken, welche dem in $\mathfrak{a}'$ errichteten Perpendikel auf der Ebene $[a\, b^{\infty}]$ zugehört; nämlich aus der Eigenschaft der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac^{\infty}}$ folgt:

$$P_{\mathfrak{a}'} = 4\,\mathfrak{S}\mathfrak{f}_c \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{a}' = \mathfrak{m}\mathfrak{n} \,.\, \mathfrak{a}\mathfrak{a}';$$

sodann betrachten wir in der durch $|\mathfrak{a}'\mathfrak{p}_1|$ auf der Ebene $[a\, b^{\infty}]$ senkrecht errichteten Ebene den Durchschnittskegelschnitt, für welchen $\mathfrak{a}'$ der Mittelpunkt ist; bezeichnen wir endlich noch den Durchschnittspunkt von $|\mathfrak{a}'\mathfrak{p}_1|$ mit l durch $\mathfrak{d}$, so sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{d}$ konjugierte Punkte für den letzteren Kegelschnitt, also:

$$P_{\mathfrak{p}_1} : P_{\mathfrak{a}'} = \mathfrak{d}\mathfrak{p}_1 : \mathfrak{d}\mathfrak{a}';$$

also ist $P_{\mathfrak{p}_1}$ gefunden:

$$P_{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{m}\mathfrak{n} \,.\, \mathfrak{a}\mathfrak{a}' \,.\, \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{d}\mathfrak{a}'}\,.$$

Da aber wegen der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{b}$:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{a}'} = \frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}\mathfrak{b}}$$

ist, so folgt:

$$P_{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,.\,\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{q}}\,.\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}_1;$$

wenn wir diesen Wert substituieren in die obige Bedingung zur Bestimmung von $\mathfrak{p}$, so folgt:

$$\frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{q}}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{p}_1} = \frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}}{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}};$$

wenn wir daher aus $\mathfrak{p}$ das Perpendikel $\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_1$ auf die a-Axe herablassen, so dafs sich verhält:

$$\frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{q}}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{p}_1} = \frac{\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}},$$

so folgt die einfache Beziehung:

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{n} = \mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_1,$$

oder, wenn wir die Gleichheiten hinzufügen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}\,\mathfrak{S} &= \mathfrak{S}\,\mathfrak{a}' \\
\mathfrak{S}\,\mathfrak{m} &= \mathfrak{f}_b\,\mathfrak{S} \\
\mathfrak{n}\,\mathfrak{f}_c &= \mathfrak{f}_c\,\mathfrak{f}_b \\
\hline
\mathfrak{a}\mathfrak{f}_c &= \mathfrak{f}_c\,\mathfrak{a}_1,
\end{aligned}$$

d. h. wenn wir die Strecke $\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}_c$ über $\mathfrak{f}_c$ hinaus um sich selbst verlängern, so ist der Endpunkt der Verlängerung $\mathfrak{a}_1$ derjenige Punkt, in welchem ein Perpendikel auf der a-Axe errichtet durch $\mathfrak{p}$ geht, d. h. das aus $\mathfrak{p}_1$ auf l herabgelassene Perpendikel in $\mathfrak{p}$ trifft.

Zweitens haben wir eine andere Beziehung zur Bestimmung für die Lage des Punktes $\mathfrak{p}$; es verhält sich nämlich wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$\frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}},$$

wo $\mathfrak{c}$ der Durchschnittspunkt der Geraden l und C ist, und, da vorhin $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n} = \mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_1$ gefunden wurde:

$$\frac{\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{n}}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}},$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{b}$ folgt:

$$\frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{q}},$$

oder nach dem Obigen:

$$= \frac{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_1};$$

die beiden Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$$

$$\frac{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_1} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}}$$

liefern durch Multiplikation die Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}};$$

ferner wird, da die Gerade $|\mathfrak{f}_b\,\mathfrak{p}_1|$ rechtwinklig steht auf der Geraden $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{f}_b|$, das Dreieck $\mathfrak{b}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{f}_b$ ähnlich sein dem Dreieck $\mathfrak{f}_b\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{p}_1$, also verhält sich:

$$\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{f}_b} = \frac{\mathfrak{a}'\,\mathfrak{f}_b}{\mathfrak{f}_b\,\mathfrak{p}_1},$$

oder, da $\mathfrak{S}$ die Mitte sowohl von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'$, als auch von $\mathfrak{m}\,\mathfrak{f}_b$ ist, also:

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\,\mathfrak{f}_b,$$

können wir auch schreiben:

$$\frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{f}_b}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{f}_b}$$

und nach dem Obigen:

$$\frac{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{f}_b}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{f}_b},$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{f}_b}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{f}_b}{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}};$$

da endlich die beiden Dreiecke $\mathfrak{f}_b\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}_b\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}$ die Winkel in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{p}_1$ gleich, die sie einschließenden Seiten proportional haben, so sind sie ähnlich, also auch die Winkel bei $\mathfrak{f}_b$ einander gleich; hieraus folgt, daſs auch

$$\angle\, \mathfrak{b}\,\mathfrak{f}_b\,\mathfrak{p}_1 = \angle\, \mathfrak{c}\,\mathfrak{f}_b\,\mathfrak{p}$$

ist, und da ersterer 90^0 ist, so ist auch

$$\angle\, \mathfrak{c}\,\mathfrak{f}_b\,\mathfrak{p} = 90^0.$$

Die Konstruktion des Punktes $\mathfrak{p}$ gestaltet sich nunmehr folgendermaſsen:

Die Gerade l schneidet die a-Axe in $\mathfrak{a}$ und die zu ihr rechtwinklige feste Gerade C in $\mathfrak{c}$; auf der a-Axe ist der feste Punkt $\mathfrak{f}_b$ bekannt, und die Mitte seines Abstandes von C ist der feste Punkt $\mathfrak{f}_c$; man mache

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}_c = \mathfrak{f}_c\,\mathfrak{a}_1$$

und errichte in $\mathfrak{a}_1$ ein Perpendikel auf der a-Axe; man ziehe $\mathfrak{c}\,\mathfrak{f}_b$ und errichte eine Senkrechte darauf in $\mathfrak{f}_b$; diese trifft das vorige Perpendikel in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{p}$.

Vergleichen wir aber diese Konstruktion mit derjenigen, (S. 580) vermittelst welcher wir vorhin zu der Geraden l ihren Pol $\mathfrak{p}_1$ in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$ fanden, so sehen wir, dafs beide Konstruktionen im wesentlichen übereinstimmen, nur die konstanten Elemente beider Konstruktionen sind verschieden; an Stelle der Punkte $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{S}$ sind die Punkte $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$, oder an Stelle von $\mathfrak{f}_b$ und B sind $\mathfrak{f}_b$ und C getreten. Waren also vorher $\mathfrak{p}_1$ und l Pol und Polare in Bezug auf eine Parabel, für welche $\mathfrak{f}_b$ und B Brennpunkt und Leitlinie sind, so müssen auch jetzt $\mathfrak{p}$ und l Pol und Polare sein in Bezug auf eine neue Parabel, für welche $\mathfrak{f}_b$ und C Brennpunkt und Leitlinie sind.

Wir haben also folgendes Resultat gefunden:

Die oben konstruierten zusammengehörigen Elemente l und $\mathfrak{p}$ sind Polare und Pol eines neuen ebenen Polarsystems in der Hauptebene $[ab^\infty]$, dessen reeller Kernkegelschnitt eine Parabel ist, für welche der Brennpunkt $\mathfrak{f}_b$ des Hauptschnittes $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$ ebenfalls Brennpunkt und der Brennpunkt $\mathfrak{f}_c$ des andern Hauptschnittes $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac\infty}$ Scheitel ist. Wir bezeichnen diese neue Parabel durch

$$P^{(2)}_{ab\infty}$$

und wissen, dafs die beiden Parabeln $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$ und $P^{(2)}_{ab\infty}$ konfokal sind, denn sie haben die gemeinschaftlichen Brennpunkte $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{M}^\infty$. In gleicher Weise finden wir in der zweiten Hauptebene $[ac^\infty]$ eine neue Parabel, welche umgekehrt $\mathfrak{f}_c$ zum Brennpunkt und $\mathfrak{f}_b$ zum Scheitel hat. Diese beiden Parabeln in den zu einander rechtwinkligen Hauptebenen des

Paraboloids nennen wir die Fokalkegelschnitte des Paraboloids:

$$P^{(2)}_{ab\infty} \text{ und } P^{(2)}_{ac\infty}$$

und sehen demnach, daſs der Brennpunkt der einen Parabel der Scheitel der andern ist und umgekehrt, also ihre Öffnungen in der gemeinschaftlichen a-Axe immer entgegengesetzt gerichtet sind, mag das Paraboloid ein hyperbolisches oder elliptisches sein.

Dieses Resultat war vorauszusehen, wenn wir uns das Paraboloid als den Grenzfall eines Ellipsoids oder Hyperboloids dachten, von welchem der Mittelpunkt in die Unendlichkeit rückt; es schien aber wünschenswert, dies unabhängig von einem solchen Übergange direkt nachzuweisen, was im Obigen geschehen ist.

Die folgende Betrachtung ist nun durchaus gleichlautend der analogen in § 61, indem die Fokalkegelschnitte beim Paraboloid dieselbe Eigenschaft darbieten, wie bei einer Fläche $F^{(2)}$, deren Mittelpunkt im Endlichen liegt.

Nehmen wir z. B. eine beliebige Tangente t der Fokalparabel $P^{(2)}_{ab\infty}$ und ihren Berührungspunkt $\mathfrak{t}$, sei ferner t_1 die konjugierte Gerade zu t im räumlichen Polarsystem, dessen Kernfläche das Paraboloid ist, so steht t_1 in dem Punkte $\mathfrak{t}_1$ senkrecht auf der Hauptebene $[ab^\infty]$, und $\mathfrak{t}_1$ ist der Pol der Geraden t in Bezug auf die Hauptparabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$. Da t und $\mathfrak{t}$ Tangente und Berührungspunkt, also auch Polare und Pol der Fokalparabel und incident sind, so muſs $\mathfrak{t}$ der Fuſspunkt des aus $\mathfrak{t}_1$ auf t herabgelassenen Perpendikels sein, folglich $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1$ die kürzeste Entfernung zwischen den Geraden t und t_1.

Der Konstruktion zufolge wird, da in unserem besonderen Falle $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{t}$ hineinfallen:

$$(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)^2 + P_{\mathfrak{t}_1} = 0,$$

also, wenn $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ irgend ein Paar konjugierter Punkte der Punktinvolution ist, welche der Geraden t_1 zugehört:

$$(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)^2 + \mathfrak{t}_1\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{t}_1\mathfrak{x}' = 0,$$

woraus folgt, daſs die Strahlen $|\mathfrak{t}\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{x}'|$ zu einander rechtwinklig sein müssen, folglich auch die Ebenen $[t\mathfrak{x}]$ und $[t\mathfrak{x}']$, d. h. die dem Strahle t zugehörige Ebeneninvolution

im räumlichen Polarsystem ist eine orthogonale. Zweitens besitzt aber der Punkt t die Eigenschaft, daſs der Pol der Ebene $[tt_1]$ auf t liegt, und diese Ebene auf dem Strahle t normal steht, folglich ist t notwendig eine Hauptaxe des Polarbündels, welches dem Punkte t im räumlichen Polarsystem zugehört. Der Punkt t hat also die zu Anfang geforderte Eigenschaft, daſs das ihm zugehörige Polarbündel eine Hauptaxe hat, deren zugehörige Ebeneninvolution orthogonal ist, oder daſs das zugehörige Polarbündel ein rotatorisches ist, für den reellen Fall, der Berührungskegel aus t an das Paraboloid ein gerader Kegel ist.

Wir können demgemäſs folgendes Resultat aussprechen:

Ist ein Paraboloid gegeben, so besteht der Ort eines solchen Punktes, dessen Berührungskegel an das Paraboloid ein gerader Kegel (Rotationskegel) wird, aus zwei Parabeln (Fokalparabeln), die in den beiden Hauptebenen des Paraboloids liegen und mit den Hauptparabeln desselben konfokal sind; der Scheitel jeder dieser beiden Fokalparabeln ist der Brennpunkt der nicht in ihrer Ebene liegenden Hauptparabel. Die Fokalparabeln haben also in ihren zu einander rechtwinkligen Ebenen, deren Schnittlinie ihre gemeinschaftliche Axe ist, zu Brennpunkten jede den Scheitel der andern; ihre Öffnungen sind daher entgegengesetzt gerichtet. Jede Tangente einer Fokalparabel ist die Rotationsaxe des Berührungskegels, welcher aus dem Berührungspunkte der Fokalparabel an das Paraboloid gelegt werden kann und allemal ein Rotationskegel ist; ist derselbe nicht reell, so ist das ihn vertretende Polarbündel ein rotatorisches.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Lage der Fokalparabeln zu untersuchen für die beiden Gattungen von Paraboloiden, das elliptische und das hyperbolische Paraboloid. Hierzu bemerken wir im voraus, daſs zwei konfokale Parabeln, deren Öffnungen nach derselben Seite hin gerichtet sind, keinen reellen gemeinschaftlichen Punkt haben können (auſser dem unendlich-entfernten Punkte der gemeinschaftlichen Axe), da-

gegen zwei konfokale Parabeln, deren Öffnungen nach entgegengesetzten Seiten hin gerichtet sind, zwei reelle Schnittpunkte haben müssen.

Denn sei $\mathfrak{f}_c$ der gemeinschaftliche Brennpunkt zweier Parabeln, welche dieselbe Axe a haben, und deren Öffnungen nach derselben Seite hin gerichtet sind, dann werden die Leitlinien C und C_1 dieser Parabeln beide dieselbe Hälfte der a-Axe, von $\mathfrak{f}_c$ aus gesehen, treffen und auf der Axe normal stehen (Fig. 33). Könnten sie nun einen reellen gemeinschaftlichen Punkt haben, so müſste dessen Abstand von $\mathfrak{f}_c$ so groſs sein, wie sein Abstand von C und von C_1. Da die letzteren beiden Abstände aber nie gleich sind, sondern immer um ein endliches Stück, den Abstand der beiden Parallelen C und C_1 von einander verschieden, so giebt es keinen gemeinschaftlichen Punkt zweier solchen Parabeln auſser dem unendlich-entfernten Punkte der a-Axe.

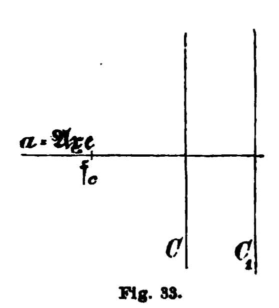


Fig. 33.

Wenn dagegen zweitens $\mathfrak{f}_b$ der gemeinschaftliche Brennpunkt zweier Parabeln ist, welche dieselbe Axe a haben, und deren Öffnungen nach entgegengesetzten Seiten hin gerichtet sind, dann werden die Leitlinien B und B_1 dieser Parabeln den gemeinschaftlichen Brennpunkt $\mathfrak{f}_b$ zwischen sich haben (Fig. 34), und es ist leicht ersichtlich, daſs es zwei symmetrisch liegende Punkte $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ in der Ebene giebt, die gleich weit von B und B_1 und ebenso weit von $\mathfrak{f}_b$ abstehen; diese leicht zu konstruierenden Punkte müssen offenbar beiden Parabeln gemeinschaftlich sein, die auſserdem in dem Punkte $\mathfrak{M}^\infty$ die unendlich-entfernte Gerade ge-

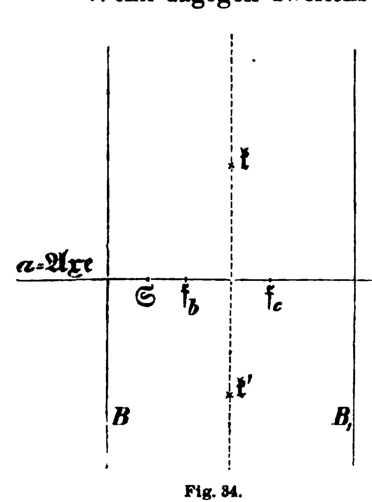


Fig. 34.

meinschaftlich berühren. Die Parabeln durchkreuzen sich in den beiden Punkten $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ rechtwinklig, weil die Tangenten in $\mathfrak{k}$ die Halbierungslinien von Winkel und Nebenwinkel desjenigen Linienpaares sind, welches $\mathfrak{k}$ mit $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{M}^\infty$ verbindet.

Dies vorausgeschickt haben wir nun:

1) beim hyperbolischen Paraboloid die beiden Hauptebenen $[ab^\infty]$ und $[ac^\infty]$, die Schnittkurven derselben mit dem Paraboloid, nämlich die Hauptparabeln $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac\infty}$ mit gemeinschaftlicher a-Axe und entgegengesetzt gerichteten Öffnungen, also den gemeinschaftlichen Scheitel $\mathfrak{S}$ zwischen ihren Brennpunkten $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$, endlich die beiden Fokalparabeln $P^{(2)}_{ab\infty}$ und $P^{(2)}_{ac\infty}$. In der Ebene $[ab^\infty]$ hat die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$ $\mathfrak{f}_b$ zum Brennpunkt und $\mathfrak{S}$ zum Scheitel, die Parabel $P^{(2)}_{ab\infty}$ hat $\mathfrak{f}_b$ zum Brennpunkt und $\mathfrak{f}_c$ zum Scheitel. Die beiden Parabeln haben daher ihre Öffnungen nach derselben Seite hin gerichtet, folglich keine gemeinschaftlichen Punkte, und die Fokalparabel $P^{(2)}_{ab\infty}$ liegt ganz in dem äufseren Raume der Hauptparabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$, oder aus jedem Punkte der ersteren gehen reelle Tangentenpaare an die letztere. In der Ebene $[ac^\infty]$ hat die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac\infty}$ $\mathfrak{f}_c$ zum Brennpunkt und $\mathfrak{S}$ zum Scheitel, die Parabel $P^{(2)}_{ac\infty}$ $\mathfrak{f}_c$ zum Brennpunkt und $\mathfrak{f}_b$ zum Scheitel. Die beiden Parabeln haben daher ihre Öffnungen ebenfalls nach derselben Seite hin gerichtet, folglich keine gemeinschaftlichen Punkte, und die Fokalparabel $P^{(2)}_{ac\infty}$ liegt ganz in dem äufseren Raume der Hauptparabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac\infty}$, oder aus jedem Punkte der ersteren gehen reelle Tangentenpaare an die letztere. Beim hyperbolischen Paraboloid liegen also beide Fokalparabeln derartig im Raume, dafs von jedem ihrer Punkte reelle Berührungskegel an das Paraboloid sich legen lassen, die Umdrehungskegel sind; die Fokalparabeln haben keinen reellen Punkt mit dem hyperbolischen Paraboloid gemein aufser dem unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{M}^\infty$ ihrer gemeinschaftlichen Axe a.

2) Beim elliptischen Paraboloid enthalten die beiden Hauptebenen $[ab^\infty]$ und $[ac^\infty]$ die Parabeln $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac\infty}$ mit der gemeinsamen Axe a, dem gemeinsamen Scheitel $\mathfrak{S}$ und den Brennpunkten $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$, welche nach derselben Seite hin von $\mathfrak{S}$ aus liegen, weil die Öffnungen beider Parabeln gleich gerichtet sind, endlich die beiden Fokalparabeln $P^{(2)}_{ab\infty}$ und $P^{(2)}_{ac\infty}$. Da die beiden Brennpunkte $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$ nach derselben Seite hin von $\mathfrak{S}$ liegen und im allgemeinen nicht zusammenfallen, so wird einer von ihnen näher, der andere weiter von $\mathfrak{S}$ abstehen; wir nennen den näher liegenden Brennpunkt $\mathfrak{f}_b$, den weiter liegenden $\mathfrak{f}_c$; alsdann hat in der Hauptebene $[ac^\infty]$ die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac\infty}$ $\mathfrak{f}_c$ zum Brennpunkt und $\mathfrak{S}$ zum Scheitel, die Fokalparabel $P^{(2)}_{ac\infty}$ dagegen $\mathfrak{f}_c$ zum Brennpunkt und $\mathfrak{f}_b$ zum Scheitel; folglich haben diese beiden Parabeln ihre Öffnungen nach derselben Seite gerichtet, mithin keine gemeinschaftlichen Punkte, und die Fokalparabel $P^{(2)}_{ac\infty}$ liegt ganz in dem inneren Raume der Hauptparabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac\infty}$, d. h. es giebt keine reellen Tangentenpaare aus den Punkten der Fokalparabel an die Hauptparabel. Die Fokalparabel $P^{(2)}_{ac\infty}$ liegt mithin auch ganz in dem inneren Raume des elliptischen Paraboloids; es gehen also aus ihren Punkten keine reellen Berührungskegel an dasselbe; dagegen schneidet jede Tangente der Fokalparabel die Hauptparabel in reellen Punktepaaren. In der Hauptebene $[ab^\infty]$ hat aber die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$ $\mathfrak{f}_b$ zum Brennpunkt und $\mathfrak{S}$ zum Scheitel, die Fokalparabel $P^{(2)}_{ab\infty}$ $\mathfrak{f}_b$ zum Brennpunkt und $\mathfrak{f}_c$ zum Scheitel, und da $\mathfrak{f}_b$ zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{f}_c$ liegt, so haben die beiden Parabeln ihre Öffnungen nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; sie schneiden sich also in zwei reellen Punkten $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$, welche wir die Kreispunkte des elliptischen Paraboloids nennen; diese liegen symmetrisch zur a-Axe in derjenigen der beiden Hauptebenen $[ab^\infty]$, welche die Parabel enthält, deren Brennpunkt dem Scheitel näher liegt, als bei der andern. Die beiden Kreispunkte $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ trennen auf der Fokalparabel $P^{(2)}_{ab\infty}$ diejenigen Punkte, aus denen reelle Berührungskegel an das Paraboloid gelegt werden können von

denjenigen, aus welchen keine reellen Berührungskegel an dasselbe gehen. Ferner ist ersichtlich, dafs jede Tangente der Fokalparabel die Hauptparabel in einem reellen Punktepaar treffen mufs, denn sie trifft allemal die Axe derselben in einem Punkte, welcher in dem inneren Raume der Hauptparabel liegt. Beim elliptischen Paraboloid treffen also sämtliche Tangenten der beiden Fokalparabeln in den Hauptebenen das Paraboloid in reellen Punktepaaren, beim hyperbolischen Paraboloid keine.

Für die beiden Kreispunkte des elliptischen Paraboloids artet der Berührungskegel in die (doppelt zu zählende) Berührungsebene aus, und die Tangente der Fokalparabel in $\mathfrak{f}$ wird Normale der Hauptparabel, weil sich zwei konfokale Parabeln immer rechtwinklig durchschneiden, falls sie sich treffen (S. 588). Die Berührungsebene in $\mathfrak{f}$ wird wegen der Eigenschaft der Fokalparabel den Punkt $\mathfrak{f}$ als Mittelpunkt einer orthogonalen Strahleninvolution enthalten, deren Doppelstrahlen nach den unendlich-entfernten imaginären Kreispunkten der Berührungsebene hingehen. Die Berührungsebene in einem Kreispunkte $\mathfrak{f}$ des elliptischen Paraboloids schneidet dasselbe also in einem Nullkreise oder in einem imaginären Linienpaar, welches nach den unendlich-entfernten imaginären Kreispunkten hingeht. Hieraus folgt, dafs jede Ebene, die zu der Berührungsebene in $\mathfrak{f}$ parallel ist, das Paraboloid in einem (reellen oder imaginären) Kreise schneiden mufs, weil die unendlich-entfernte Gerade einer solchen Ebene die Trägerin einer zugehörigen Punktinvolution ist im räumlichen Polarsystem, deren Doppelpunkte die imaginären Kreispunkte sind. Da nun die beiden Kreispunkte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ symmetrisch liegen, so folgt, dafs es zwei bestimmte Stellungen für eine Ebene giebt, die das elliptische Paraboloid in einem Kreise schneiden soll. Diese Stellungen sind parallel den Berührungsebenen in den beiden Kreispunkten $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ und enthalten also die Richtung einer der beiden unendlich-entfernten Hauptaxen (c^∞). Die dadurch erhaltenen beiden Parallelebenenbüschel enthalten zwei Scharen von Kreisen, welche das elliptische Paraboloid doppelt erfüllen. Den Übergang

von den reellen zu den imaginären Kreisen bilden die Kreispunkte (Nullkreise) des Paraboloids (s. o. S. 573).

§ 64. Einige Eigenschaften der Fokalkegelschnitte.

Die Fokalkegelschnitte einer Fläche 2. O. bieten mannigfache Eigenschaften dar, welche den Brennpunktseigenschaften des Kegelschnitts analog sind; von diesen wollen wir einige hervorheben. Die Konstruktion, welche zu den Fokalkegelschnitten in den Hauptebenen der Fläche führte, war folgende:

Nehmen wir in einer der drei Hauptebenen eine beliebige Gerade l an, und sei der ihr konjugierte Strahl l_1 im räumlichen Polarsystem, so steht derselbe normal auf der Hauptebene in demjenigen Punkte $\mathfrak{p}_1$, welcher der Pol von l ist in Bezug auf den in der Hauptebene enthaltenen Hauptkegelschnitt. Der Strahl l_1 ist der Träger einer Punktinvolution, deren Mittelpunkt $\mathfrak{p}_1$ ist, und deren Potenz $P_{\mathfrak{p}_1}$ sei. Fällen wir von $\mathfrak{p}_1$ das Perpendikel auf die Gerade l, sei $\mathfrak{q}$ der Fuſspunkt dieses Perpendikels, und wird auf demselben ein Punkt $\mathfrak{p}$ so bestimmt, daſs

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{p}_1\mathfrak{p} + P_{\mathfrak{p}_1} = 0$$

ist, dann sind $\mathfrak{p}$ und l Pol und Polare eines neuen ebenen Polarsystems in der betrachteten Hauptebene, und der Kernkegelschnitt desselben ist der gesuchte Fokalkegelschnitt.

Legen wir nun die Ebene $[l_1\mathfrak{q}]$, welche auf l in dem Punkte $\mathfrak{q}$ normal steht, da $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}$ die kürzeste Entfernung zwischen den Geraden l und l_1 ist, so wird, wenn $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ irgend ein Paar konjugierter Punkte der Punktinvolution auf l_1 bedeutet, deren Potenz $P_{\mathfrak{p}_1}$ ist, aus der Bedingung:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{p}_1\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_1\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{p}_1\mathfrak{x}' = 0$$

folgen, daſs $\mathfrak{p}$ der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{q}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ ist; folglich muſs auch $\mathfrak{p}\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{q}\mathfrak{x}'$ normal stehen, oder, wenn wir den Schnittpunkt:

$$(|\mathfrak{p}\mathfrak{x}|, |\mathfrak{q}\mathfrak{x}'|) = \mathfrak{O}$$

bezeichnen (Fig. 35), so muſs der Strahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}|$ eine Normale der Ebene $[\mathfrak{O}l]$ sein; die Ebene $[\mathfrak{O}l]$ oder $[l\mathfrak{x}']$ ist aber die Polarebene des Punktes $\mathfrak{x}$ im räumlichen Polarsystem, also sind der Strahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}|$ (oder $|\mathfrak{O}\mathfrak{p}|$) und die Ebene $[\mathfrak{O}l]$

Polarstrahl und Polarebene des Polarbündels $\mathfrak{O}$, welches dem Punkte $\mathfrak{O}$ im räumlichen Polarsystem zugehört, und, da sie aufserdem rechtwinklig zu einander sind, so sind $|\mathfrak{O}\mathfrak{p}|$ und $[\mathfrak{O}l]$ ein Hauptstrahl und die zu ihm normale Hauptebene des Polarbündels $\mathfrak{O}$. Es läfst sich dies aber auch umkehren und zeigen, dafs, wenn man für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ im Raume einen Hauptstrahl und die zu ihm normale Hauptebene des zugehörigen Polarbündels $\mathfrak{O}^{(2)}$ konstruiert, diese beiden Elemente die betrachtete Hauptebene des räumlichen Polarsystems in einem Punkte $\mathfrak{p}$ und einer Geraden l durchschneiden, welche Pol und Polare des neuen ebenen Polarsystems sind, dessen Kern der Fokalkegelschnitt ist. Denn bestimmen wir in dem Polarbündel $\mathfrak{O}^{(2)}$ eine Hauptebene, und sei die Schnittlinie derselben mit der ursprünglichen Hauptebene des räumlichen Polarsystems die Gerade l; sei ferner die zu derselben konjugierte Gerade l_1 im räumlichen Polarsystem, so wird l_1 auf der ursprünglichen Hauptebene normal stehen; also l und l_1 sind zu einander rechtwinklig gerichtet. Die Ebene $[\mathfrak{O}l]$ möge in $\mathfrak{x}'$ die Gerade l_1 treffen, dann wird ihr Pol auch auf l_1 liegen und zwar in demjenigen Punkte $\mathfrak{x}$, welcher mit $\mathfrak{O}$ verbunden den Hauptstrahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}$ des Polarbündels $\mathfrak{O}^{(2)}$ liefert, der auf der Ebene $[\mathfrak{O}l]$ normal steht. In der Ebene $[\mathfrak{O}l_1]$ ist nicht nur die Gerade l_1, sondern auch die Gerade $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}|$ normal zu l gerichtet; folglich ist die Ebene $[\mathfrak{O}l_1]$ Normalebene des Strahles l; treffe sie denselben in $\mathfrak{q}$, dann wird in dem Dreieck $\mathfrak{q}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ eine Höhe $\mathfrak{x}\mathfrak{O}$ sein; fällen wir die zweite Höhe $\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1$ aus $\mathfrak{q}$ auf $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}'| = l_1$, und sei der Fufspunkt derselben $\mathfrak{p}_1$, dann wird $\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1$ die kürzeste Entfernung zwischen den Strahlen l und l_1 sein, weil $|\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1|$ sowohl auf l_1, als auch auf l normal steht; folglich ist $\mathfrak{p}_1$ der Mittelpunkt derjenigen Punktinvolution, welche der Geraden l_1 im räumlichen Polarsystem zugehört; also die

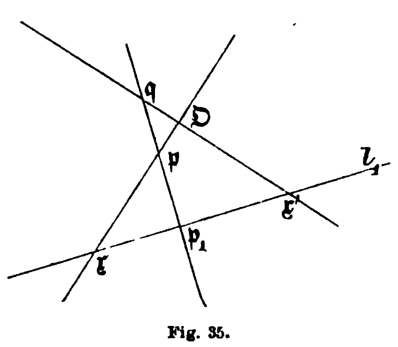


Fig. 35.

Potenz derselben $P_{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{x}'$. Nennen wir endlich $\mathfrak{p}$ den Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{q}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$, d. h. den Schnittpunkt $(|\mathfrak{D}\mathfrak{x}|, |\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1|) = \mathfrak{p}$, so ist bekanntlich:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{x}' + \mathfrak{p}_1\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p} = 0,$$

d. h.

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p} + P_{\mathfrak{p}_1} = 0.$$

Der Punkt $\mathfrak{p}$ ist aber derjenige, in welchem der Hauptstrahl $|\mathfrak{D}\mathfrak{x}|$ des Polarbündels $\mathfrak{D}^{(2)}$ die betrachtete Hauptebene des räumlichen Polarsystems trifft, und da seine eben ausgeführte Konstruktion zusammenfällt mit der anfangs gegebenen Konstruktion von Pol und Polare ($\mathfrak{p}$ und l) für den Fokalkegelschnitt, so schliefsen wir:

Wenn man im räumlichen Polarsystem eine Hauptebene desselben treffen läfst von einem beliebigen Paar rechtwinkliger Elemente, nämlich einer Hauptebene und dem zu ihr normalen Hauptstrahl für ein beliebiges Polarbündel $\mathfrak{D}^{(2)}$, welches irgend einem Punkte $\mathfrak{D}$ im räumlichen Polarsystem zugehört, so gehören die Durchschnittsgerade l und der Durchschnittspunkt $\mathfrak{p}$ als Polare und Pol einem ebenen Polarsystem in der betrachteten Hauptebene an, dessen Kern der Fokalkegelschnitt dieser Hauptebene ist. Demnach treffen die drei Hauptaxen des Polarbündels $\mathfrak{D}^{(2)}$ die betrachtete Hauptebene in den Ecken eines Polardreiecks (Tripels) für dieses neue Polarsystem oder den Fokalkegelschnitt. Verändern wir den Punkt $\mathfrak{D}$ beliebig im Raume, so können wir beliebig viele zusammengehörige Elemente l und $\mathfrak{p}$ des ebenen Polarsystems konstruieren, dessen Kern der Fokalkegelschnitt ist.

Da beim Paraboloid eine der drei Hauptebenen die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ ist, und jedes Paar rechtwinkliger konjugierter Elemente (Ebene und Strahl) eines Polarbündels $\mathfrak{D}^{(2)}$ auf ε_∞ ein Elementenpaar (Polare und Pol) desjenigen ausgezeichneten Polarsystems ausschneidet, dessen Kernkegelschnitt der unendlich-entfernte imaginäre Kreis ist (S. 46), so erkennen wir nachträglich, dafs beim Paraboloid der dritte Fokalkegelschnitt (S. 568) in ε_∞ der unendlich-

entfernte imaginäre Kreis $\mathfrak{K}_\infty^{(2)}$ ist, welcher zu den beiden reellen Fokalparabeln in den beiden andern Hauptebenen hinzutritt.

Auch bei dem allgemeinen räumlichen Polarsystem mit einem im Endlichen liegenden Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ können wir die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ als vierte Hauptebene zu den drei andern hinzutreten lassen, indem wir das Polartetraëder, dessen eine Ecke $\mathfrak{M}$ und dessen drei in derselben zusammenstoſsende Seitenflächen die drei Hauptebenen sind, vervollständigen durch die vierte Seitenfläche ε_∞. Die vorige allgemeine Konstruktion liefert dann in ε_∞ als vierten Fokalkegelschnitt den imaginären unendlich-entfernten Kreis $\mathfrak{K}_\infty^{(2)}$.

Wenn insbesondere $\mathfrak{O}$ ein Punkt der Kernfläche $F^{(2)}$ des räumlichen Polarsystems ist, so wird die Berührungsebene in demselben und die zu ihr rechtwinklige Normale der Fläche $F^{(2)}$ eine Hauptebene und ein Hauptstrahl des besonderen Polarbündels $\mathfrak{O}^{(2)}$, also haben wir als besonderen Fall des vorigen allgemeinen Satzes den folgenden:

Wenn man in beliebig vielen Punkten einer Fläche 2. O. $F^{(2)}$ die Berührungsebene und die Normale konstruiert, so durchschneiden dieselben eine (jede) der drei Hauptebenen der Fläche $F^{(2)}$ in je einer Geraden l und einem Punkte $\mathfrak{p}$. Diese sind Polare und Pol eines und desselben ebenen Polarsystems, dessen Kern der Fokalkegelschnitt der $F^{(2)}$ in der betrachteten Hauptebene ist.

Bestimmt man noch in der Berührungsebene diejenigen beiden zu einander rechtwinkligen Strahlen, welche die Axen der Strahleninvolution sind, deren Mittelpunkt der Berührungspunkt ist, und deren Strahlenpaare konjugierte Strahlen in Bezug auf $F^{(2)}$ sind, so durchbohren diese beiden rechtwinkligen Strahlen und die Normale der $F^{(2)}$ eine jede der drei Hauptebenen in drei Punkten, welche ein Polardreieck bilden in Bezug auf den in dieser Hauptebene liegenden Fokalkegelschnitt.

Legen wir durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ des Raumes, dem ein bestimmtes Polarbündel $\mathfrak{O}^{(2)}$ im räumlichen Polarsystem zugehört, ein zweites Polarbündel perspektivisch mit dem ebenen Polarsystem in einer der Hauptebenen, dessen

Kern der Fokalkegelschnitt derselben ist, so wird eine Hauptebene $[\mathfrak{O}l]$ und der zu ihr normale Hauptstrahl $|\mathfrak{O}\mathfrak{p}|$ für beide Bündel gleichzeitig Hauptebene und Hauptstrahl sein, weil sie konjugierte Elemente und rechtwinklig zu einander sind. Wir können also den Satz aussprechen:

Die Hauptebenen und Hauptstrahlen eines Polarbündels $\mathfrak{O}^{(2)}$, welches einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ im räumlichen Polarsystem zugehört, sind zugleich Hauptebenen und Hauptstrahlen derjenigen drei Polarbündel, welche von $\mathfrak{O}$ aus perspektivisch gelegt werden können mit den drei ebenen Polarsystemen in den drei Hauptebenen des räumlichen Polarsystems, deren Kernkegelschnitte die Fokalkegelschnitte sind.

Oder, da für den reellen Fall der Kern des Polarbündels $\mathfrak{O}^{(2)}$ der Berührungskegel ist, welcher aus $\mathfrak{O}$ an die Fläche $F^{(2)}$ gelegt werden kann, so läfst sich dieser Satz insbesondere auch so aussprechen:

Der Berührungskegel aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ an eine Fläche 2. O. $F^{(2)}$ und derjenige Kegel, welcher von $\mathfrak{O}$ aus durch einen der Fokalkegelschnitte der $F^{(2)}$ gelegt werden kann, haben allemal dieselben Hauptebenen und Hauptaxen.

Wir haben nun drei Fokalkegelschnitte, nämlich je einen in jeder der drei Hauptebenen des räumlichen Polarsystems, von denen allerdings nur zwei reell sind, der dritte imaginär, aber in bekannter Weise durch ein bestimmtes elliptisches Polarsystem vertreten wird; demnach läfst sich das vorige Resultat auch so ausdrücken:

Legt man durch irgend einen Punkt $\mathfrak{O}$ des Raumes und die drei Fokalkegelschnitte in den drei Hauptebenen eines räumlichen Polarsystems drei Kegel (von denen nur zwei reell sein werden), so haben diese drei Kegel dieselben Hauptaxen und Hauptebenen, nämlich diejenigen des aus $\mathfrak{O}$ an die Fläche $F^{(2)}$ zu legenden Berührungskegels oder des Polarbündels, welches denselben vertritt.

Wir können aber noch mehr sagen:

Schneidet eine beliebige Ebene $\mathfrak{x}$ des Raumes eine Haupt-

ebene des räumlichen Polarsystems in der Geraden l, deren konjugierte Gerade l_1 in $\mathfrak{p}_1$ auf der Hauptebene normal steht; wird ferner l_1 von der Ebene ξ in $\mathfrak{x}'$ getroffen, und ist $\mathfrak{x}$ der konjugierte Punkt zu $\mathfrak{x}'$ für die Punktinvolution auf l_1 im räumlichen Polarsystem, so wird das Perpendikel von $\mathfrak{x}$ auf die Ebene ξ dieselbe in $\mathfrak{O}$ treffen und durch den Punkt $\mathfrak{p}$ gehen, wie wir oben gesehen haben. Nun ist $\mathfrak{O}$ der Mittelpunkt zweier konzentrischen Polarbündel; das eine gehört dem Punkte $\mathfrak{O}$ im räumlichen Polarsystem zu, das andere wird von $\mathfrak{O}$ perspektivisch gelegt mit dem ebenen Polarsystem in der Hauptebene, für welches l und $\mathfrak{p}$ konjugierte Elemente sind; also sind im ersten Polarbündel $[\mathfrak{O}l] = \xi$ und $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}|$, im zweiten ξ und $|\mathfrak{O}\mathfrak{p}|$ konjugierte Elemente, d. h. Polarebene und Polarstrahl; es liegen aber $\mathfrak{O}\mathfrak{x}\mathfrak{p}$ in derselben Geraden, also: *Eine beliebige Ebene ξ im räumlichen Polarsystem und das aus ihrem Pole $\mathfrak{x}$ auf sie herabgelassene Perpendikel durchschneiden die betrachtete Hauptebene in l und $\mathfrak{p}$, die Polare und Pol für den Fokalkegelschnitt sind.* Jede durch dieses Perpendikel gelegte Ebene ξ' ist also rechtwinklig auf ξ und konjugiert zu ξ sowohl in Bezug auf das eine, als auch das andere der beiden eben betrachteten konzentrischen Polarbündel in $\mathfrak{O}$. Haben wir umgekehrt zwei konjugierte rechtwinklige Ebenen ξ und ξ' im Polarbündel $\mathfrak{O}^{(2)}$, so mufs die eine ξ' durch das Perpendikel gehen, welches aus $\mathfrak{x}$, dem Pole von ξ, auf ξ gefällt werden kann, also mufs ξ' auch durch $\mathfrak{p}$ gehen, mithin werden ξ und ξ' auch konjugiert sein in Bezug auf das andere Polarbündel in $\mathfrak{O}$, welches perspektivisch liegt mit dem Polarsystem des Fokalkegelschnitts. Wir schliefsen also:

Haben wir in irgend einem Polarbündel $\mathfrak{O}^{(2)}$ eines räumlichen Polarsystems zwei konjugierte rechtwinklige Ebenen, so müssen dieselben auch konjugiert sein für dasjenige Polarbündel, welches von $\mathfrak{O}$ perspektivisch gelegt werden kann mit dem ebenen Polarsystem eines Fokalkegelschnitts.

Nun giebt es aber insbesondere in jedem Polarbündel zweimal unendlich viele Paare rechtwinkliger konjugierter Ebenen, nämlich die Ebenenpaare der orthogonalen Ebenen-

involutionen, welche den beiden (reellen) Fokalstrahlen des Polarbündels (Kegels) zugehören (S. 58). Wir schliefsen also:

Der Berührungskegel aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ an eine Oberfläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$ und der von $\mathfrak{O}$ durch einen Fokalkegelschnitt der Oberfläche gelegte Kegel haben nicht allein dieselben Hauptebenen und Hauptaxen, sondern auch dieselben Fokalstrahlen (Brennstrahlen).

Oder in allgemeinerer Fassung:

Man kann einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ des Raumes als den Mittelpunkt zweier konzentrischen Polarbündel auffassen; das eine gehört dem Punkte $\mathfrak{O}$ im räumlichen Polarsystem zu; das andere wird perspektivisch gelegt mit dem ebenen Polarsystem in einer der Hauptebenen, dessen Kern der Fokalkegelschnitt derselben ist. Diese beiden Polarbündel haben allemal dieselben Fokalstrahlen (Brennstrahlen), also auch dieselben Hauptaxen und Hauptebenen.

Verbinden wir den willkürlichen Punkt des Raumes mit den beiden reellen Fokalkegelschnitten des räumlichen Polarsystems, so gilt der Satz:

Wird ein willkürlicher Punkt $\mathfrak{O}$ des Raumes mit den beiden reellen Fokalkegelschnitten eines räumlichen Polarsystems verbunden, so erhält man zwei konzentrische Kegel, welche dieselben Fokalstrahlen (Brennstrahlen), also auch dieselben Hauptaxen und Hauptebenen haben, nämlich diejenigen, welche dem Polarbündel $\mathfrak{O}^{(2)}$ im räumlichen Polarsystem zugehören.

Nehmen wir insbesondere statt des willkürlichen Punktes $\mathfrak{O}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ eines der beiden Fokalkegelschnitte selbst, so wissen wir, dafs das dem Punkte $\mathfrak{o}$ im räumlichem Polarsystem zugehörige Polarbündel ein rotatorisches ist, dessen Umdrehungsaxe, in welche die beiden reellen Brennstrahlen hineinfallen, die Tangente in $\mathfrak{o}$ an dem Fokalkegelschnitt ist. Die auf dieser Tangente t normale Ebene τ durch $\mathfrak{o}$ enthält eine orthogonale Strahleninvolution mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{o}$ als Durchschnitt mit der orthogonalen

Ebeneninvolution, welche dem Strahl t zugehört. Hieraus folgt unmittelbar der Satz:

Wenn man durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ eines der Fokalkegelschnitte einer Fläche $F^{(2)}$ eine Ebene legt normal zu der Tangente in $\mathfrak{o}$ am Fokalkegelschnitt, so schneidet dieselbe die Fläche $F^{(2)}$ in einem (reellen oder imaginären) Kegelschnitt, für welchen $\mathfrak{o}$ ein Brennpunkt (d. h. der Mittelpunkt einer zugehörigen orthogonalen Strahleninvolution) ist.

Da der Berührungskegel aus $\mathfrak{o}$ an die Fläche $F^{(2)}$ ein Rotationskegel (gerader Kegel) ist, dessen beide Brennstrahlen zusammenfallen in t, so mufs nach dem Obigen auch der Kegel, welcher von $\mathfrak{o}$ aus durch den andern Fokalkegelschnitt gelegt werden kann, ein gerader Kegel sein mit der Umdrehungsaxe t, also:

Wenn man von einem festen Punkte $\mathfrak{o}$ eines der beiden Fokalkegelschnitte Strahlen zieht nach sämtlichen Punkten des andern Fokalkegelschnitts, so bilden dieselben einen geraden Kegel, dessen Umdrehungsaxe die Tangente in $\mathfrak{o}$ am ersten Fokalkegelschnitt ist.

Hieraus folgt die Auflösung der Aufgabe:

Ein ebener Kegelschnitt ist gegeben, es soll der Ort eines Punktes $\mathfrak{o}$ im Raume gefunden werden, dessen Verbindungsstrahlen mit den Punkten des gegebenen Kegelschnitts einen geraden Kegel (Umdrehungskegel) bilden.

Die Auflösung ist nach dem Obigen folgende:

Man lege durch diejenige Hauptaxe des gegebenen Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, welche die reellen Brennpunkte desselben enthält, eine Ebene senkrecht zur Ebene desselben und konstruiere in dieser einen neuen Kegelschnitt, der die Brennpunkte des gegebenen zu Scheiteln und die in derselben Hauptaxe liegenden Scheitel des gegebenen Kegelschnitts zu Brennpunkten hat, wodurch er vollständig bestimmt ist. Dieser neue Kegelschnitt ist der Ort des gesuchten Punktes $\mathfrak{o}$ und besitzt zugleich die reziproke Eigenschaft, dafs, wenn wir ihn als gegebenen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$

auffassen, der Ort eines Punktes $\mathfrak{o}$ von gleicher Eigenschaft der ursprüngliche Kegelschnitt ist.

Hieraus erkennen wir die früher ermittelten Beziehungen zweier derartig im Raume gestellter Kegelschnitte wieder, nämlich: Wenn der eine von ihnen Hyperbel ist, so ist der andere Ellipse und umgekehrt, oder beide sind Parabeln und haben ihre Öffnungen nach entgegengesetzten Richtungen.

§ 65. Metrische Beziehungen der beiden reellen Fokalkegelschnitte.*)

Die beiden zuletzt betrachteten reellen Fokalkegelschnitte im Raume, welche in zwei zu einander rechtwinkligen Ebenen liegen und in der Schnittlinie derselben eine gemeinschaftliche Hauptaxe so liegend haben, dafs auf ihr die Brennpunkte des einen die Scheitel des andern sind und umgekehrt, bieten gewisse sehr einfache metrische Beziehungen dar, auf die wir hier eingehen wollen.

Betrachten wir zuerst den allgemeineren Fall, dafs der eine Fokalkegelschnitt Ellipse ist mit dem Brennpunkte $\mathfrak{f}_e\,\mathfrak{f}'_e$, der andere Hyperbel mit den Brennpunkten $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$, dann liegen diese beiden Punktepaare symmetrisch zu ihrer gemeinsamen Mitte $\mathfrak{M}$ in derselben Geraden, der Schnittlinie der beiden zu einander rechtwinkligen Ebenen, und die Strecke $\mathfrak{f}_e\,\mathfrak{f}'_e$ innerhalb der Strecke $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ der Fokalhyperbel, so ist nach den bekannten Eigenschaften der Brennpunkte:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{f}_h - \mathfrak{o}\mathfrak{f}'_h = \mathfrak{f}_e\mathfrak{f}_h - \mathfrak{f}_e\mathfrak{f}'_h = \mathfrak{f}'_e\mathfrak{f}'_h - \mathfrak{f}'_e\mathfrak{f}_h$$

oder

$$\mathfrak{o}\mathfrak{f}_h - \mathfrak{f}_e\mathfrak{f}_h = \mathfrak{o}\mathfrak{f}'_h - \mathfrak{f}_e\mathfrak{f}'_h,$$

d. h., wenn wir in dem Dreieck $\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$ die Grundlinie $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$ durch den zwischen den Ecken liegenden Punkt $\mathfrak{f}_e$ in zwei Abschnitte teilen und diese auf die anliegenden Seiten des Dreiecks von den Endpunkten der Grundlinie aus abtragen, so schneiden wir auf den beiden

*) Vergl. Steiner-Geiser: Vorlesungen über synthetische Geometrie, T. I.: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, II. Aufl. Leipzig 1875. S. 169.

übrigen Dreiecksseiten dadurch solche Stücke ab, daſs die übrig bleibenden Strecken auf denselben gleich lang werden, oder, was dasselbe sagt: $\mathfrak{f}_e$ ist der Berührungspunkt eines Kreises, welcher die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$ so berührt, daſs die Seite $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$ im Punkte $\mathfrak{f}_e$ berührt wird, und die Berührungspunkte auf den andern beiden Seiten zwischen den Ecken des Dreiecks liegen (Fig. 36). Wir nahmen an, daſs $\mathfrak{o}$ auf dem durch $\mathfrak{f}_e$ gehenden Hyperbelzweige liege; da alsdann $\mathfrak{f}'_e$ auf dem andern Hyperbelzweige liegt, so haben wir:

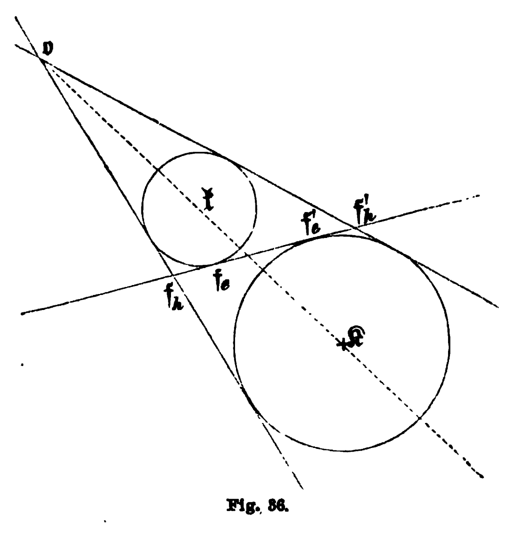


Fig. 36.

$$\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_h - \mathfrak{o}\,\mathfrak{f}'_h = \mathfrak{f}'_e\,\mathfrak{f}'_h - \mathfrak{f}'_e\,\mathfrak{f}_h,$$

oder

$$\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_h + \mathfrak{f}'_e\,\mathfrak{f}_h = \mathfrak{o}\,\mathfrak{f}'_h + \mathfrak{f}'_e\,\mathfrak{f}'_h,$$

folglich ist $\mathfrak{f}'_e$ der Berührungspunkt eines zweiten Berührungskreises des Dreiecks $\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$, nämlich desjenigen, welcher zwei Dreiecksseiten $\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_h$ und $\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}'_h$ in Punkten ihrer Verlängerung, also auſserhalb ihrer Ecken und die dritte Seite $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$ zwischen den Ecken berührt. Die beiden Kreise sind also der „einbeschriebene" und der „anbeschriebene" der Seite $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$ anliegende Berührungskreis.

Aus dieser elementaren Beziehung folgen sogleich bemerkenswerte Eigenschaften. Die Ebene des Dreiecks $\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$ ist die Ebene der Fokalhyperbel, deren Brennpunkte $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$, und deren Scheitel $\mathfrak{f}_e\,\mathfrak{f}'_e$ sind, in der Zeichnung die Ebene des Papiers. Senkrecht auf derselben denken wir uns die Ebene der Fokalellipse gelegt, deren Brennpunkte $\mathfrak{f}_e\,\mathfrak{f}'_e$, und deren Scheitel $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$ sind. Der Kegel, welcher von dem Punkte $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt durch die Fokalellipse gelegt wird, ist, wie

wir wissen, ein gerader Kegel, die Umdrehungsaxe desselben die Tangente der Fokalhyperbel im Punkte $\mathfrak{o}$, d. h. die Halbierungslinie des inneren Winkels $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_h'$, welche zwischen die Punkte $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}_h'$ fällt. Diese Winkelhalbierende geht durch die Mittelpunkte $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{K}$ der beiden oben konstruierten Berührungskreise. Wir können also den geraden Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ entstehen lassen durch Rotation der Geraden $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_h|$ oder $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_h'|$ um die Umdrehungsaxe $|\mathfrak{o}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{K}|$. Durch diese Rotation erzeugen die vorigen beiden Berührungskreise zwei Kugeln $\mathfrak{k}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$, welche den geraden Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ längs zweier Kreise berühren. Die beiden Kugeln $\mathfrak{k}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ werden von der Ebene des Papiers in den beiden obigen Hauptkreisen geschnitten, folglich von der Ebene, welche durch ihre gemeinschaftliche Tangente $|\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}_h'|$ senkrecht zur Ebene des Papiers gestellt wird, in den beiden Punkten $\mathfrak{f}_e$ und $\mathfrak{f}_e$ berührt. Diese letzte Ebene ist aber die Ebene der Fokalellipse; folglich haben wir einen geraden Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$, eine Ebene ε, welche denselben in einer Ellipse schneidet, und die beiden Kugeln, welche den geraden Kegel längs Kreisen und die Ebene ε in zwei Punkten $\mathfrak{f}_e$ und $\mathfrak{f}_e'$ berühren; diese sind allemal die Brennpunkte der Ellipse. Die beiden Berührungskugeln sind aber durch den Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ und die Ebene ε gerade bestimmt, daher erhalten wir folgenden Satz, den wir, da er in gleicher Weise, wie hier für die Ellipse, auch für Hyperbel und Parabel nachgewiesen werden kann, sogleich in allgemeinster Form aussprechen:

Hat man einen geraden Kegel und eine denselben längs eines Kreises berührende Kugel, so schneidet eine beliebige Berührungsebene der Kugel den Kegel allemal in einem Kegelschnitt, für welchen der Berührungspunkt mit der Kugel ein Brennpunkt ist.

Oder:

Wird ein gerader Kegel von einer beliebigen Ebene ε längs eines Kegelschnitts durchschnitten, so giebt es zwei Kugeln, welche den Kegel längs Kreisen und die Ebene ε in je einem Punkte berühren; diese beiden Punkte sind die Brennpunkte des Kegelschnitts in der Ebene ε.

Da die Tangenten aus einem Punkte an eine Kugel alle gleich lang sind, und jeder Kegelstrahl des Kegels $\mathfrak{o}^{(2)}$ die beiden Kugeln $\mathfrak{k}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ berührt, die Fokalellipse aber in einem Punkte $\mathfrak{x}$ trifft, von dem aus die Tangenten an $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{K}$ gleich sein müssen $\mathfrak{x}\mathfrak{f}_e$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{f}'_e$, so folgt, wenn wir die Tangenten aus $\mathfrak{o}$ an die Kugeln $\mathfrak{k}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ durch

$$t \quad \text{und} \quad T$$

bezeichnen:

$$\begin{cases} t + \mathfrak{x}\mathfrak{f}_e = \mathfrak{o}\mathfrak{x} \\ T - \mathfrak{x}\mathfrak{f}'_e = \mathfrak{o}\mathfrak{x}. \end{cases}$$

Nehmen wir jetzt einen beliebigen zweiten Punkt $\mathfrak{o}_1$ der Fokalhyperbel und zwar auf demselben Zweige derselben, so wird der Rotationskegel aus $\mathfrak{o}_1$, durch die Fokalellipse gelegt, ein anderer, auch die beiden Kugeln $\mathfrak{k}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ werden andere, aber für denselben Punkt $\mathfrak{x}$ der Fokalellipse gelten ganz ähnliche Beziehungen:

$$\begin{cases} t_1 + \mathfrak{x}\mathfrak{f}_e = \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} \\ T_1 - \mathfrak{x}\mathfrak{f}'_e = \mathfrak{o}_1\mathfrak{x}, \end{cases}$$

und durch Abziehen folgt:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} - \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} = t - t_1 = T - T_1.$$

Verändern wir daher den Punkt $\mathfrak{x}$ auf der Fokalellipse, halten aber die beiden Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$ auf demselben Zweige der Fokalhyperbel fest, so bleiben die Kugeln $\mathfrak{k}^{(2)}$ und $\mathfrak{k}_1^{(2)}$ unverändert, also auch t und t_1, mithin:

1) . . . . $\mathfrak{o}\mathfrak{x} - \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} = \text{konst.}$

Wäre dagegen $\mathfrak{o}_1$ auf dem andern Zweige der Fokalhyperbel gelegen, welcher durch den Punkt $\mathfrak{f}'_e$ geht, so hätten wir:

$$\begin{cases} t_1 + \mathfrak{x}\mathfrak{f}'_e = \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} \\ T_1 - \mathfrak{x}\mathfrak{f}_e = \mathfrak{o}_1\mathfrak{x}, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} + \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} = t + T_1 = t_1 + T,$$

also

2) . . . . $\mathfrak{o}\mathfrak{x} + \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} = \text{konst.}$

Durch Veränderung des Punktes $\mathfrak{x}$ auf der Fokalellipse erhalten wir daher den Satz:

I. Verbinden wir irgend zwei feste Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$ der Fokalhyperbel mit einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{x}$ der Fokalellipse, so ist entweder die Summe der Strecken:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} + \mathfrak{o}_1\mathfrak{x}$$

oder die Differenz der Strecken:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} - \mathfrak{o}_1\mathfrak{x}$$

konstant, je nachdem die beiden festen Punkte auf verschiedenen oder auf demselben Zweige der Fokalhyperbel liegen.

Die beiden im Raume liegenden festen Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$ haben daher für die Ellipse eine ähnliche Bedeutung, wie die Brennpunkte in ihrer Ebene, und können demgemäfs „räumliche Brennpunkte“ der Ellipse genannt werden, und als solche können irgend zwei Punkte der Fokalhyperbel aufgefafst werden.

Diese Eigenschaft läfst sich auch anders aussprechen; nehmen wir nämlich zu $\mathfrak{x}$ den diametral gegenüberliegenden Punkt $\mathfrak{x}'$ der Fokalellipse hinzu, so ist bekanntlich:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{f}_e = \mathfrak{x}'\mathfrak{f}'_e$$
$$\mathfrak{x}\mathfrak{f}'_e = \mathfrak{x}'\mathfrak{f}_e;$$

folglich haben wir nach dem Obigen auch die Beziehungen:

$$t + \mathfrak{x}\mathfrak{f}_e = \mathfrak{o}\mathfrak{x}$$
$$T - \mathfrak{x}'\mathfrak{f}'_e = \mathfrak{o}\mathfrak{x}'$$
$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} + \mathfrak{o}\mathfrak{x}' = t + T,$$

d. h.: Verbindet man irgend einen festen Punkt $\mathfrak{o}$ der Fokalhyperbel mit den Endpunkten $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ eines veränderlichen Durchmessers der Fokalellipse, so ist die Summe der Abstände:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} + \mathfrak{o}\mathfrak{x}'$$

von konstantem Wert.

Wenig anders gestaltet sich die Betrachtung, wenn wir die Fokalellipse mit den Brennpunkten $\mathfrak{f}_e\,\mathfrak{f}'_e$ und den Scheiteln $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$ in die Ebene des Papiers verlegen und einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ derselben annehmen, aus ihm einen Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ durch die Fokalhyperbel legen, deren Ebene rechtwinklig steht auf der Ebene des Papiers und durch die Gerade $|\mathfrak{f}_e\,\mathfrak{f}'_e|$

geht, und endlich in $\mathfrak{o}$ diejenige Winkelhalbierende der Strahlen $|\mathfrak{o}\mathfrak{f}_e|$ und $|\mathfrak{o}\mathfrak{f}'_e|$ ziehen, welche die Punkte $\mathfrak{f}_e\, \mathfrak{f}'_e$ nicht trennt;

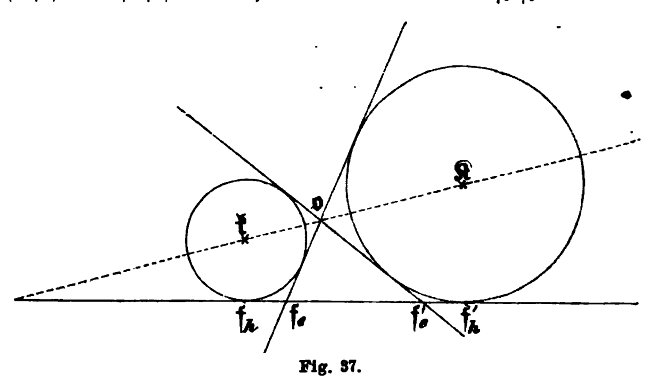


Fig. 37.

dann wird diese die Rotationsaxe des geraden Kegels $\mathfrak{o}^{(2)}$ oder die Tangente der Fokalellipse im Punkte $\mathfrak{o}$ sein (Fig. 37). Wir haben die bekannten Beziehungen:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{f}_e + \mathfrak{o}\mathfrak{f}'_e = \mathfrak{f}_h\mathfrak{f}_e + \mathfrak{f}_h\mathfrak{f}'_e = \mathfrak{f}'_h\mathfrak{f}_e + \mathfrak{f}'_h\mathfrak{f}'_e,$$

also

$$\mathfrak{o}\mathfrak{f}_e - \mathfrak{f}_h\mathfrak{f}_e = \mathfrak{f}_h\mathfrak{f}'_e - \mathfrak{o}\mathfrak{f}'_e$$

und

$$\mathfrak{o}\mathfrak{f}_e - \mathfrak{f}'_h\mathfrak{f}_e = \mathfrak{f}'_h\mathfrak{f}'_e - \mathfrak{o}\mathfrak{f}'_e,$$

woraus folgt, dafs, wenn wir dem Dreieck $\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_e\,\mathfrak{f}'_e$ die beiden Berührungskreise $\mathfrak{k}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ anbeschreiben, welche ihre Mittelpunkte $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{K}$ in der vorhin konstruierten Halbierungslinie des Winkels $\mathfrak{f}_e\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}'_e$ haben, diese Kreise die Gerade $|\mathfrak{f}_e\mathfrak{f}'_e|$ in den Punkten $\mathfrak{f}_h\,\mathfrak{f}'_h$ berühren müssen. Die beiden Kugeln $\mathfrak{k}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$, deren Radien $\mathfrak{k}\mathfrak{f}_h$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{f}'_h$ sind, werden also den geraden Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ in Kreisen berühren und die Ebene der Fokalhyperbel in den Brennpunkten $\mathfrak{f}_h$ und $\mathfrak{f}'_h$ derselben; wir haben also den früheren Satz auch für den Fall der Hyperbel als gültig erkannt.

Nehmen wir jetzt eine beliebigen Kegelstrahl des Kegels $\mathfrak{o}^{(2)}$, so wird derselbe die beiden Kugeln berühren und die Fokalhyperbel in einem Punkte $\mathfrak{x}$ treffen; die Tangenten aus $\mathfrak{x}$ an die Kugeln sind aber gleich:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{f}_h = \mathfrak{x}\mathfrak{f}'_h;$$

bezeichnen wir also die Längen der aus $\mathfrak{o}$ an die Kugeln $\mathfrak{k}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegten Tangenten wiederum durch

$$t \text{ und } T,$$

so folgt:

$$\begin{cases} t + \mathfrak{x}\mathfrak{f}_k = \mathfrak{o}\mathfrak{x} \\ T + \mathfrak{x}\mathfrak{f}'_k = \mathfrak{o}\mathfrak{x}. \end{cases}$$

Nehmen wir nun einen beliebigen zweiten Punkt $\mathfrak{o}_1$ der Fokalellipse, so wird der Rotationskegel aus $\mathfrak{o}_1$, durch die Fokalhyperbel gelegt, ein anderer, auch die beiden Kugeln $\mathfrak{k}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ werden andere, aber für den vorigen Hyperbelpunkt $\mathfrak{x}$ gelten die analogen Beziehungen:

$$\begin{cases} t_1 + \mathfrak{x}\mathfrak{f}_k = \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} \\ T_1 + \mathfrak{x}\mathfrak{f}'_k = \mathfrak{o}_1\mathfrak{x}, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} - \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} = t - t_1 = T - T_1 = \text{konst.}, \text{ d. h.:}$$

II. Verbinden wir irgend zwei feste Punkte $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$ der Fokalellipse mit einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{x}$ der Fokalhyperbel, so ist die Differenz der Strecken:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} - \mathfrak{o}_1\mathfrak{x}$$

von unveränderlichem Wert, für die Punkte des einen Hyperbelzweiges entgegengesetzt dem Werte für die Punkte des andern Hyperbelzweiges.

Die letztere Bemerkung folgt unmittelbar aus dem Satze I.; denn nehmen wir irgend zwei Punkte der Fokalhyperbel auf verschiedenen Zweigen und bezeichnen dieselben jetzt durch

$$\mathfrak{h} \text{ und } \mathfrak{h}_1,$$

und irgend zwei Punkte der Fokalellipse, die

$$\mathfrak{e} \text{ und } \mathfrak{e}_1$$

genannt werden sollen, so ist nach Satz I., da $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ auf verschiedenen Hyperbelzweigen liegen:

$$\mathfrak{h}\mathfrak{e} + \mathfrak{h}_1\mathfrak{e} = \mathfrak{h}\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{h}_1\mathfrak{e}_1,$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{h}\mathfrak{e} - \mathfrak{h}\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{h}_1\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{h}_1\mathfrak{e}$$

oder

$$\mathfrak{e}\mathfrak{h} - \mathfrak{e}_1\mathfrak{h} = -\{\mathfrak{e}\mathfrak{h}_1 - \mathfrak{e}_1\mathfrak{h}_1\};$$

wenn dagegen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ auf demselben Hyperbelzweige liegen, so haben wir:

$$\mathfrak{h}\mathfrak{e} - \mathfrak{h}_1\mathfrak{e} = \mathfrak{h}\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{h}_1\mathfrak{e}_1,$$

also

$$\mathfrak{h}\mathfrak{e} - \mathfrak{h}\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{h}_1\mathfrak{e} - \mathfrak{h}_1\mathfrak{e}_1$$

oder

$$\mathfrak{e}\mathfrak{h} - \mathfrak{e}_1\mathfrak{h} = + \{\mathfrak{e}\mathfrak{h}_1 - \mathfrak{e}_1\mathfrak{h}_1\}.$$

Wir können hiernach beide Sätze, I. und II., in den einzigen zusammenfassen:

Nimmt man irgend zwei Punkte $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ auf der Fokalellipse und irgend zwei Punkte $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ auf der Fokalhyperbel an, so gilt zwischen den Abständen dieser vier Punkte von einander,

1) wenn $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ auf demselben Hyperbelzweige liegen, die Relation:

$$\mathfrak{h}\mathfrak{e} + \mathfrak{h}_1\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{h}\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{h}_1\mathfrak{e};$$

2) wenn $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ auf verschiedenen Hyperbelzweigen liegen, die Relation:

$$\mathfrak{h}\mathfrak{e} + \mathfrak{h}_1\mathfrak{e} = \mathfrak{h}\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{h}_1\mathfrak{e}_1.$$

In dem windschiefen Viereck $\mathfrak{h}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{h}_1\,\mathfrak{e}_1$ ist also im ersten Fall die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten gleich der Summe der beiden andern gegenüberliegenden Seiten, im andern Falle die Summe zweier (in $\mathfrak{e}$) zusammenstoſsenden Seiten gleich der Summe der beiden andern zusammenstoſsenden Seiten.

Wir bemerken noch, daſs, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ zwei diametral gegenüberliegende Punkte der Fokalhyperbel sind, also:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{f}_h = \mathfrak{x}'\mathfrak{f}_h'$$

ist, die beiden Gleichungen gelten:

$$t + \mathfrak{x}\mathfrak{f}_h = \mathfrak{o}\mathfrak{x}$$
$$T + \mathfrak{x}'\mathfrak{f}_h' = \mathfrak{o}\mathfrak{x}',$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} - \mathfrak{o}\mathfrak{x}' = t - T = \text{konst.},$$

d. h.: Verbindet man einen festen Punkt $\mathfrak{o}$ der Fokalellipse mit den Endpunkten $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ eines veränderlichen Durchmessers der Fokalhyperbel, so ist die Differenz der Abstände:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} - \mathfrak{o}\mathfrak{x}'$$

von konstantem Werte.

Es bleibt jetzt noch übrig für die beiden Fokalparabeln (S. 585) die analoge Betrachtung anzustellen:

Gehen wir von zwei Parabeln $P^{(2)}$ und $Q^{(2)}$ aus, die in zwei zu einander rechtwinkligen Ebenen so liegen, dafs sie in der Schnittlinie derselben die gemeinsame Axe haben, und der Scheitel der einen der Brennpunkt der andern ist, sowie umgekehrt; seien $\mathfrak{f}_p$ und $\mathfrak{f}_q$ diese beiden Punkte, nämlich $\mathfrak{f}_p$ der Brennpunkt der Parabel $P^{(2)}$ und der Scheitel der Parabel $Q^{(2)}$, dagegen $\mathfrak{f}_q$ der Brennpunkt der Parabel $Q^{(2)}$ und der Scheitel der Parabel $P^{(2)}$; in der Ebene des Papiers liege die Parabel $P^{(2)}$ und in der darauf senkrechten Ebene durch $|\mathfrak{f}_p\mathfrak{f}_q|$ die Parabel $Q^{(2)}$ (Fig. 38).

Nehmen wir nun einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ der Parabel $P^{(2)}$ als Mittelpunkt eines Kegels, der durch die Parabel $Q^{(2)}$

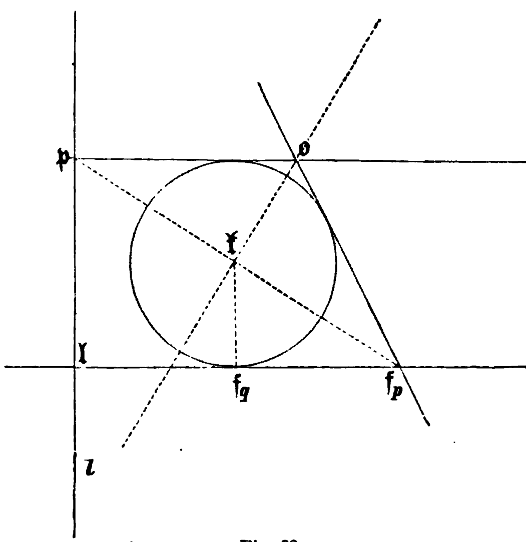


Fig. 38.

gelegt wird, dann ist dieser Kegel, wie wir wissen, ein gerader, und seine Umdrehungsaxe die Tangente in $\mathfrak{o}$ an der Parabel $P^{(2)}$, d. h. eine Gerade durch $\mathfrak{o}$, die wir so erhalten: Wir ziehen $|\mathfrak{o}\mathfrak{f}_p|$ und durch $\mathfrak{o}$ eine Parallele zur Parabelaxe, und nehmen diejenige Winkelhalbierende zwischen diesen beiden Strahlen, welche von der Parabelaxe die von dem Scheitel $\mathfrak{f}_q$ ausgehende Hälfte trifft, die nicht den Brenn-

punkt $\mathfrak{f}_p$ enthält; um die Parabel $P^{(2)}$ vollständig herzustellen, gehen wir auf der Axe von dem Brennpunkt $\mathfrak{f}_p$ bis zum Scheitel $\mathfrak{f}_q$ und um ein gleiches Stück weiter bis $\mathfrak{l}$, errichten in $\mathfrak{l}$ ein Perpendikel auf der Axe, so ist dieses die Leitlinie l der Parabel und $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ das Perpendikel aus $\mathfrak{o}$ auf die Leitlinie gleich dem Abstande $\mathfrak{o}\mathfrak{f}_p$ des Punktes $\mathfrak{o}$ vom Brennpunkt; in dem gleichschenkligen Dreieck $\mathfrak{p}\mathfrak{o}\mathfrak{f}_p$ sei $\mathfrak{k}$ die Mitte der Grundlinie $\mathfrak{p}\mathfrak{f}_p$, dann liegt $\mathfrak{k}$ in der Halbierungslinie des Winkels $\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}_p$, steht also von $|\mathfrak{o}\mathfrak{p}|$ und $|\mathfrak{o}\mathfrak{f}_p$ gleich weit ab; das Perpendikel aus $\mathfrak{k}$ auf die Parabelaxe trifft die Mitte zwischen $\mathfrak{f}_p$ und $\mathfrak{l}$, also den Punkt $\mathfrak{f}_q$, und $\mathfrak{k}\mathfrak{f}_q$ ist die Hälfte des Abstandes $\mathfrak{p}\mathfrak{l}$; folglich wird $\mathfrak{k}$ der Mittelpunkt eines Kreises sein, der $|\mathfrak{o}\mathfrak{p}|$ und $|\mathfrak{o}\mathfrak{f}_p|$ berührt, sowie die Parabelaxe im Punkte $\mathfrak{f}_q$.

Der Durchmesser $|\mathfrak{o}\mathfrak{k}|$ dieses Kreises ist die Umdrehungsaxe des geraden Kegels $\mathfrak{o}^{(2)}$, welcher von $\mathfrak{o}$ aus durch die Parabel $Q^{(2)}$ gelegt werden kann. Eine Kugel um den Mittelpunkt $\mathfrak{k}$, welche den vorigen Kreis zum gröfsten hat, wird daher den Kegel $\mathfrak{o}^{(2)}$ längs eines kleinen Kreises berühren und aufserdem die Ebene der Parabel $Q^{(2)}$ in dem Brennpunkte derselben $\mathfrak{f}_q$ berühren. Hierdurch wird der am Anfange dieses Paragraphen ausgesprochene Satz auch für die Parabel bestätigt.

Nennen wir die Länge einer aus $\mathfrak{o}$ an die Kugel $\mathfrak{k}_1^{(2)}$ gelegten Tangente t und ziehen irgend einen Kegelstrahl des geraden Kegels $\mathfrak{o}^{(2)}$; möge derselbe die Fokalparabel $Q^{(2)}$ in $\mathfrak{x}$ treffen, dann ist:

$$t + \mathfrak{x}\mathfrak{f}_q = \mathfrak{o}\mathfrak{x}.$$

Nehmen wir einen beliebigen andern Punkt $\mathfrak{o}_1$ der Fokalparabel $P^{(2)}$, so ändert sich zwar der Kegel $\mathfrak{o}_1^{(2)}$ und die ihn berührende Kugel $\mathfrak{k}_1^{(2)}$, aber ihr Berührungspunkt mit der Ebene der Fokalparabel $Q^{(2)}$ bleibt natürlich deren Brennpunkt $\mathfrak{f}_q$, und wir haben die analoge Beziehung:

$$t_1 + \mathfrak{x}\mathfrak{f}_q = \mathfrak{o}_1\mathfrak{x},$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} - \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} = t - t_1 = \text{konst.},$$

d. h.: Verbinden wir irgend zwei feste Punkte $\mathfrak{o}$ **und** $\mathfrak{o}_1$ auf einer der beiden Fokalparabeln ($P^{(2)}$) **mit**

einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{x}$ der andern Fokalparabel ($Q^{(2)}$), so bleibt die Differenz der Abstände:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x} - \mathfrak{o}_1\mathfrak{x}$$

von unveränderlichem Werte.

Die Parabel besitzt also auch „räumliche Brennpunkte" und zwar hyperbolischer Art (mit konstanter Differenz).

Nehmen wir also für $\mathfrak{x}$ zwei beliebige Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ der Fokalparabel $Q^{(2)}$, so ist:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{p} - \mathfrak{o}_1\mathfrak{p} = \mathfrak{o}\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{o}_1\mathfrak{p}_1$$

oder:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{p} + \mathfrak{o}_1\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{o}_1\mathfrak{p},$$

d. h.: Wenn man auf jeder der beiden Fokalparabeln zwei beliebige Punkte wählt, so kann man dieselben als die Ecken eines windschiefen Vierseits im Raume auffassen, dessen Seiten nicht in die Ebenen der Fokalparabeln hineinfallen. Ein solches Vierseit besitzt allemal die Eigenschaft, dafs die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten gleich ist der Summe der beiden andern gegenüberliegenden Seiten.

§ 66. Die Kreisschnitte der Fläche 2. O.

Wir haben schon auf S. 572 gesehen, dafs die Fokalkegelschnitte in den Hauptebenen einer Fläche 2. O. dieselbe in gewissen Punkten (Kreispunkten) treffen, welche die besondere Eigenschaft besitzen, dafs jede mit den Berührungsebenen in diesen Punkten parallele Ebene die Oberfläche in einem Kreise durchschneidet. Wir können aber auch unabhängig davon, ob jene Kreispunkte reell vorhanden sind oder nicht, die Aufgabe uns stellen: Solche Ebenen zu finden, welche die gegebene Fläche $F^{(2)}$ in Kreisen schneiden, und werden bei der Lösung dieser Aufgabe auf ihren Zusammenhang mit den Fokalkegelschnitten geführt.

Wenn irgend eine Ebene die gegebene Fläche $F^{(2)}$ in einem Kreise schneidet, so wird die durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Fläche $F^{(2)}$ zu der Ebene parallel gelegte Ebene eben-

falls in einem Kreise schneiden müssen, weil beide Ebenen dieselbe unendlich-entfernte Gerade haben, und diese die Trägerin einer Punktinvolution in der ersten Ebene ist, deren Doppelpunkte die imaginären Kreispunkte sind, also auch in der zweiten Ebene dasselbe gilt.

Wir haben also, indem wir zuvörderst eine Fläche $F^{(2)}$ mit endlichem Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ voraussetzen, nur nötig, solche Ebenen durch $\mathfrak{M}$ zu legen, die $F^{(2)}$ in Kreisen schneiden; denn ist eine solche Ebene gefunden, so wird das ganze Büschel von Parallelebenen zu ihr die gleiche Eigenschaft besitzen.

Sei nun ε eine Durchmesserebene der Fläche $F^{(2)}$, die sie in einem Kreise schneidet, seien ferner $a\ b\ c$ die drei Hauptaxen der $F^{(2)}$ und die Träger von Punktinvolutionen mit den Potenzen $P_a P_b P_c$ ferner $[a b]$ $[a c]$ $[b c]$ die drei Hauptebenen, dann wird die Schnittlinie d_1 der Kreisebene ε mit einer Hauptebene, z. B. $[a b]$, ein Durchmesser des Hauptschnitts $[a b]^{(2)}$ und zugleich des Kreises $\varepsilon^{(2)}$ sein. Der zu d_1 konjugierte Durchmesser d im Kreise $\varepsilon^{(2)}$ mufs auf d_1 senkrecht stehen wegen der Natur des Kreises, und die zu dem Durchmesser d_1 konjugierte Durchmesserebene wird, weil d_1 in der Ebene $[a b]$ liegt, durch die beiden Geraden c und d gehen müssen und im allgemeinen durch dieselben bestimmt sein; also ist $[c d]$ die konjugierte Durchmesserebene zu d_1. Da aber sowohl c, als auch d auf d_1 senkrecht stehen, so wird die Ebene $[c d]$ die Normalebene des Strahles d_1 sein. Es müfste also durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ ein viertes Paar zu einander rechtwinkliger konjugierter Elemente, nämlich der Durchmesser d_1 und die Durchmesserebene $[c d]$ gehen aufser den drei Hauptaxen und Hauptebenen; dies ist im allgemeinen unmöglich, aufser wenn $F^{(2)}$ eine (reelle oder imaginäre) Kugel ist, ein Fall, den wir als selbstverständlich ausschliefsen. Die verlangte Forderung kann demnach nur erfüllt werden, wenn entweder d_1 mit a oder mit b zusammenfällt, oder wenn d mit c zusammenfällt, weil dann die Ebene $[c d]$ nicht bestimmt ist. Wir haben also zunächst folgendes Resultat:

Eine Durchmesserebene der $F^{(2)}$, welche dieselbe in einem Kreise schneiden soll, kann nur

durch eine der drei Hauptaxen $a\ b\ c$ der Fläche gehen (wenn diese nicht selbst eine Kugel ist).

Hierdurch wird die Untersuchung wesentlich vereinfacht; wir brauchen nur die drei Ebenenbüschel um die drei Hauptaxen zu untersuchen und nachzusehen, ob unter ihren Durchschnittskurven mit $F^{(2)}$ Kreise vorkommen.

Schneidet nun eine durch die c-Axe gelegte Ebene die $F^{(2)}$ in einem Kreise, so wird sie die $[ab]$-Ebene in einem Durchmesser d_1 schneiden müssen, welcher der Träger einer Punktinvolution ist, deren Potenz P_c sein mufs; wir haben also $P_{d_1} = P_c$. Die Hauptebene $[ab]$ schneidet aber die Fläche $F^{(2)}$ in einem (reellen oder imaginären) Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{M}$, dessen Hauptaxen a und b die Träger von Punktinvolutionen mit den Potenzen P_a und P_b sind. Dem Durchmesser d_1 für diesen Kegelschnitt $[ab]^{(2)}$ sei konjugiert der Durchmesser d, dann gilt die bekannte Beziehung:

$$P_a + P_b = P_d + P_{d_1},$$

also, da $P_{d_1} = P_c$ ist:

$$P_d = P_a + P_b - P_c;$$

es gilt aber (S. 521) für jeden Durchmesser d die Beziehung:

$$\frac{1}{P_d} = \frac{\cos^2(d, a)}{P_a} + \frac{\sin^2(d, a)}{P_b},$$

also für unsern Durchmesser d:

$$\cos^2(d, a)\ \frac{P_a + P_b - P_c}{P_a} + \sin^2(d, a)\ \frac{P_a + P_b - P_c}{P_b} = 1,$$

oder:

$$\cos^2(d, a) \cdot \frac{P_b - P_c}{P_a} + \sin^2(d, a) \cdot \frac{P_a - P_c}{P_b} = 0,$$

und hierdurch wird die gesuchte Richtung von d bestimmt, nämlich durch die Bedingung:

$$\operatorname{tg}^2(d, a) = -\frac{P_b}{P_a} \cdot \frac{P_b - P_c}{P_a - P_c};$$

wollen wir die Richtung des konjugierten Durchmessers d_1 haben, so dafs $[cd_1]$ die gesuchte Kreisebene selbst wird, so ergiebt sich, da wegen der Strahleninvolution, deren Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ ist, und die dem Kegelschnitt $[ab]^{(2)}$ zugehört:

$$\mathrm{tg}^2 (d, a) \, . \, \mathrm{tg}^2 (d_1, a) = \left(\frac{P_b}{P_a}\right)^2$$

ist:

$$\mathrm{tg}^2 (d_1, a) = - \frac{P_b}{P_a} \cdot \frac{P_a - P_c}{P_b - P_c} .$$

Es wird also im allgemeinen zwei Richtungen für d_1 geben, die symmetrisch zu den Axen a und b liegen (wie auch a priori klar ist), und die die Aufgabe lösen, wofern der für $\mathrm{tg}^2 (d_1 a)$ gefundene Ausdruck positiv ist; ist er dagegen negativ, so giebt es keine reelle Richtung d_1. Bevor wir diese Frage der Realität für jede der vier Mittelpunktsflächen $F^{(2)}$ untersuchen, bringen wir noch die obige Gleichung:

$$\frac{\cos^2 (d, a)}{P_a (P_a - P_c)} + \frac{\sin^2 (d, a)}{P_b (P_b - P_c)} = 0,$$

indem wir sie mit P_c multiplizieren und die Brüche zerlegen, auf folgende Gestalt:

$$\frac{\cos^2 (d, a)}{P_a - P_c} + \frac{\sin^2 (d, a)}{P_b - P_c} = \frac{\cos^2 (d, a)}{P_a} + \frac{\sin^2 (d, a)}{P_b},$$

und erkennen aus ihr ein bemerkenswertes Resultat:

Wir haben nämlich in der Hauptebene $[a b]$ zwei konfokale Kegelschnitte, den Hauptkegelschnitt $[a b]^{(2)}$ oder $\mathfrak{K}_{ab}^{(2)}$ mit den Axen a, b und den Potenzen der zugehörigen Punktinvolutionen P_a, P_b, und zweitens den Fokalkegelschnitt $K_{ab}^{(2)}$ mit denselben Hauptaxen und den Potenzen der zugehörigen Punktinvolutionen $P_a - P_c$, $P_b - P_c$ (S. 567), und die vorige Beziehung sagt nichts anderes aus, als daſs der Durchmesser d für diese beiden Kegelschnitte Träger derselben Punktinvolution ist. Wenn also die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{ab}^{(2)}$ und $K_{ab}^{(2)}$ reelle Schnittpunkte haben (Kreispunkte S. 572), so werden die beiden Durchmesser, welche dieselben verbinden, die gesuchten Richtungen für d sein, und die ihnen konjugierten Richtungen d_1 also die Kreisschnitte bestimmen, wie wir früher eingesehen haben. Wir sind aber hier unabhängig von der Realität der Kreispunkte zu der Bestimmung der Kreisebenen gelangt und können, da die für die c-Axe ausgeführte Betrachtung in gleicher Weise für die a-Axe und b-Axe gilt, folgendes allgemeine Resultat aussprechen:

Es giebt im allgemeinen durch jede der drei Hauptaxen einer Mittelpunktsfläche $F^{(2)}$ zwei (reelle oder imaginäre) Ebenen, welche dieselbe in Kreisen schneiden; die zu denselben konjugierten Durchmesser der $F^{(2)}$, welche paarweise in den drei Hauptebenen liegen, sind die Träger gleicher Punktinvolutionen sowohl für den Hauptkegelschnitt, als auch für den in seiner Ebene enthaltenen Fokalkegelschnitt (oder die gleichen gemeinschaftlichen Durchmesser beider Kegelschnitte).

Hierdurch ist die Aufgabe im allgemeinen gelöst, da alle übrigen Ebenen, welche $F^{(2)}$ in Kreisen schneiden, den Stellungen dieser gefundenen Ebenen parallel sein müssen, s. o.; aber es bleibt noch übrig, die Realität der Durchmesserebenen zu untersuchen, welche in Kreisen schneiden. Hierzu müssen wir das in der Hauptebene $[ab]$ abgeleitete Resultat auch für die beiden andern Hauptebenen aussprechen; bezeichnen wir daher den früher d genannten Durchmesser der $[ab]$-Ebene jetzt mit d_c und den analogen Durchmesser in der $[ac]$-Ebene mit d_b, endlich den entsprechenden in der $[bc]$-Ebene mit d_a, d. h. diejenigen drei Durchmesser in den Hauptebenen, deren konjugierte Durchmesserebenen Kreisschnittebenen sind, so haben wir folgende Gleichungen zur Bestimmmung ihrer Richtung und der zugehörigen Potenzwerte:

$$\begin{cases} [ab]\text{-Ebene: } \operatorname{tg}^2(d_c, a) = -\dfrac{P_b(P_b - P_c)}{P_a(P_a - P_c)}; \quad P_{d_c} = P_a + P_b - P_c \\ [ac]\text{-Ebene: } \operatorname{tg}^2(d_b, a) = -\dfrac{P_c(P_c - P_b)}{P_a(P_a - P_b)}; \quad P_{d_b} = P_a + P_c - P_b \\ [bc]\text{-Ebene: } \operatorname{tg}^2(d_a, b) = -\dfrac{P_c(P_c - P_a)}{P_b(P_b - P_a)}; \quad P_{d_a} = P_b + P_c - P_a. \end{cases}$$

Setzen wir ferner, wie auf S. 570, voraus, daſs die Werte P_a P_b P_c in algebraischem Sinne der Gröſse nach geordnet seien:

$$P_a > P_b > P_c,$$

dann sind offenbar die Verhältnisse:

$$\frac{P_b - P_c}{P_a - P_c} > 0 \quad \frac{P_c - P_b}{P_a - P_b} < 0 \quad \frac{P_c - P_a}{P_b - P_a} > 0,$$

und es kommt noch auf die Vorzeichen der Gröfsen $P_a\ P_b\ P_c$ selbst an, um zu entscheiden, ob die Durchmesser $d_c\ d_b\ d_a$ reelle Schnittpunkte haben oder nicht.

Gehen wir also die vier möglichen Fälle durch:

I. $P_a > 0\quad P_b > 0\quad P_c > 0$, **das Ellipsoid**; nur die Gleichung:

$$\operatorname{tg}^2(d_b,\, a) = -\frac{P_c}{P_a}\cdot\frac{P_c - P_b}{P_a - P_b}$$

liefert reelle Werte für die Richtung des Durchmessers d_b, der in der $[ac]$-Ebene liegt, während die beiden andern Gleichungen für das Quadrat der Tangente einen negativen Ausdruck liefern. Es giebt also nur zwei reelle Stellungen für eine Ebene, die das Ellipsoid in einem Kreise schneidet. Die Stellungen dieser beiden Ebenen enthalten die Richtung der b-Axe, der mittleren (der Gröfse nach); da P_{d_b} positiv ist, und auch der konjugierte Durchmesser reell wird, so schneiden die beiden durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ gelegten Kreisebenen in reellen Kreisen.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die durch die b-Axe gehende Kreisebene $\varkappa$ mit der Hauptebene $[ba]$ bildet, durch:

$$\varphi = (\varkappa,\, [ab]),$$

so folgt aus:

$$\frac{\cos^2\varphi}{P_a} + \frac{\sin^2\varphi}{P_c} = \frac{1}{P_b}$$

der Wert von:

$$\cos^2\varphi = \frac{P_a\,(P_b - P_c)}{P_b\,(P_a - P_c)}\,.$$

II. $P_a > 0\quad P_b > 0\quad P_c < 0$ **das einschalige Hyperboloid**; nur die einzige Gleichung:

$$\operatorname{tg}^2(d_a,\, b) = -\frac{P_c}{P_b}\cdot\frac{P_c - P_a}{P_b - P_a}$$

liefert reelle Werte für die Richtung des Durchmessers d_a, der in der $[bc]$-Ebene liegt, während die beiden andern Gleichungen für das Quadrat der Tangente negative Werte liefern. Es giebt also auch hier nur zwei reelle Stellungen für eine Ebene, die das einschalige Hyperboloid in einem Kreise schneidet. Diese beiden Stellungen enthalten die Richtung der a-Axe, d. h. der gröfseren von den beiden reellen Axen.

Da der Durchmesser d_a, weil P_{d_a} negativ ist, nicht in reellen Punkten schneidet, so muſs sein konjugierter Durchmesser in reellen Punkten die Fläche treffen, denn der Hauptkegelschnitt in der $[bc]$-Ebene ist Hyperbel; also schneiden die beiden durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ gelegten Kreisebenen das einschalige Hyperboloid in reellen Kreisen.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die durch die a-Axe gehende Kreisebene $\varkappa$ mit der Hauptebene $[ab]$ bildet, durch:

$$\varphi = (\varkappa, [ab]),$$

so folgt aus:

$$\frac{\cos^2\varphi}{P_b} + \frac{\sin^2\varphi}{P_c} = \frac{1}{P_a}$$

der Wert von:

$$\cos^2\varphi = \frac{P_b(P_a - P_c)}{P_a(P_b - P_c)},$$

also für den Winkel, welchen die durch die a-Axe gehende Kreisebene $\varkappa$ mit der Hauptebene $[ac]$ bildet:

$$\psi = 90^0 - \varphi = (\varkappa, [ac])$$

der Wert:

$$\cos^2\psi = \frac{P_c(P_a - P_b)}{P_c(P_c - P_b)}.$$

III. $P_a > 0$ $P_b < 0$ $P_c < 0$ das zweischalige Hyperboloid; nur die einzige Gleichung:

$$\operatorname{tg}^2(d_c, a) = -\frac{P_b}{P_a}\cdot\frac{P_b - P_c}{P_a - P_c}$$

liefert reelle Werte für die Richtung des Durchmessers d_c, der in der $[ab]$-Ebene liegt, während die beiden anderen Gleichungen für das Quadrat der Tangente negative Werte liefern. Es giebt also auch hier nur zwei reelle Stellungen für eine Ebene, die das zweischalige Hyperboloid in einem Kreise schneidet. Diese beiden Stellungen enthalten die Richtung der c-Axe d. h. der kleineren (im algebraischen Sinne) von den beiden imaginären Axen. P_{d_c} ist positiv, der Durchmesser d_c schneidet in reellen, folglich der konjugierte Durchmesser in imaginären Punkten, weil der Hauptkegelschnitt in der $[ab]$-Ebene Hyperbel ist; die beiden durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ gelegten Kreisebenen schneiden also das zweischalige Hyperboloid in imaginären Kreisen. Aber es

giebt trotzdem reelle Kreise auf dem zweischaligen Hyperboloid; legen wir in den reellen Endpunkten des Durchmessers d_c die Berührungsebenen und zu diesen Parallelebenen, so schneiden alle diejenigen Parallelebenen, welche zwischen die beiden Berührungsebenen fallen in imaginären, alle übrigen in reellen Kreisen. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die durch die c-Axe gehende Kreisebene $\varkappa$ mit der Hauptebene $[ac]$ bildet durch

$$\varphi = (\varkappa, [ac]),$$

so folgt aus:

$$\frac{\cos^2\varphi}{P_a} + \frac{\sin^2\varphi}{P_b} = \frac{1}{P_c},$$

$$\cos^2\varphi = \frac{P_a(P_c - P_b)}{P_c(P_a - P_b)}.$$

IV. $P_a < 0$ $P_b < 0$ $P_c < 0$ die imaginäre Fläche; nur die einzige Gleichung:

$$\operatorname{tg}^2(d_b, a) = -\frac{P_c(P_c - P_b)}{P_a(P_a - P_b)}$$

liefert reelle Werte für die Richtung des Durchmessers d_b, der in der $[ac]$-Ebene liegt, während die beiden anderen Gleichungen für das Quadrat der Tangente negative Werte liefern. Es giebt also auch hier nur zwei reelle Stellungen für eine Ebene, welche die imaginäre Fläche zweiter Ordnung in einem Kreise schneidet, der natürlich auch imaginär ist. Die Stellungen dieser beiden Ebenen enthalten die Richtung der b-Axe d. h. der mittleren (im algebraischen Sinne). Bezeichnen wir den Winkel, welchen die durch die b-Axe gehende Kreisebene $\varkappa$ mit der Hauptebene $[ba]$ bildet, durch

$$\varphi = (\varkappa, [ab]),$$

so folgt aus:

$$\frac{\cos^2\varphi}{P_a} + \frac{\sin^2\varphi}{P_c} = \frac{1}{P_b}$$

der Wert von

$$\cos^2\varphi = \frac{P_a(P_b - P_c)}{P_b(P_a - P_c)}.$$

Das Gesamtresultat stellt sich demgemäfs so heraus:

Ist eine Mittelpunktsfläche 2. O. $F^{(2)}$ gegeben, so giebt es immer nur zwei reelle Stellungen für eine Ebene, welche $F^{(2)}$ in einem Kreise schneiden soll. Diese beiden reellen Stellungen enthalten

die Richtung einer der drei Hauptaxen und liegen symmetrisch zu der ihr konjugierten Hauptebene. Beim Ellipsoid gehen die durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Fläche $F^{(2)}$ gelegten Kreisschnittebenen durch die, der Gröfse nach, mittlere Hauptaxe, beim einschaligen Hyperboloid durch die gröfsere der beiden reellen Hauptaxen, beim zweischaligen Hyperboloid durch diejenige der beiden imaginären Hauptaxen, für welche der absolute Wert der Potenz der zugehörigen (elliptischen) Punktinvolution der gröfsere ist, bei der imaginären Fläche 2. O. durch diejenige imaginäre Hauptaxe, deren zugehörige (elliptische) Punktinvolution einen Potenzwert hat, welcher absolut genommen zwischen den absolut genommenen Potenzwerten der beiden anderen Punktinvolutionen liegt. In den beiden ersten Fällen schneiden die Kreisebenen, durch die betreffenden Hauptaxen selbst gelegt, reelle Kreise aus, in den beiden anderen Fällen imaginäre Kreise; aber trotzdem giebt es auch beim zweischaligen Hyperboloid zu den beiden reellen Stellungen der Kreisebenen Parallelebenen, welche die Fläche in reellen Kreisen schneiden. Der zu der Stellung der einen (oder anderen) reellen Kreisebene konjugierte Durchmesser schneidet nämlich das zweischalige Hyperboloid in zwei reellen Punkten, deren Berührungsebenen jener Kreisebene parallel laufen. Eine zu diesen Berührungsebenen parallele Ebene wird die Fläche in einem imaginären oder reellen Kreise schneiden, je nachdem sie die Endpunkte des konjugierten Durchmessers trennt oder nicht trennt. Beim Ellipsoid gilt das Umgekehrte; auch hier trifft der zu einer (oder der anderen) Stellung der Kreisebenen konjugierte Durchmesser die Fläche in reellen Punkten, und eine zu der Kreisebene parallele Ebene wird das Ellipsoid in einem reellen oder imaginären Kreise schneiden, je nachdem sie die Endpunkte des konjugierten Durchmessers trennt oder nicht trennt.

Die vier Endpunkte der zu den Stellungen der beiden Kreisebenen konjugierten Durchmesser sind die Kreispunkte der Fläche. Beim einschaligen Hyperboloid treffen diese konjugierten Durchmesser die Fläche nicht; es giebt keine Kreispunkte, sondern alle zu den Kreisebenen parallelen Ebenen schneiden die Fläche in reellen Kreisen; die imaginäre Fläche kann natürlich nur in imaginären Kreisen geschnitten werden.

Wir bemerken noch eine sich unmittelbar ergebende Eigenschaft der Kreise, welche auf einer Fläche $F^{(2)}$ verlaufen. Legt man nämlich durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Fläche $F^{(2)}$ eine beliebige Durchmesserebene, so schneidet dieselbe die Fläche $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ ist, und die beiden durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ gelegten Kreisebenen schneiden die $F^{(2)}$ in zwei gleichen Kreisen, weil sie durch eine der Hauptaxen der $F^{(2)}$ gehen; sie schneiden daher auch den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in zwei gleichen Durchmessern. Legen wir jetzt eine zu der Durchmesserebene parallele Berührungsebene der $F^{(2)}$, so ist die ihrem Berührungspunkt zugehörige Strahleninvolution parallel und gleich der Strahleninvolution der konjugierten Durchmesser des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$; die Axen des letzteren sind also auch parallel den Axen der Strahleninvolution in der Berührungsebene; die beiden durch den Berührungspunkt gelegten Kreisebenen schneiden mithin die Berührungsebenen in zwei Tangenten, welche gleich geneigt sein müssen zu den Axen der Strahleninvolution, weil die gleichen Durchmesser eines Kegelschnitts gegen die Axen desselben gleich geneigt sind. Wir erhalten daher folgenden Satz:

Wenn man in einer Berührungsebene einer Fläche $F^{(2)}$ die beiden Tangenten an den Kreisen zieht, welche durch den Berührungspunkt auf der Fläche verlaufen, so sind die Halbierungslinien von Winkel und Nebenwinkel zwischen diesen beiden Geraden die Axen der Strahleninvolution, welche in der Berührungsebene dem Berührungspunkte zugehört.*)

*) Vergl. F. Joachimsthal: „Über die Normalen der Ellipse und des Ellipsoids", Crelle's Journal Bd. XXVI, S. 172.

Es bleibt jetzt noch übrig, die vorgelegte Frage für den Fall der Paraboloide zu beantworten. Da das hyperbolische Paraboloid von jeder Ebene entweder in einer reellen Hyperbel oder Parabel geschnitten wird (S. 214), so kann bei demselben von Kreisschnitten überhaupt keine Rede sein. Für das elliptische Paraboloid haben wir zwar schon von den Fokalparabeln aus die Kreisschnitte bestimmt (S. 590), wollen aber hier nochmals unabhängig davon die vorgelegte Frage beantworten.

Beim elliptischen Paraboloid ist die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ Berührungsebene, und ihr Berührungspunkt $\mathfrak{M}^\infty$ der Mittelpunkt einer elliptischen Strahleninvolution in ε_∞, welche von allen Paaren konjugierter Strahlen durch $\mathfrak{M}^\infty$ gebildet wird. Um dieselbe anschaulicher zu machen, denken wir uns durch diese Strahlenpaare und die endliche Hauptaxe a des Paraboloids, deren Berührungsebene im Scheitel $\mathfrak{S}$ normal auf ihr steht, Ebenenpaare gelegt, die eine Ebeneninvolution durch die Axe a konstituieren, welche mit der Strahleninvolution in ε_∞ perspektivisch liegt, in unserem Falle also auch elliptisch ist und im endlichen Raume unserer Anschauung sich nicht entzieht.

Diese Ebeneninvolution können wir auch unabhängig von den unendlich-fernen Elementen dadurch herstellen, dafs wir am Scheitel $\mathfrak{S}$ des Paraboloids die Berührungsebene τ auffassen und die in derselben liegende Strahleninvolution, deren Mittelpunkt $\mathfrak{S}$ ist, und die aus sämtlichen Paaren konjugierter Strahlen durch $\mathfrak{S}$ (in Bezug auf das räumliche Polarsystem) gebildet wird, herstellen, endlich eine mit derselben perspektivische Ebeneninvolution durch die a-Axe legen.

Da nun eine beliebige Ebene ε die Ebene ε_∞ in einer Geraden l_∞ schneidet, für welche die zugehörige Punktinvolution durch die soeben konstruierte Ebeneninvolution mit der Axe a ausgeschnitten wird, und die Schnittkurve von ε mit $F^{(2)}$ dann und nur dann ein Kreis sein wird, wenn die Punktinvolution auf l_∞ die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten hat, oder die Strahleninvolution, in welcher die Ebene ε die Ebeneninvolution $[a]$ schneidet eine orthogonale ist, so kommt die vorgelegte Aufgabe auf folgende zurück:

Durch eine gegebene elliptische Ebeneninvolution $[a]$ eine solche Ebene zu legen, dafs die Strahleninvolution des Durchschnitts eine orthogonale wird; diese Aufgabe haben wir in § 5 (S. 19) gelöst und dort gesehen, dafs es für die gesuchte Ebene nur zwei reelle Stellungen giebt, die symmetrisch liegen zu einer der beiden Hauptebenen der gegebenen Ebeneninvolution mit der Axe a.

Um die Stellungen der gesuchten Kreisebenen selbst zu finden, nehmen wir den Scheitel $\mathfrak{S}$ des elliptischen Paraboloids und die beiden durch die a-Axe desselben gehenden Hauptebenen $[ab^\infty]$ und $[ac^\infty]$; diese schneiden das Paraboloid in den beiden Parabeln $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab^\infty}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac^\infty}$, welche gleichzeitig $\mathfrak{S}$ zum Scheitel, $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$ zu Brennpunkten haben; und zwar liegen $\mathfrak{f}_b \mathfrak{f}_c$ auf derselben Seite von $\mathfrak{S}$; da sie im allgemeinen nicht zusammenfallen werden, so wird einer der beiden Brennpunkte der Hauptschnitte dem Scheitel näher liegen, als der andere; dieser nähere sei $\mathfrak{f}_b$.

Um die Ebeneninvolution a zu ermitteln, denken wir uns durch irgend einen Punkt $\mathfrak{o}$ der a-Axe, welcher in dem Innern der beiden Hauptparabeln liegen möge, eine Ebene normal zur a-Axe gelegt; diese wird das Paraboloid in einer Ellipse schneiden, deren Hauptaxen die beiden Schnittlinien l_b und l_c mit den Hauptebenen $[ab^\infty]$ und $[ac^\infty]$ sein werden. Die Potenzen der zugehörigen Punktinvolutionen oder die Quadrate der Halbaxen dieser Ellipse werden bestimmt vermittelst der beiden Hauptparabeln $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab^\infty}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac^\infty}$; wir erhalten nämlich als ihre Werte:

$$4\,\mathfrak{S}\mathfrak{o}\,.\,\mathfrak{S}\mathfrak{f}_b \quad \text{und} \quad 4\,\mathfrak{S}\mathfrak{o}\,.\,\mathfrak{S}\mathfrak{f}_c,$$

und aus diesen Werten ergeben sich die Richtungen der gleichen konjugierten Durchmesser der Ellipse; bezeichnen wir diese durch s und t und die Winkel

$$(s, l_b) = (t, l_b) = \varphi,$$

so ist:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{4\,\mathfrak{S}\mathfrak{o}\,.\,\mathfrak{S}\mathfrak{f}_c}{4\,\mathfrak{S}\mathfrak{o}\,.\,\mathfrak{S}\mathfrak{f}_b} = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{f}_c}{\mathfrak{S}\mathfrak{f}_b};$$

bezeichnen wir zur Abkürzung die Strecken:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{f}_b = b, \quad \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c = c,$$

so wird der Winkel φ bestimmt durch die Bedingung:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{c}{b},$$

und durch den Winkel φ werden die Richtungen der beiden gleichen konjugierten Durchmesser s und t der Ellipse bestimmt, in welcher die durch $\mathfrak{o}$ normal zur a-Axe gelegte Ebene das Paraboloid schneidet. Die beiden Ebenenpaare:

$$[a l_b], [a l_c] \quad \text{und} \quad [a s], [a t]$$

sind aber zwei Paare konjugierter Ebenen der gesuchten Ebeneninvolution $[a]$, und es wird nun darauf ankommen, durch $\mathfrak{o}$ eine Ebene so zu legen, daſs sie beide Ebenenpaare in je zwei Paaren rechtwinkliger Strahlen schneidet. Da die beiden Ebenen $[a l_b]$ und $[a l_c]$ selbst zu einander rechtwinklig sind, so kann die gesuchte Ebene nur dann dieselben in zwei rechtwinkligen Strahlen schneiden, wenn sie durch einen der beiden Strahlen l_b oder l_c geht, weil l_c die Normale der Ebene $[a l_b]$, und l_b die Normale der Ebene $[a l_c]$ ist. Jede durch l_c gelegte Ebene schneidet das eine Ebenenpaar $[a l_b]$ und $[a l_c]$ in einem Paar rechtwinkliger Strahlen, und es ist unter allen durch l_c gelegten Ebenen eine solche aufzusuchen, welche auch das Ebenenpaar $[a s]$ und $[a t]$ in einem rechtwinkligen Strahlenpaare schneidet. Schneidet diese gesuchte Ebene die Ebene $[a s]$ in dem Strahle x und die Ebene $[a l_b]$ in dem Strahle x', so muſs der Winkel $(l_c, x) = 45^0$, also auch der Winkel $(x x') = 45^0$ sein. Die drei Strahlen $a\, x\, x'$ bilden also ein Dreikant, in welchem der Neigungswinkel

$$([x' x], [x' a]) = 90^0,$$

der Neigungswinkel

$$([a x], [a x']) = \varphi$$

und der Kantenwinkel

$$(x, x') = 45^0$$

ist; für dieses rechtwinklige Dreikant gilt bekanntlich die Beziehung:

$$\operatorname{tg}(x', x) = \operatorname{tg}(45^0) = 1 = \sin(a, x') \,.\, \operatorname{tg} \varphi \text{ *)};$$

---

*) In der That, gehen durch einen Strahl $|\mathfrak{o}\mathfrak{b}|$ zwei zu einander rechtwinklige Ebenen, und legen wir in einem Punkte $\mathfrak{a}$ der ersten

bezeichnen wir daher den gesuchten Winkel $(a, x') = \psi$, so folgt:

$$\sin^2 \psi = \operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{b}{c} \cdot$$

Durch den Winkel ψ ist in der Ebene $[a l_b]$ ein Strahl x' von solcher Beschaffenheit ermittelt, dafs die Ebene $[l_c x']$ die vorige Ebeneninvolution a in einer orthogonalen Strahleninvolution schneidet, d. h. die Stellung einer Ebene, welche das Paraboloid in einem Kreise schneiden mufs. Da der Winkel ψ nach beiden Seiten hin angetragen werden kann, so erhalten wir zwei Ebenen durch die Gerade l_c, welche das Paraboloid in Kreisen schneiden und symmetrisch liegen zur Hauptebene $[a c^\infty]$. Gehen wir in gleicher Weise von der Geraden l_b aus, so würden die Stellungen der Kreisebenen zu bestimmen sein durch Strahlen in der Ebene $[a l_c]$, welche zu der a-Axe unter dem Winkel ψ' geneigt sind, der zu ermitteln wäre durch die Bedingung:

$$\sin^2 \psi' = \frac{c}{b};$$

da aber die beiden Strecken b und c im allgemeinen verschieden sind, und wir $b < c$ angenommen haben, so liefert nur die erste Gleichung:

---

eine Normalebene zum Strahle $[\mathfrak{o}\mathfrak{a}]$, welche die erste Ebene in dem Strahle $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$, die zweite in dem Strahle $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ schneidet, wo $\mathfrak{c}$ ein Punkt des letzteren ist, so wird, weil auf der Ebene $[\mathfrak{o}\mathfrak{b}\mathfrak{a}]$ sowohl die Ebene $[\mathfrak{o}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$, als auch die Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ rechtwinklig steht, $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ Normale der Ebene $[\mathfrak{o}\mathfrak{b}\mathfrak{a}]$ sein, folglich haben wir:

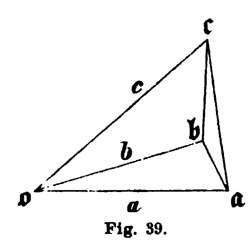


Fig. 39.

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cdot \operatorname{tg}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

also, wenn wir die drei Strahlen:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{a} = a, \quad \mathfrak{o}\mathfrak{b} = b, \quad \mathfrak{o}\mathfrak{c} = c$$

bezeichnen:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{o}\mathfrak{b} \cdot \sin(a, b)$$
$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{o}\mathfrak{b} \cdot \operatorname{tg}(b, c)$$
$$\angle(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c}) = ([ab], [ac]),$$

woraus für das an der Kante b rechtwinklige Dreikant $a b c$ die Beziehung folgt:

$$\operatorname{tg}(b, c) = \sin(a, b) \cdot \operatorname{tg}([ab], [ac]),$$

von der im Texte Gebrauch gemacht wurde.

$$\sin^2 \psi = \frac{b}{c}$$

reelle Werte für ψ, wie auch die Konstruktion derselben zeigt. Schlägt man nämlich über $\mathfrak{S}\mathfrak{f}_c = c$ als Durchmesser einen Kreis in der Ebene $[ab^\infty]$, errichtet in $\mathfrak{f}_b$ ein Perpendikel auf der a-Axe, welches den Kreis in den reellen Punkten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}'$ schneidet, weil $\mathfrak{S}\mathfrak{f}_b < \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c$, so sind die beiden Strahlen $|\mathfrak{f}_c\mathfrak{y}|$ und $|\mathfrak{f}_c\mathfrak{y}'|$ gegen die a-Axe unter dem Winkel ψ geneigt, und die Ebenen, welche diese Strahlen mit der Geraden l_c verbinden, sind die gesuchten Stellungen der Kreisebenen für das elliptische Paraboloid. Bei der analogen Konstruktion in der andern Hauptebene kann das Perpendikel den Kreis nicht schneiden. Es ist also ψ derjenige Winkel, welchen die durch die Gerade l_c gehende Kreisebene $\varkappa$ mit der Hauptebene $[ac^\infty]$ bildet, und wir haben für

$$\psi = (\varkappa, [ac^\infty])$$

die Werte:

$$\sin^2 \psi = \frac{b}{c}\,; \quad \cos^2 \psi = \frac{c-b}{c}.$$

Die Stellungen der beiden reellen Kreisebenen schneiden die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ in zwei geraden Linien l_∞ und l'_∞; durch jede derselben geht aufser der unendlich-entfernten Ebene ε_∞ selbst noch eine zweite Berührungsebene an das Paraboloid; diese beiden Berührungsebenen berühren das Paraboloid in den Kreispunkten $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$, welche auf derjenigen Hauptparabel liegen, deren Brennpunkt ($\mathfrak{f}_b$) dem Scheitel zunächst liegt.

Wenn insbesondere $b = c$ ist, d. h. die Brennpunkte $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$ zusammenfallen, so vereinigen sich die beiden Stellungen der Kreisebenen zu einer, welche normal auf der a-Axe steht. Das Paraboloid wird daher ein Rotationsparaboloid, und die beiden Kreispunkte fallen in den Scheitel desselben hinein.

§ 67. **Die Mac-Cullagh'sche und die Jacobi'sche Erzeugungsart der Fläche 2. O.**

Die Fokalkegelschnitte und die Kreisschnitte einer Fläche 2. O., deren Zusammenhang wir im Vorigen ermittelt haben,

führen zu sehr einfachen metrischen Beziehungen, welche verschiedene Erzeugungsarten der Fläche liefern.

Die Fokalkegelschnitte einer Fläche 2. O. zeigen nämlich in einer Hinsicht einen charakteristischen Unterschied: Die Stellungen der Kreisebenen sind normal zu der Ebene des einen Fokalkegelschnitts, nicht normal zu den Ebenen der andern. Wir fassen zuerst einen solchen Fokalkegelschnitt auf, zu dessen Ebene die Kreisschnittebenen nicht normal sind; dieser ist für das Ellipsoid die Ellipse $E_{ab}^{(2)}$ (S. 570) oder derjenige, welcher nicht die Kreispunkte der Fläche enthält, beim zweischaligen Hyperboloid die Hyperbel $H_{ac}^{(2)}$, d. h. ebenfalls derjenige Fokalkegelschnitt, welcher nicht die Kreispunkte der Fläche enthält; beim einschaligen Hyperboloid, wo die Kreisschnitte die Richtung der a-Axe, d. h. der gröfseren der beiden reellen Axen enthalten (S. 617), kann beliebig einer der beiden Fokalkegelschnitte $E_{ab}^{(2)}$ oder $H_{ac}^{(2)}$ gewählt werden, weil die Kreisschnittebenen zu keiner der beiden Ebenen derselben normal sind; beim elliptischen Paraboloid ist der zu betrachtende Fokalkegelschnitt die Parabel $P_{ac\infty}^{(2)}$, welche nicht die Kreispunkte enthält; das hyperbolische Paraboloid hat überhaupt keine eigentlichen Kreisschnitte und soll besonders behandelt werden.

Dieser so charakterisierte Fokalkegelschnitt wird der folgenden Betrachtung zu Grunde gelegt. Es sei $\mathfrak{t}$ ein beliebiger Punkt dieses Fokalkegelschnittes, t die Tangente in demselben und t_1 der konjugierte Strahl zu t im räumlichen Polarsystem der $F^{(2)}$, d. h. diejenige Gerade, welche normal steht auf der Ebene des Fokalkegelschnittes in dem Punkte $\mathfrak{t}_1$, der der Pol von t ist in Bezug auf den Hauptkegelschnitt in der betrachteten Ebene; aus der Grundeigenschaft des Fokalkegelschnittes folgt, dafs der Fufspunkt des aus $\mathfrak{t}_1$ auf t herabgelassenen Perpendikels der Berührungspunkt $\mathfrak{t}$ ist; mithin wird $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}$ der kürzeste Abstand zwischen den beiden rechtwinklig zu einander gerichteten Strahlen t und t_1 sein; ferner ist t die Axe einer dem räumlichen Polarsystem zugehörigen orthogonalen Ebeneninvolution; wenn also $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_1'$ irgend ein Paar konjugierter Punkte der Punktinvolution ist,

welche dem Strahle t_1 zugehört, so ist der Mittelpunkt derselben $\mathfrak{t}_1$ und

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{t}_1\mathfrak{x}_1' + (\mathfrak{t}_1\mathfrak{t})^2 = 0,$$

mithin der Winkel $\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}\mathfrak{x}_1' = 90^0$; auf dem Strahle $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}|$ steht also die Ebene $[t\mathfrak{x}_1']$ senkrecht. Die Punktinvolution, welche dem Strahle t_1 zugehört, ist demnach immer eine elliptische, weil ihre Potenz einen negativen Wert hat. Dies ist auch unmittelbar zu erkennen, denn für den Fall des Ellipsoids liegt die Fokalellipse $E_{ab}^{(2)}$ ganz innerhalb der Hauptellipse; die Tangente t an ersterer schneidet also die letztere in einem reellen Punktepaare; die Punktinvolution auf t ist daher hyperbolisch und auf der konjugierten Geraden t_1 notwendig elliptisch. Für den Fall des zweischaligen Hyperboloids gilt dasselbe; beim einschaligen Hyperboloid dagegen, mag der betrachtete Fokalkegelschnitt die Fokalellipse $E_{ab}^{(2)}$ oder die Fokalhyperbel $H_{ac}^{(2)}$ sein, liegt er beidemal aufserhalb des zugehörigen Hauptkegelschnittes; die Tangente t ist daher allemal der Träger einer elliptischen Punktinvolution, mithin auch t_1.

Es giebt nun, wie wir wissen, zwei bestimmte Stellungen für Ebenen, welche Kreise aus der Fläche $F^{(2)}$ ausschneiden; diese Ebenen sind gleich geneigt gegen die Ebene des betrachteten Fokalkegelschnittes, also auch gegen die Normale t_1 derselben. Nehmen wir eine solche Ebene $\varkappa$, welche die $F^{(2)}$ in dem Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ schneidet, und möge die Ebene $\varkappa$ dem Strahle t_1 im Punkte $\mathfrak{x}_1$ begegnen, dann ist die Polarebene des Punktes $\mathfrak{x}_1$ in Bezug auf $F^{(2)}$ die Ebene

$$\mathfrak{x}_1 = [t\mathfrak{x}_1'],$$

und diese Polarebene mufs die Polare x_1 des Punktes $\mathfrak{x}_1$ in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ enthalten. Die Ebene $\mathfrak{x}_1$ steht aber normal auf dem Strahle $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}|$, wie wir oben gesehen haben; folglich wird, wenn wir aus $\mathfrak{t}$ auf x_1 das Perpendikel $\mathfrak{t}\mathfrak{y}_1$ fällen, dasselbe der kürzeste Abstand zwischen den beiden Strahlen $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}|$ und x_1 sein; daher wird auch die Ebene $[\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}\mathfrak{y}_1]$ normal sein auf dem Strahle x_1, und der Winkel $\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}\mathfrak{y}_1$ wird 90^0 betragen.

Wir haben hiernach folgende räumliche Figur:

Eine Ebene $\varkappa$ enthält einen Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$, einen Punkt $\mathfrak{x}_1$

und dessen Polare x_1 in Bezug auf den Kreis; aus $\mathfrak{x}_1$ ist auf die Polare x_1 das Perpendikel $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1$ herabgelassen, welches daher Durchmesser des Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$ sein mufs, und durch $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1|$ eine Ebene normal zu $\varkappa$ gelegt, die einen Punkt $\mathfrak{t}$ enthält, für den $\angle\, \mathfrak{x}_1 \mathfrak{t} \mathfrak{y}_1 = 90^0$ ist; d. h. $\mathfrak{t}$ liegt auf einem zweiten Kreise, dessen Durchmesser $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1$ ist, und dessen Ebene auf der Ebene des ersten Kreises normal steht. Solche zwei Kreise im Raume, die sich durchschlingen, indem ihre zu einander rechtwinkligen Ebenen sich in einer Geraden schneiden, welche Durchmesser beider Kreise enthält, deren Endpunkte einander harmonisch trennen, bieten eine sehr einfache elementare Eigenschaft dar, von welcher wir Gebrauch machen wollen:

Sind $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ irgend zwei Punkte des einen Kreises und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ irgend zwei Punkte des andern Kreises, so ist allemal:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 \,.\, \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 \,.^{*)}$$

---

*) Zum Beweise dieser Eigenschaft erinnern wir an bekannte Sätze der Kreistheorie:

Ist ein Kreis $\mathfrak{m}^{(2)}$ gegeben, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ ein Durchmesser desselben, und sind $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ zwei konjugierte Punkte auf demselben (Fig. 40), so wird irgend ein Punkt $\mathfrak{x}$ des Kreises, mit $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ verbunden, vier harmonische Strahlen liefern, von denen zwei konjugierte $|\mathfrak{x}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{x}\mathfrak{b}|$ auf einander senkrecht stehen und daher Winkel und Nebenwinkel zwischen den andern beiden $|\mathfrak{x}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{x}\mathfrak{b}_1|$ halbieren; hieraus folgt die Beziehung:

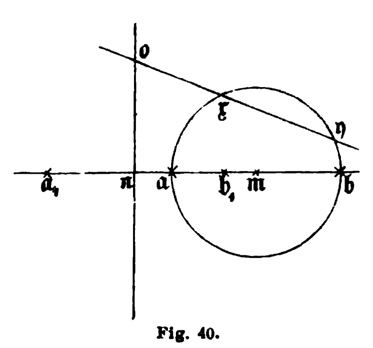


Fig. 40.

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}\mathfrak{b}_1} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1} = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1} = \text{konst}$$

d. h. für alle Punkte $\mathfrak{x}$ des Kreises konstant.

Wenn wir über $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ als Durchmesser eine Kugel $\mathfrak{m}^{(2)}$ beschreiben, so wird natürlich auch für alle Punkte $\mathfrak{x}$ dieser Kugel

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}\mathfrak{b}_1} = \text{konst.}$$

sein. Errichten wir in der Mitte $\mathfrak{n}$ zwischen $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ ein Perpendikel auf $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1|$ in der Ebene des ersten Kreises und nehmen einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ desselben, so ist:

Wählen wir daher auf dem Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ zwei beliebige Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ und auf dem andern Kreise die Punkte $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{x}_1$, so folgt:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1} = \frac{\mathfrak{x}'\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}'\mathfrak{x}_1};$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{o}\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{n}\mathfrak{m}^2 &= \mathfrak{o}\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{n}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{n}\mathfrak{b} + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^2\\ &= \mathfrak{o}\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{n}\mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^2\\ &= \mathfrak{o}\mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^2,\end{aligned}$$

also:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{m}\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{o}\mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{o}\mathfrak{b}_1^2,$$

d. h. die Potenz des Punktes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{m}^{(2)}$ ist gleich dem Quadrat des Abstandes des Punktes $\mathfrak{o}$ vom Punkte $\mathfrak{a}_1$ oder $\mathfrak{b}_1$. Wenn wir daher um $\mathfrak{m}$ mit dem Radius $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{b}$ und um $\mathfrak{o}$ mit dem Radius $\mathfrak{o}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}\mathfrak{b}_1$ zwei Kugeln beschreiben, so müssen dieselben sich rechtwinklig schneiden. Halten wir die erste Kugel $\mathfrak{m}^{(2)}$ fest und verändern die zweite $\mathfrak{o}^{(2)}$, indem wir $\mathfrak{o}$ auf dem Perpendikel $|\mathfrak{n}\mathfrak{o}|$ verändern, so gehen sämtliche Kugeln $\mathfrak{o}^{(2)}$ durch einen und denselben Kreis $\mathfrak{n}^{(2)}$, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{n}$ ist, dessen Radius $\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{n}\mathfrak{b}_1$ ist, und dessen Ebene auf der Ebene $[\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{o}]$ senkrecht steht, in welcher der erste Kreis $\mathfrak{m}^{(2)}$ liegt.

Wir erhalten daher zwei Kreise $\mathfrak{m}^{(2)}$ und $\mathfrak{n}^{(2)}$, die in zwei zu einander rechtwinkligen Ebenen liegen, und bez. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ zu Durchmessern haben, deren Endpunkte einander harmonisch trennen. Nehmen wir nun irgend zwei Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ des Kreises $\mathfrak{m}^{(2)}$, so wird die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ die Gerade $|\mathfrak{n}\mathfrak{o}|$ in einem solchen Punkte $\mathfrak{o}$ treffen, daſs

$$\mathfrak{o}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{o}\mathfrak{y} = \mathfrak{o}\mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{o}\mathfrak{b}_1^2$$

ist; folglich sind $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ zwei konjugierte Punkte für die Kugel $\mathfrak{o}^{(2)}$, und für jeden Punkt $\mathfrak{x}_1$ dieser Kugel wird daher $\frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}}$ denselben Wert haben. Da nun alle Kugeln $\mathfrak{o}^{(2)}$ durch den Kreis $\mathfrak{n}^{(2)}$ gehen, so wird auch, wenn wir irgend zwei Punkte $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1$ des Kreises $\mathfrak{n}^{(2)}$ nehmen, die Gleichheit bestehen:

$$\frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}},$$

oder

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}_1\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{y}_1\mathfrak{x},$$

d. h.: Wenn man irgend zwei Punkte des Kreises $\mathfrak{m}^{(2)}$ mit irgend zwei Punkten des Kreises $\mathfrak{n}^{(2)}$ zu einem windschiefen Vierseit verbindet, so ist allemal das Rechteck aus zwei Gegenseiten gleich dem Rechteck aus den beiden andern Gegenseiten dieses Vierseits.

Von diesem Satze haben wir im Texte Gebrauch gemacht.

wenn wir daher den Punkt $\mathfrak{x}$ beliebig auf dem Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ verändern, so bleibt das Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1} = \text{konst.},$$

d. h.: für alle Punkte $\mathfrak{x}$ des Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$ bleibt das Verhältnis ihrer Abstände von dem festen Punkte $\mathfrak{t}$ und dem festen Punkte $\mathfrak{x}_1$, in welchem die Ebene des Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$ der Geraden t_1 begegnet, von unverändertem Wert.

Nun giebt es durch jeden Punkt $\mathfrak{x}$ der Fläche $F^{(2)}$ zwei Ebenen, welche aus derselben Kreise ausschneiden; diese sind, wie wir wissen, parallel zwei bestimmten Stellungen, welche gleich geneigt sind gegen den Strahl t_1; wenn die Ebenen dieser beiden Kreisschnitte den Strahl t_1 in $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ treffen, so wird $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}\mathfrak{y}_1$ sein; für alle Punkte $\mathfrak{x}$ des einen Kreises ist das Verhältnis $\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1}$ konstant, und für alle Punkte des zweiten Kreises wird aus denselben Gründen das Verhältnis $\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1}$ konstant sein; da aber für die gemeinschaftlichen Punkte dieser beiden Kreise die Konstante denselben Wert hat, weil $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}\mathfrak{y}_1$ ist, so hat sie auch für sämtliche Punkte beider Kreise denselben Wert. Statt des ersten Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$ können wir jetzt einen beliebigen andern des Büschels nehmen, welches alle in parallelen Ebenen liegenden Kreisschnitte bilden, wofern dieser neue Kreis nur den dem andern Büschel angehörigen Kreis schneidet, und von den Kreisen des einen Büschels können wir in dieser Weise zu den Kreisen des andern Büschels durch die ihnen gemeinschaftlichen Punkte übergehen, immer wird das Verhältnis $\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1}$ denselben konstanten Wert behalten.

Ob aber durch diesen nach beiden Seiten hin fortgesetzten Prozess, durch welchen wir zu immer neuen Punkten der Fläche $F^{(2)}$ gelangen, auch alle Punkte derselben erhalten werden, oder ob etwa auf $F^{(2)}$ noch solche Punkte übrig bleiben, welche nicht getroffen werden können, bedarf einer besonderen Überlegung.

Sind l^∞ und l_1^∞ die beiden unendlich-entfernten Geraden, durch welche sämtliche Kreisebenen gehen, und die den un-

endlich-entfernten Punkt der b-Axe oder c-Axe gemein haben, so können wir uns ein Büschel von Parallelebenen durch l^∞ denken, welche den ganzen Raum erfüllen; in jeder derselben befindet sich ein (reeller oder imaginärer) Kreis, der der Fläche $F^{(2)}$ angehört, und wir können durch gehörige Näherung der parallelen Ebenen die Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ auf der Fläche einander so nahe bringen, wie wir wollen. Diese ganze Schar von Kreisen $\mathfrak{K}^{(2)}$ erfüllt vollständig die Fläche $F^{(2)}$, und durch die Nullkreise (Kreispunkte, s. o.) findet der Übergang von den reellen zu den imaginären Kreisen statt. In gleicher Weise denken wir uns durch l_1^∞ ein Büschel von parallelen Ebenen gelegt, welche auf $F^{(2)}$ eine zweite Schar von Kreisen $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ ausschneiden, die ebenfalls die ganze Fläche erfüllen und von denen auch je zwei einander so nahe gebracht werden können, als wir wollen. (Vgl. die Brill'schen Modelle, S. 574, Anm.) Wir haben dadurch auf $F^{(2)}$ eine doppelte Schar von Kreisen, die die ganze Fläche in Vierseite zerschneiden, die beliebig klein gemacht werden können und aus Kreisbögen in parallelen Ebenen gebildet werden. Von diesem doppelten Netz von Strafsen auf $F^{(2)}$ durchkreuzen sich in jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Fläche je zwei, die in den beiden Ebenen $[\mathfrak{x}l^\infty]$ und $[\mathfrak{x}l_1^\infty]$ liegen und den Scharen von Kreisen $[\mathfrak{K}^{(2)}]$ und $[\mathfrak{K}_1^{(2)}]$ angehören. Denken wir uns dieses Strafsennetz gehörig verengert, so können wir von einem Punkte eines Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$ zu einem gehörig nahen Kreise derselben Schar immer übergehen auf einem Kreise $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ der andern Schar; denn legen wir durch einen Punkt $\mathfrak{x}$ des Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$ die Ebene $[\mathfrak{x}l_1^\infty]$, welche die $F^{(2)}$ in einem Kreise $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ schneidet, und gehen wir auf diesem Kreise von $\mathfrak{x}$ zu einem unendlich-nahen Punkte $\mathfrak{x}'$ fort, so geht durch $\mathfrak{x}'$ ein zweiter Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ der ersten Schar, welcher dem vorigen unendlich nahe liegt in der Ebene $[\mathfrak{x}'l^\infty]$; also müssen auch umgekehrt zwei gehörig nahe Kreise der einen Schar immer gleichzeitig von einem Kreise der andern Schar getroffen werden können. Hieraus folgt, dafs man von einem beliebig gegebenen Punkte $\mathfrak{A}$ der Fläche $F^{(2)}$ zu einem beliebigen andern Punkte $\mathfrak{B}$ derselben immer gelangen kann, indem man successive nur die Strafsen und Querstrafsen ($\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$) des obigen Netzes durchläuft. Denn legt man durch

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$, die in parallelen Ebenen liegen, und teilt den Raum zwischen diesen beiden parallelen Ebenen durch neue parallele Ebenen so enge, daſs die in je zwei auf einander folgenden Ebenen enthaltenen Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ allemal wenigstens von einem Kreise $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ der andern Schar gleichzeitig getroffen werden, dann ist ersichtlich, daſs man nur durch Straſsen und Querstraſsen des hergestellten Netzes von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gelangen kann; auf die Mannigfaltigkeit der Auswahl oder die Kürze des Weges kommt es hierbei nicht weiter an, sondern nur auf die Möglichkeit eines solchen gebrochenen Weges. Da aber auf diesem Wege das Verhältnis $\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{t}}{\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}$ niemals seinen Wert ändern kann, indem es auf einem der Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ oder $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ seinen Wert behält und für die gemeinsamen Punkte zweier solchen Kreise denselben Wert besitzt, so hat es auch für den beliebigen Punkt $\mathfrak{A}$ der $F^{(2)}$ denselben Wert, wie für den Punkt $\mathfrak{B}$, d. h. bleibt für alle Punkte der Fläche konstant.

Dies Raisonnement behält seine Kraft, solange man von dem durch $\mathfrak{A}$ gehenden Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ zu dem durch $\mathfrak{B}$ gehenden Kreise derselben Schar durch eine Reihe von kontinuierlich einander folgenden reellen Kreisen derselben Schar übergehen kann, d. h. solange $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf derselben Schale der Fläche $F^{(2)}$ liegen, also für das Ellipsoid, das einschalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid; für das zweischalige Hyperboloid aber nur dann, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf derselben Schale desselben liegen; es wäre also immerhin die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daſs das Verhältnis $\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{t}}{\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}$ für jede der beiden Schalen des zweischaligen Hyperboloids einen andern konstanten Wert besäſse. Daſs dies in der That nicht der Fall ist, erkennen wir leicht aus zwei besonderen Punkten, die auf den beiden Schalen liegen.

Betrachten wir beim zweischaligen Hyperboloid die $[ac]$-Ebene, in welcher die Fokalhyperbel $H_{ac}^{(2)}$ ganz innerhalb der Haupthyperbel $\mathfrak{H}_{ac}^{(2)}$ liegt. Hier haben die beiden Stellungen der Kreisebenen die Richtung der c-Axe gemeinschaftlich. Ist nun $\mathfrak{t}$ ein beliebiger Punkt der Fokalhyperbel und t seine Tangente, ferner $\mathfrak{t}_1$ der Pol der Geraden t in Bezug auf die

Haupthyperbel $\mathfrak{H}_{ac}^{(2)}$, und t_1 das in $\mathfrak{t}_1$ auf der $[ac]$-Ebene errichtete Perpendikel, so sind t und t_1 konjugierte Strahlen und $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1$ ihr kürzester Abstand. Ziehen wir durch den Punkt $\mathfrak{t}_1$ in der $[ac]$-Ebene eine Parallele zur a-Axe, d. h. der reellen Axe der Hyperbel $\mathfrak{H}_{ac}^{(2)}$, so mufs dieselbe der Hyperbel in zwei reellen Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ begegnen, die auf verschiedenen Zweigen der Haupthyperbel, also auch auf verschiedenen Schalen des Hyperboloids liegen. Um für diese beiden Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die zugehörigen Werte des obigen Verhältnisses zu ermitteln, müssen wir die parallelen Ebenen $[l^\infty \mathfrak{x}]$ und $[l^\infty \mathfrak{y}]$ legen, welche t_1 resp. in $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ treffen; da nun in unserem besonderen Falle die Geraden $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ und t_1 sich in $\mathfrak{t}_1$ begegnen, also in einer Ebene liegen, so schneidet dieselbe die beiden vorigen Parallelebenen in zwei parallelen Geraden; folglich ist $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$ parallel $|\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1|$, und wir haben das Verhältnis:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}_1}{\mathfrak{y}\mathfrak{t}_1};$$

ferner ist die Gerade $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ die Trägerin einer zugehörigen Punktinvolution, deren Doppelpunkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind, und für welche der Punkt $\mathfrak{t}_1$ und der Schnittpunkt mit t konjugierte Punkte sind, weil $\mathfrak{t}_1$ und t Pol und Polare in Bezug auf die Hyperbel $\mathfrak{H}_{ac}^{(2)}$ sind. Da die Doppelpunkte einer Involution durch ein Paar konjugierter Punkte harmonisch getrennt werden, so sind auch die von $\mathfrak{t}$ nach diesen Punkten hingehenden Strahlen harmonisch; der Strahl $|\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1|$ steht aber rechtwinklig auf dem Strahle t, wie wir wissen; daher werden diese beiden Strahlen Winkel und Nebenwinkel zwischen den beiden andern Strahlen $|\mathfrak{t}\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{y}|$ halbieren, also gilt die Gleichheit der Verhältnisse:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}_1}{\mathfrak{y}\mathfrak{t}_1} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{y}\mathfrak{t}},$$

und hieraus folgt nach dem Obigen:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{y}\mathfrak{t}} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1} = \frac{\mathfrak{y}\mathfrak{t}}{\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1},$$

d. h. für die beiden Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, welche auf verschiedenen Schalen des Hyperboloids liegen, hat das frühere Verhältnis denselben Wert; es behält daher nach dem Obigen für sämtliche Punkte des zweischaligen Hyperboloids den-

selben Wert, und wir können nun die Gültigkeit des allgemeinen Satzes behaupten:

Wenn ein fester Punkt $\mathfrak{t}$, eine feste Gerade t_1 und eine der Stellung nach unveränderliche Ebene $\varkappa$ (und gleichzeitig die mit ihr symmetrische Stellung $\varkappa_1$ in Bezug auf die Gerade t_1) gegeben sind, so ist der Ort eines Punktes $\mathfrak{x}$, dessen Abstand von dem festen Punkte $\mathfrak{t}$ zu seinem Abstand von demjenigen Punkte $\mathfrak{x}_1$, in welchem eine durch $\mathfrak{x}$ zu der gegebenen Stellung parallele Ebene die feste Gerade t_1 trifft, in einem konstanten gegebenen Verhältnisse steht:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1} = \text{konst.},$$

eine Oberfläche 2. O. $F^{(2)}$.*) Der feste Punkt $\mathfrak{t}$ liegt auf einem der Fokalkegelschnitte der Fläche $F^{(2)}$ und zwar auf einem solchen, der nicht die Kreispunkte der Fläche enthält, die feste Gerade t_1 steht rechtwinklig auf der Ebene dieses Fokalkegelschnitts in demjenigen Punkte $\mathfrak{t}_1$, welcher der Pol der Tangente des Fokalkegelschnitts im Punkte $\mathfrak{t}$ ist in Bezug auf den in derselben Ebene liegenden Hauptkegelschnitt, und die beiden festen Stellungen sind diejenigen der Kreisschnittebenen der Fläche $F^{(2)}$.

Die Konstante des Verhältnisses, welche für beide gegen t_1 gleich geneigten Ebenen der Kreisschnitte denselben Wert hat, läſst sich noch näher bestimmen dadurch, daſs wir durch den Punkt $\mathfrak{t}$ und die Gerade t_1 eine Ebene legen; dieselbe schneidet die Fläche $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitt, für welchen, wie wir gesehen haben, $\mathfrak{t}$ ein Brennpunkt und t_1 die Polare desselben, d. h. die zugehörige Leitlinie ist. Für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ dieses Kegelschnitts ist bekanntlich das Verhältnis seiner Abstände von $\mathfrak{t}$ und von t_1 unveränderlich.

Bezeichnen wir dies konstante Verhältnis durch λ und den gesuchten Wert der ursprünglichen Konstante durch μ, so läſst sich μ leicht durch λ ausdrücken. Nennen wir n die Normale im Punkte $\mathfrak{t}$ des Fokalkegelschnitts, d. h. eine

*) Mac-Cullagh: Proceedings of the R. Irish Acad. Bd. II. p. 446.

Hauptaxe des Kegelschnitts, in welchem die Ebene $[t t_1]$ die $F^{(2)}$ schneidet, und s die Schnittlinie der Ebene $[t t_1]$ mit einer Kreisschnittebene, so wird

$$\mu = \lambda \cdot \cos(n, s)$$

sein. Fügen wir noch die Durchschnittslinie r der Ebene des Fokalkegelschnitts mit der Kreisschnittebene hinzu, so bilden die drei Richtungen $n\ s\ r$, nach dem Mittelpunkt der Fläche parallel verschoben, ein Dreikant, bei welchem

$[r n]$, die Ebene des Fokalkegelschnitts, und

$[n s]$, parallel der Ebene $[t t_1]$,

auf einander rechtwinklig stehen, d. h. es ist der Neigungswinkel:

$$([n r], [n s]) = 90^0,$$

ferner:

$[r s]$ parallel einer Kreisschnittebene,

also der Neigungswinkel $([r n], [r s]) = \varphi$ derjenige, welchen die Kreisebene mit der Ebene des Fokalkegelschnitts bildet.

Hiernach gilt die Relation:

$$\operatorname{tg}(n, s) = \sin(r, n) \,.\, \operatorname{tg}\varphi,$$

und wir erhalten:

$$\lambda^2 = \mu^2 \,.\, \left\{\frac{\sin^2(r, n) + \cos^2(r, n)\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right\}.$$

Setzen wir jetzt, um die Begriffe zu fixieren, den Fall des Ellipsoids voraus, so ist (S. 614):

$$\cos^2\varphi = \frac{P_a(P_b - P_c)}{P_b(P_a - P_c)};$$

ferner ist r die b-Axe der Fläche $F^{(2)}$ und n ein Durchmesser der Fläche in der $[ab]$-Ebene parallel der Geraden $|t t_1|$, den wir mit d bezeichnen wollen, also:

$$(r, n) = 90^0 - (d, a).$$

Wir erhalten daher:

$$\lambda^2 = \mu^2 \,.\, \left\{\frac{P_b(P_a - P_c)\cos^2(d, a) + P_a(P_b - P_c)\sin^2(d, a)}{P_a(P_b - P_c)}\right\}$$

$$= \mu^2 \cdot \frac{P_b P_c}{P_b - P_c}\left\{\frac{1}{P_c} - \frac{\cos^2(d, a)}{P_a} - \frac{\sin^2(d, a)}{P_b}\right\}.$$

Bezeichnen wir nun mit P_d die Potenz der Punktinvolution auf dem Durchmesser d, so ist bekanntlich (S. 521):

$$\frac{1}{P_d} = \frac{\cos^2(d, a)}{P_a} + \frac{\sin^2(d, a)}{P_b},$$

also:

$$\lambda^2 = \mu^2 \cdot \frac{P_b(P_d - P_c)}{P_d(P_b - P_c)}.$$

Das Abstandsverhältnis λ für den Kegelschnitt, in welchem die Ebene $[t t_1]$ die $F^{(2)}$ schneidet, ist bekanntlich nur abhängig von dem Verhältnis der Hauptaxen dieses Kegelschnitts, und die durch den Mittelpunkt der $F^{(2)}$ parallel zur Ebene $[t t_1]$ gelegte Ebene schneidet die $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitt, welcher dasselbe Axenverhältnis hat. Diese Axen sind der Durchmesser d und die Hauptaxe c, folglich ist:

$$\lambda^2 = \frac{P_d - P_c}{P_d},$$

und demnach erhalten wir für unsere Konstante den Wert:

$$\mu^2 = \frac{P_b - P_c}{P_b},$$

d. h.: Der konstante Wert μ ist unabhängig von der Wahl des Punktes t auf dem betrachteten Fokalkegelschnitt.

Die gleiche Rechnung liefert beim zweischaligen Hyperboloid, wo der betrachtete Fokalkegelschnitt in der $[ac]$-Ebene liegt und die Kreisebene durch die c-Axe geht, den Wert der Konstanten:

$$\mu^2 = \frac{P_c - P_b}{P_c},$$

wie wir aus der bloſsen Vertauschung der b- und c-Axe erkennen.

Beim einschaligen Hyperboloid dagegen, wo die Kreisebene durch die a-Axe geht, erhalten wir:

1) wenn der Fokalkegelschnitt $(E^{(2)}_{ab})$ in der $[ab]$-Ebene liegt, den Wert der Konstanten:

$$\mu^2 = \frac{P_a - P_c}{P_a};$$

2) wenn der Fokalkegelschnitt $(H^{(2)}_{ac})$ in der $[ac]$-Ebene liegt, den Wert der Konstanten:

$$\mu^2 = \frac{P_a - P_b}{P_a}.$$

Für den Fall des **elliptischen Paraboloids** läfst uns die vorige Betrachtung im Stich, weil der Mittelpunkt desselben im Unendlichen liegt; die zu betrachtende Fokalparabel $(P^{(2)}_{ac^\infty})$ liegt hier in der $[ac^\infty]$-Ebene, und wir haben (S. 623):

$$\cos^2\varphi = \frac{c-b}{c},$$

wo c und b die Abstände der Brennpunkte $\mathfrak{f}_c$ und $\mathfrak{f}_b$ in den beiden Hauptparabeln von dem Scheitel des Paraboloids bezeichnen, und $c > b$ ist. Eine Kreisebene des elliptischen Paraboloids schneidet die Ebene der Fokalparabel $(P^{(2)}_{ac^\infty})$ in einer Geraden r, welche auf der Parabelaxe a senkrecht steht, also ist:

$$(r, n) = 90^0 - (n, a),$$

und wir erhalten:

$$\lambda^2 = \mu^2 . \left\{\frac{c - b\sin^2(n, a)}{c-b}\right\}.$$

Um das Abstandsverhältnis λ zu bestimmen, legen wir durch den Brennpunkt $\mathfrak{f}_c$ eine Ebene parallel zur Ebene $[\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1]$; beide Ebenen schneiden die $F^{(2)}$ in ähnlichen Kegelschnitten, welche dasselbe Axenverhältnis, also auch denselben Wert von λ haben. Diese Kegelschnitte sind Ellipsen; für diejenige Ellipse, welche in der durch $\mathfrak{f}_c$ parallel zur Ebene $[\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1]$ gelegten Ebene enthalten ist, wird die Schnittlinie dieser Ebene mit der Ebene der Fokalparabel eine Hauptaxe sein, welche der Leitlinie der Hauptparabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac^\infty}$ in $\mathfrak{q}$ begegnen möge (Fig. 41), der Parabel selbst in dem Punktepaare $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$, deren Mitte $\mathfrak{m}$ der Mittelpunkt der betrachteten Ellipse ist.

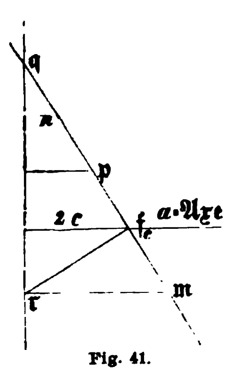


Fig. 41.

Fällen wir aus $\mathfrak{m}$ das Perpendikel $\mathfrak{m}\mathfrak{r}$ auf die Leitlinie, so folgt aus bekannten Parabeleigenschaften:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{r}; \qquad \frac{2c}{\mathfrak{m}\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{q}\mathfrak{f}_c}{\mathfrak{q}\mathfrak{m}} = \sin^2(n, a).$$

Die in den Punkten $\mathfrak{f}_c$ und $\mathfrak{m}$ auf der Ebene der Parabel errichteten Perpendikel treffen das Paraboloid in Punkten

der betrachteten Durchschnittsellipse, und die Quadrate dieser parallelen Sehnen verhalten sich wie $\frac{\mathfrak{q}\mathfrak{f}_c}{\mathfrak{q}\mathfrak{m}} = \sin^2(n, a)$; das in $\mathfrak{m}$ errichtete Perpendikel ist aber die zweite Axe dieser Ellipse; bezeichnen wir mit 2α und 2β die Hauptaxen derselben, so ist:

$$\alpha = \frac{2c}{\sin^2(n, a)},$$

und da das in $\mathfrak{f}_c$ errichtete Perpendikel leicht bestimmt wird durch die Hauptparabel $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$ (nämlich sein Quadrat ist $4bc$), so folgt:

$$\beta^2 = \frac{4bc}{\sin^2(n, a)},$$

und demnach:

$$\lambda^2 = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{b}{c}\sin^2(n, a)$$
$$= \frac{c - b \,.\, \sin^2(n, a)}{c},$$

und daraus folgt dann der Wert unserer Konstanten:

$$\mu^2 = \frac{c - b}{c},$$

ebenfalls unabhängig von der Wahl des Punktes $\mathfrak{t}$ auf der Fokalparabel.

Es bleibt jetzt noch übrig die Untersuchung des hyperbolischen Paraboloids, welches im Vorigen ausgeschlossen war.

Das hyperbolische Paraboloid läfst nämlich überhaupt keine ebenen Schnitte zu, welche eigentliche Kreise sind; an deren Stelle treten vielmehr solche, die in Linienpaare zerfallen, von denen je ein Teil eine unendlich-entfernte Gerade ist; ein solches besonderes Linienpaar kann in gewissem Sinne als ein degenerierter Kreis (mit unendlich-grofsem Radius) aufgefafst werden. Nennen wir (S. 211) die beiden unendlich-entfernten Geraden l^∞ und g^∞ auf dem hyperbolischen Paraboloid, so schneiden alle Ebenen, durch l^∞ gelegt, dasselbe in den Geraden g^x der einen Regelschar, und alle durch g^∞ gelegten Ebenen in den Geraden l^x der andern Regelschar. Diese beiden Büschel von Parallelebenen sind gleich geneigt zu den beiden Hauptebenen des Para-

boloids, deren Stellungen die Neigungswinkel zwischen den Stellungen jener Parallelebenen halbieren.

Nehmen wir auf einer der beiden Fokalparabeln (S. 585) einen beliebigen Punkt $\mathfrak{t}$ an und ziehen in demselben die Tangente t der Fokalparabel, so ist t die Axe einer orthogonalen Ebeneninvolution, welche ihr in dem räumlichen Polarsystem zugehört, dessen Kern das Paraboloid ist. Die Gerade t ist zugleich die Trägerin einer elliptischen Punktinvolution, weil sie die Hauptparabel in derselben Hauptebene, in welcher die betrachtete Fokalparabel liegt, nicht treffen kann; denn die mit der Hauptparabel konfokale Fokalparabel liegt ganz aufserhalb derselben. Die zu t konjugierte Gerade t_1 mufs daher auch die Trägerin einer elliptischen Punktinvolution sein. Wir erhalten t_1, indem wir von der Geraden t den Pol $\mathfrak{t}_1$ aufsuchen in Bezug auf die Hauptparabel und in $\mathfrak{t}_1$ ein Perpendikel auf der betrachteten Hauptebene errichten; t und t_1 sind also rechtwinklig zu einander gerichtet und ihr kürzester Abstand ist $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1$. Die Potenz der elliptischen Punktinvolution auf t_1 ist aber $= -(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)^2$, weil $\mathfrak{t}_1$ der Mittelpunkt derselben ist, und die zu t zugehörige Ebeneninvolution eine orthogonale ist, wie bereits oben ausgeführt wurde.

Legen wir nun duch l^∞ eine beliebige Ebene, welche das Paraboloid aufser in l^∞ in einer Geraden g schneidet, der Geraden t_1 aber in dem Punkte $\mathfrak{x}_1$ begegnet, so wird die Polare des Punktes $\mathfrak{x}_1$ in Bezug auf den aus dem Linienpaar l^∞ und g bestehenden Kegelschnitt dadurch erhalten, dafs wir in der Ebene $[l^\infty g]$ eine Parallele zu g ziehen, die in der andern Halbebene von g soweit absteht, wie $\mathfrak{x}_1$ in der einen Halbebene; nennen wir diese Gerade g', so erhalten wir g' dadurch, dafs wir aus $\mathfrak{x}_1$ das Perpendikel auf g fällen, dasselbe um sich selbst verlängern und durch den Endpunkt eine Parallele zu g ziehen. Diese Polare g' des Punktes $\mathfrak{x}_1$ mufs offenbar in der Polarebene des Punktes $\mathfrak{x}_1$ liegen; also, da $\mathfrak{x}_1$ auf t_1 liegt, und daher diese Polarebene durch t gehen mufs, so wird g' in derjenigen durch t gelegten Ebene sich befinden, welche normal ist auf der Ebene $[t\mathfrak{x}_1]$, denn die der Geraden t zugehörige Ebeneninvolution ist eine orthogonale.

Wir haben also folgende räumliche Figur: Durch eine Gerade t geht eine Ebene $[t\mathfrak{x}_1]$ und eine zweite zu ihr rechtwinklige Ebene; in dieser ist enthalten eine Gerade g' und in der Ebene $[g'\mathfrak{x}_1]$ ist eine Gerade g enthalten, die zu g' parallel ist und ebenso weit absteht von g', wie von dem Punkte $\mathfrak{x}_1$; folglich mufs g in einer Ebene liegen, die gleichfalls rechtwinklig ist zur Ebene $[t\mathfrak{x}_1]$ und gleich weit absteht von dem Punkte $\mathfrak{x}_1$ und der Geraden t; da aber das aus $\mathfrak{x}_1$ auf t herabgelassene Perpendikel zum Fufspunkte den oben genannten Punkt $\mathfrak{t}$ hat (weil t und t_1 selbst zu einander rechtwinklig gerichtet sind und ihre kürzeste Entfernung $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1$ ist), so werden alle Punkte der zuletzt konstruierten Ebene von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{t}$ gleich weit abstehen, folglich auch alle Punkte der Geraden g, die in ihr liegt, d. h. das Verhältnis der Abstände irgend eines Punktes $\mathfrak{x}$ der Geraden g von den Punkten $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{x}_1$ ist:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1} = 1.$$

Was wir hierdurch für die beliebige Erzeugende g der einen Regelschar des Paraboloids nachgewiesen haben, gilt natürlich ebenso für alle andern Erzeugenden derselben und in gleicher Weise für sämtliche Erzeugende der andern Regelschar, die wir erhalten, wenn wir das Büschel von Parallelebenen durch g^∞ legen; es gilt also überhaupt für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ des hyperbolischen Paraboloids, und wir haben daher folgenden Satz:

Wenn ein fester Punkt $\mathfrak{t}$, eine feste Gerade t_1 und eine der Stellung nach unveränderliche Ebene $\varkappa$ (sowie die mit ihr symmetrische Stellung $\varkappa_1$ in Bezug auf die Gerade t_1) gegeben sind, so ist der Ort eines Punktes $\mathfrak{x}$, dessen Abstand von dem festen Punkte $\mathfrak{t}$ gleich ist seinem Abstand von demjenigen Punkte $\mathfrak{x}_1$, in welchem eine durch $\mathfrak{x}$ zu der gegebenen Stellung parallele Ebene die feste Gerade t_1 trifft, d. h.

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1} = 1$$

ein hyperbolisches Paraboloid. Der feste Punkt $\mathfrak{t}$ ist dabei ein beliebiger Punkt einer der beiden Fokalparabeln

des Paraboloids, die feste Gerade t_1 steht rechtwinklig auf der Ebene dieser Fokalparabel in demjenigen Punkte $\mathfrak{t}_1$, welcher der Pol der Tangente der Fokalparabel im Punkte $\mathfrak{t}$ ist in Bezug auf die in derselben Ebene liegende Hauptparabel, und die beiden festen Stellungen sind diejenigen, welche durch die beiden unendlich-entfernten Geraden l^∞ und g^∞ des hyperbolischen Paraboloids bestimmt werden. Wir finden also diese Eigenschaft des konstanten Abstandsverhältnisses auch für das hyperbolische Paraboloid bestätigt.

Bezeichnen wir den Wert dieses konstanten Abstandsverhältnisses, welchen Mac-Cullagh den „Modul" für diese Erzeugungsart der Fläche $F^{(2)}$ nennt, durch μ, einen Wert, welcher unabhängig ist von der Wahl des Punktes $\mathfrak{t}$ auf dem Fokalkegelschnitt, so ergiebt sich hieraus leicht eine neue Erzeugungsart der Fläche*), indem wir drei beliebige Punkte $\mathfrak{t}\mathfrak{t}'\mathfrak{t}''$ der betrachteten Fokalkurve, ihre Tangenten $tt't''$ und die zu ihnen konjugierten Strahlen $t_1t_1't_1''$ nehmen, welche letztere auf der Ebene des Fokalkegelschnitts rechtwinklig stehen, also die Kanten eines geraden dreiseitigen Prismas bilden.

Dann ist für irgend einen Punkt $\mathfrak{x}$ der Fläche $F^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}\mathfrak{t} &= \mu \,.\, \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}\mathfrak{t}' &= \mu \,.\, \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1' \\ \mathfrak{x}\mathfrak{t}'' &= \mu \,.\, \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1'', \end{aligned}$$

und es bedeuten $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1'\mathfrak{x}_1''$ diejenigen drei Punkte, in welchen die durch $\mathfrak{x}$ zu einer der Kreisebenen parallel gelegte Ebene die drei Kanten $t_1t_1't_1''$ des eben erwähnten Prismas schneidet; wie sich nun auch die Transversalebene parallel einer der Kreisebenen verschieben mag, immer wird sie aus dem festen Prisma ein Dreieck $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1'\mathfrak{x}_1''$ von unveränderter Gestalt und Gröſse ausschneiden, also ein Dreieck, welches wir uns ein für alle Mal in einer beliebigen Ebene ε festlegen können; der Punkt $\mathfrak{x}$ liegt dann in dieser Ebene auf einem bestimmten Kreise. Wir können uns nun eine dieser ganzen Figur ähnliche Figur denken, indem wir alle linearen Dimensionen der-

*) Wie Townsend, Cambridge and Dublin Math. Journ. Bd. III, p. 154, gezeigt hat.

selben in dem Verhältnisse $\mu : 1$ verändern; dadurch erhalten wir ein dem festen Dreieck $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_1' \mathfrak{x}_1''$ ähnliches Dreieck $\mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_1''$ und einen auf einem Kreise liegenden veränderlichen Punkt $\mathfrak{y}$, für welchen:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{t} = \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$$
$$\mathfrak{x}\mathfrak{t}' = \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1'$$
$$\mathfrak{x}\mathfrak{t}'' = \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1''$$

ist. Verändern wir jetzt die der Kreisebene parallel gelegte Ebene kontinuierlich, so bleibt das Dreieck $\mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_1''$ in der Ebene ε unverändert, während der Kreis, den $\mathfrak{y}$ durchläuft, sich kontinuierlich verändert und ein gewisses Stück der Ebene ε bedeckt. Die Punkte $\mathfrak{x}$ der Fläche $F^{(2)}$ werden dadurch auf die Punkte $\mathfrak{y}$ der Ebene ε abgebildet, und wir erhalten umgekehrt die von Jacobi*) angegebene Konstruktion der $F^{(2)}$:

Werden im Raume drei feste Punkte $\mathfrak{t}\ \mathfrak{t}'\ \mathfrak{t}''$ und irgend drei andere jenen beziehlich entsprechende feste Punkte $\mathfrak{y}_1\ \mathfrak{y}_1'\ \mathfrak{y}_1''$ in einer Ebene ε angenommen, verändert man einen Punkt $\mathfrak{y}$ in dieser Ebene und bestimmt einen ihm entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}$ im Raume so, dafs die Entfernungen

$$\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{t}\mathfrak{x}; \quad \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1' = \mathfrak{t}'\mathfrak{x}; \quad \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1'' = \mathfrak{t}''\mathfrak{x}$$

werden, dann wird der Punkt $\mathfrak{x}$ eine Oberfläche zweiter Ordnung beschreiben, für welche $\mathfrak{t}\mathfrak{t}'\mathfrak{t}'$ drei Punkte eines Fokalkegelschnitts sind.

Diese Konstruktion enthält in gewisser Hinsicht eine Ausdehnung der bekannten Brennpunktseigenschaft des Kegelschnitts auf den Raum; denn nimmt man ein festes Punktepaar $\mathfrak{t}\mathfrak{t}'$ und ein zweites Punktepaar $\mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_1'$ und verändert auf der Verbindungslinie $|\mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_1'|$ einen Punkt $\mathfrak{y}$, so ist für diesen Punkt immer

$$\mathfrak{y}_1\mathfrak{y} + \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1' = \text{konst.}$$

läfst man aber dem Punkte $\mathfrak{y}$ einen Punkt $\mathfrak{x}$ derart entsprechen, dafs die Entfernungen

$$\mathfrak{x}\mathfrak{t} = \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1; \quad \mathfrak{x}\mathfrak{t}' = \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1'$$

*) C. G. J. Jacobi: Geometrische Sätze, Crelle's Journ Bd. XII, S. 139, und: „Geometrische Theoreme" aus dem Nachlafs Jacobi's mitgeteilt durch O. Hermes, sowie dessen Ausführungen in Borchardt's Journ. Bd. 73, S. 179 u. 209.

werden, dann ist offenbar der Ort des Punktes $\mathfrak{x}$ ein Kegelschnitt, für welchen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$ die Brennpunkte und die Entfernung $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_1'$ die konstante Summe oder Differenz der Radienvektoren ist; die Punkte zwischen $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_1'$ auf der geraden Linie, welche sie verbindet, werden sich daher in eine Ellipse, die Punkte aufserhalb $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_1'$ in eine Hyperbel abbilden. Von dieser Auffassung ist die Jacobi'sche Konstruktion die unmittelbare Erweiterung.

§ 68. Die Salmon'sche Erzeugungsart der Fläche 2. O.

Die Betrachtung eines solchen Fokalkegelschnitts, auf dessen Ebene die Stellungen der Kreisschnittebenen normal stehen, führt zu einer ähnlichen metrischen Eigenschaft der Fläche zweiter Ordnung, wie die im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte. Ein solcher Fokalkegelschnitt enthält die Kreispunkte der Fläche $F^{(2)}$ und kann daher nur auftreten bei denjenigen Flächen $F^{(2)}$, welche keine geraden Linien enthalten; er ist nämlich beim Ellipsoid die Hyperbel $H_{ac}^{(2)}$ (S. 572), beim zweischaligen Hyperboloid die Ellipse $E_{ab}^{(2)}$ und beim elliptischen Paraboloid die Parabel $P_{ab\infty}^{(2)}$ (S. 589). Fassen wir zunächst die Mittelpunktsflächen ins Auge, so haben wir zu betrachten

1) beim Ellipsoid: die $[ac]$-Ebene mit dem Hauptkegelschnitt $\mathfrak{E}_{ac}^{(2)}$ und dem Fokalkegelschnitt $H_{ac}^{(2)}$, zwei konfokale Kegelschnitte, die sich in den vier reellen Kreispunkten des Ellipsoids schneiden; die Ebenen der Kreisschnitte stehen normal auf der $[ac]$-Ebene, weil sie die Richtung der b-Axe enthalten;

2) beim zweischaligen Hyperboloid die $[ab]$-Ebene mit dem Hauptkegelschnitt $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$ und dem Fokalkegelschnitt $E_{ab}^{(2)}$, die ebenfalls konfokal sind, in den reellen Kreispunkten der Fläche sich durchkreuzen, und auf deren Ebene die Ebenen der Kreisschnitte normal stehen, weil diese die Richtung der c-Axe enthalten.

Zwei konfokale Kegelschnitte, welche sich in reellen Punkten durchkreuzen, besitzen immer die Eigenschaft, dafs jede Tangente des einen den andern in einem reellen Punktepaar trifft. Denn seien die gemeinschaftlichen Brennpunkte

beider Kegelschnitte, von denen einer Ellipse, der andere Hyperbel ist, die Punkte $\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}'$, so liegen auf dieser Hauptaxe $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$ die Scheitel der Ellipse $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$ aufserhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$, die Scheitel der Hyperbel $\mathfrak{h}\mathfrak{h}'$ innerhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$; die Tangenten der Ellipse treffen also nur die Stücke von $\mathfrak{e}$ bis ∞ und von ∞ bis $\mathfrak{e}'$, die Tangenten der Hyperbel aber nur die Punkte zwischen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$; da die Punkte zwischen $\mathfrak{h}\mathfrak{h}'$ innerhalb $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$, also a fortiori innerhalb der Ellipse liegen, und jede Gerade durch einen Punkt innerhalb eines Kegelschnitts denselben in einem reellen Punktepaar schneidet, so mufs jede Tangente der Hyperbel die Ellipse in reellen Punktepaaren schneiden; da ebenso die Punkte von $\mathfrak{e}$ bis ∞ und von ∞ bis $\mathfrak{e}'$ innerhalb der Hyperbel liegen, so mufs jede Tangente der Ellipse die Hyperbel in reellen Punktepaaren treffen; das Gleiche gilt für zwei konfokale Parabeln, deren Scheitel durch den gemeinschaftlichen Brennpunkt getrennt werden, wie unmittelbar einleuchtet.

Sei nun, wie früher, $\mathfrak{t}$ ein beliebiger Punkt des betrachteten Fokalkegelschnitts, t seine Tangente, und t_1 der zu ihr konjugierte Strahl in Bezug auf die Fläche $F^{(2)}$, dann wird t_1 erhalten, indem wir den Pol $\mathfrak{t}_1$ der Geraden t aufsuchen in Bezug auf den Hauptkegelschnitt in der betrachteten Hauptebene und in dem Punkte $\mathfrak{t}_1$ die Normale t auf dieser Hauptebene errichten. Da t den Hauptkegelschnitt in reellen Punkten trifft, so ist t der Träger einer zugehörigen hyperbolischen Punktinvolution, und da t gleichzeitig, wie wir wissen, die Axe einer zugehörigen orthogonalen Ebeneninvolution ist, so ist die dem konjugierten Strahle t_1 zugehörige Punktinvolution eine elliptische; ihre Potenz ist $= -(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)^2$, und $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1$ ist der kürzeste Abstand zwischen den Strahlen t und t_1. Da die Punktinvolutionen auf den konjugierten Strahlen t und t_1 verschiedenartig sind, so kann die Fläche $F^{(2)}$ keine geradlinige sein, wie wir schon vorhin erkannt haben.

Die Stellungen der beiden Kreisschnittebenen, welche rechtwinklig sind zur Ebene des betrachteten Fokalkegelschnitts, enthalten die Richtung der Geraden t_1, die ebenfalls normal auf dieser Ebene steht; legen wir daher durch t_1 zwei Ebenen ε und ε' parallel zu den Stellungen der Kreisebenen,

so schneiden diese die betrachtete Hauptebene in zwei Geraden l und l', die sich in $\mathfrak{t}_1$ schneiden; es ist leicht, die Punktinvolutionen auf l und l' und deren Potenzen zu ermitteln. Die Ebene ε schneidet nämlich die $F^{(2)}$ in einem (imaginären) Kreise, für welchen l ein Durchmesser ist; sei $\mathfrak{m}$ der Mittelpunkt dieses Kreises und schneide t, die Polare von $\mathfrak{t}_1$, die Gerade l im Punkte $\mathfrak{s}$ (Fig. 42), so wird die Potenz der Punktinvolution auf l (oder das Quadrat des Radius des Durchschnittskreises) sein:

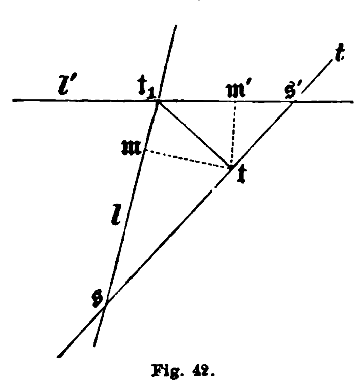


Fig. 42.

$$P_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{t}_1,$$

die Potenz der Punktinvolution auf t_1 ist aber $-(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)^2$, und es verhält sich bekanntlich:

$$\frac{P_{\mathfrak{m}}}{P_{\mathfrak{t}_1}} = \frac{\mathfrak{s}\mathfrak{m}}{\mathfrak{s}\mathfrak{t}_1} = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{t}_1}{-(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)^2},$$

also folgt:

$$\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1^2 = \mathfrak{t}_1\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{t}_1\mathfrak{s},$$

woraus hervorgeht, dafs $\mathfrak{m}$ der Fufspunkt des aus $\mathfrak{t}$ auf die Gerade l herabgelassenen Perpendikels sein mufs, weil der Winkel $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}\mathfrak{s} = 90^0$ ist; mithin haben wir:

$$P_{\mathfrak{m}} = -(\mathfrak{m}\mathfrak{t})^2;$$

die Punktinvolution auf l ist also eine elliptische und der Durchschnittskreis der Ebene ε mit $F^{(2)}$ imaginär; ferner erhalten wir, wenn wir die dem Strahle l zugehörige Punktinvolution mit $\mathfrak{t}$ verbinden, eine orthogonale Strahleninvolution, weil zwei Strahlenpaare derselben, nämlich $|\mathfrak{t}\mathfrak{m}|$ und der Parallelstrahl zu l, $|\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{s}|$ Paare rechtwinkliger Strahlen sind. Dasselbe gilt für die Gerade l'; aber wir können noch mehr behaupten: Die Ebenen ε und ε' sind die Träger ebener Polarsysteme (deren Kernkurven imaginäre Kreise sind) und befinden sich in solcher Lage, dafs ihre Perspektive von dem Punkte $\mathfrak{t}$ aus ein orthogonales Polarbündel liefert. Denn sei g eine beliebige Gerade in der Ebene ε, welche die $F^{(2)}$ in

einem imaginären Kreise schneidet, dann wird der Pol $\mathfrak{p}$ von g in Bezug auf diesen Kreis dadurch gefunden, dafs wir aus $\mathfrak{m}$ das Perpendikel $\mathfrak{mq}$ auf g herablassen und auf demselben den Punkt $\mathfrak{p}$ so bestimmen, dafs

$$\mathfrak{mp} \cdot \mathfrak{mq} + \mathfrak{mt}^2 = 0$$

wird. Da nun $|\mathfrak{tm}|$ eine Normale der Ebene ε ist, so ist $|\mathfrak{mt}|$ normal auf $|\mathfrak{pq}|$, folglich wegen der eben gefundenen Relation $\angle \mathfrak{ptq} = 90^0$. Die Ebene $[\mathfrak{ptq}]$ ist normal auf der Ebene ε, weil sie durch ihre Normale $|\mathfrak{tm}|$ geht, und auf der Schnittlinie $|\mathfrak{pq}|$ beider Ebenen steht im Punkte $\mathfrak{q}$ die Gerade g normal, welche in der Ebene ε liegt, folglich ist g auch Normale der Ebene $[\mathfrak{ptq}]$; mithin ist auch die Ebene $[\mathfrak{t}g]$ normal zur Ebene $[\mathfrak{ptq}]$. Da aber auf der Schnittlinie $|\mathfrak{tq}|$ dieser beiden Ebenen die Gerade $|\mathfrak{tp}|$ normal steht (weil $\angle \mathfrak{ptq} = 90^0$ ist), so ist $|\mathfrak{tp}|$ auch Normale der Ebene $[\mathfrak{t}g]$, d. h. wenn wir den Punkt $\mathfrak{t}$ mit der Geraden g und ihrem Pol $\mathfrak{p}$ durch Ebene und Strahl verbinden, so ist der Strahl auf der Ebene allemal rechtwinklig; das Polarbündel, welches von $\mathfrak{t}$ aus perspektivisch gelegt wird mit dem ebenen Polarsystem der Ebene ε, ist also notwendig ein orthogonales; dasselbe gilt natürlich auch von der Ebene ε'.

In der der Betrachtung zu Grunde liegenden Hauptebene haben wir also den Hauptkegelschnitt und zwei Gerade l und l' als Träger zugehöriger elliptischer Punktinvolutionen, die mit dem Punkte $\mathfrak{t}$ verbunden eine orthogonale Strahleninvolution liefern. Eine solche ebene Figur bietet eine gewisse metrische Eigenschaft dar, von welcher wir hier Gebrauch machen. Der Punkt $\mathfrak{t}_1$, in welchem sich ll' schneiden, ist der Pol der Geraden t, der Tangente im Punkte $\mathfrak{t}$ des Fokalkegelschnitts, folglich mufs t die Pole von l und l' enthalten: wir haben ferner gesehen, dafs die Gerade t den Hauptkegelschnitt in zwei reellen Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ schneiden mufs; nehmen wir einen beliebigen dritten Punkt $\mathfrak{c}$ des Hauptkegelschnitts und ziehen die Strahlen $|\mathfrak{ca}|$, $|\mathfrak{cb}|$, so müssen dieselben nach bekannten Polareigenschaften des Kegelschnitts (Th. d. K. S. 149) sowohl der Geraden l in einem Punktepaar $\mathfrak{xy}$, als auch der Geraden l' in einem Punktepaar $\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'$ der zugehörigen Punktinvolution begegnen; bezeichnen wir:

$$(|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|, l) = \mathfrak{x}, \quad (|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|, l) = \mathfrak{y}, \quad (|\mathfrak{x}\mathfrak{x}'|, |\mathfrak{y}\mathfrak{y}'|) = \mathfrak{c};$$
$$(|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|, l') = \mathfrak{x}', \quad (|\mathfrak{c}\mathfrak{b}|, l') = \mathfrak{y}', \quad (|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|, |\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'|) = \mathfrak{t}_1;$$

da die beiden Punktepaare $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'$ konjugierte Punkte in Bezug auf den Hauptkegelschnitt sind, so folgt aus ihnen nach dem Hesse'schen Satze ein drittes Paar konjugierter Punkte:

$$(|\mathfrak{x}\mathfrak{x}'|, |\mathfrak{y}\mathfrak{y}'|) = \mathfrak{c}, \quad (|\mathfrak{x}\mathfrak{y}'|, |\mathfrak{x}'\mathfrak{y}|) = \mathfrak{d},$$

und da $\mathfrak{c}$ auf dem Kegelschnitt selbst liegt, so mufs $\mathfrak{d}$ auf der Tangente im Punkte $\mathfrak{c}$ liegen. Nun werden aber die Punktinvolutionen $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ auf l und $(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}')$ auf l' vom Punkte $\mathfrak{t}$ aus durch eine orthogonale Strahleninvolution projiziert; betrachten wir also das vollständige Vierseit, dessen drei Paare Gegenecken:

$$\mathfrak{x} \text{ und } \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{x}' \text{ und } \mathfrak{y}', \quad \mathfrak{c} \text{ und } \mathfrak{d}$$

sind, so werden die drei Strahlenpaare, welche von einem Punkte $\mathfrak{t}$ nach den Gegenecken dieses vollständigen Vierseits hingehen, und die immer einer Strahleninvolution angehören, in unserem Falle eine orthogonale Strahleninvolution bilden; also werden $|\mathfrak{t}\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{d}|$ zu einander rechtwinklig sein.

Betrachten wir andererseits, da

$$(|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|, |\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'|) = \mathfrak{t}_1, \quad (|\mathfrak{x}\mathfrak{y}'|, |\mathfrak{x}'\mathfrak{y}|) = \mathfrak{d}$$

ist, das vollständige Vierseit, welches gebildet wird von den drei Paar Gegenecken:

$$\mathfrak{x} \text{ und } \mathfrak{x}', \quad \mathfrak{y} \text{ und } \mathfrak{y}', \quad \mathfrak{t}_1 \text{ und } \mathfrak{d},$$

so werden auch die drei Strahlenpaare von $\mathfrak{t}$ nach den Gegenecken dieses Vierseits eine Strahleninvolution bilden; da aber die Strahlen $|\mathfrak{t}\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{y}|$ zu einander rechtwinklig sind, ebenso die Strahlen $|\mathfrak{t}\mathfrak{x}'|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{y}'|$, so müssen die Strahlenpaare $|\mathfrak{t}\mathfrak{x}|$, $|\mathfrak{t}\mathfrak{x}'|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{y}|$, $|\mathfrak{t}\mathfrak{y}'|$ eine gleichseitig-hyperbolische Strahleninvolution bilden, welcher auch das Strahlenpaar $|\mathfrak{t}\mathfrak{d}|$, $|\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1|$ angehört, und da auf diesen bez. die Strahlen $|\mathfrak{t}\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{a}|$ $(= t)$ normal stehen, so gehören auch $|\mathfrak{t}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{t}\mathfrak{c}|$ der gleichseitig-hyperbolischen Strahleninvolution an.

Wir haben also auf der Geraden $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$ die beiden Punktepaare $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, welche mit $\mathfrak{t}$ verbunden eine gleichseitig-hyperbolische Strahleninvolution geben, auf dieser Geraden selbst also eine hyperbolische Punktinvolution, von der $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$

zwei Punktepaare sind; nennen wir einen Doppelpunkt derselben $\mathfrak{g}$, so gilt die involutorische Relation (Th. d. K. S. 55):

$$\frac{\mathfrak{ag}^2}{\mathfrak{cg}^2} = \frac{\mathfrak{ar}.\mathfrak{ar}'}{\mathfrak{cr}.\mathfrak{cr}'},$$

und da $|\mathfrak{tg}|$ eine Winkelhalbierende zwischen dem Strahlenpaar $|\mathfrak{ta}|$ und $|\mathfrak{tc}|$ sein mufs, also

$$\frac{\mathfrak{ag}}{\mathfrak{cg}} = \frac{\mathfrak{at}}{\mathfrak{ct}}$$

ist, auch die Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{at}^2}{\mathfrak{ct}^2} = \frac{\mathfrak{ar}\ \mathfrak{ar}'}{\mathfrak{cr}.\mathfrak{cr}'};$$

das Verhältnis $\frac{\mathfrak{ar}}{\mathfrak{cr}}$ können wir auch ersetzen durch das Verhältnis der Abstände der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ von der Geraden l und in gleicher Weise das Verhältnis $\frac{\mathfrak{ar}'}{\mathfrak{cr}'}$ durch das Verhältnis der Abstände der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ von der Geraden l'; nennen wir also

den Abstand des Punktes $\mathfrak{a}$ von der Geraden l . . . $\mathfrak{ap}$
" " " " $\mathfrak{a}$ " " " l' . . . $\mathfrak{ap}'$
" " " " $\mathfrak{c}$ " " " l . . . $\mathfrak{cr}$
" " " " $\mathfrak{c}$ " " " l' . . . $\mathfrak{cr}'$,

so erhalten wir:

$$\frac{\mathfrak{at}^2}{\mathfrak{ap}.\mathfrak{ap}'} = \frac{\mathfrak{ct}^2}{\mathfrak{cr}.\mathfrak{cr}'},$$

und wenn wir jetzt den auf dem Hauptkegelschnitt willkürlich gewählten Punkt $\mathfrak{c}$ beliebig verändern, so folgt:

$$\frac{\mathfrak{ct}^2}{\mathfrak{cr}.\mathfrak{cr}'} = \text{konst.},$$

d. h.: J e d e r P u n k t d e s K e g e l s c h n i t t s b e s i t z t d i e E i g e n s c h a f t, d a f s d a s Q u a d r a t s e i n e s A b s t a n d e s v o n d e m f e s t e n P u n k t e $\mathfrak{t}$ z u d e m R e c h t e c k a u s s e i n e n A b s t ä n d e n v o n d e n b e i d e n f e s t e n G e r a d e n l u n d l' i n e i n e m u n v e r ä n d e r l i c h e n V e r h ä l t n i s s t e h t.

Diese metrische Eigenschaft des ebenen Kegelschnitts in Bezug auf den Punkt $\mathfrak{t}$ und die beiden Geraden l und l' läfst sich auf den Raum übertragen und liefert eine Eigenschaft der Fläche $F^{(2)}$ in Bezug auf den festen Punkt $\mathfrak{t}$ und die beiden Ebenen ε und ε'.

Legen wir durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ der Fläche $F^{(2)}$ parallel einer der beiden Stellungen der Kreisschnittebenen, etwa parallel der Ebene ε eine Ebene, so schneidet dieselbe die $F^{(2)}$ in einem reellen Kreise, dessen Durchmesser $\mathfrak{mn}$ in der betrachteten Hauptebene liegen mufs, und da die Endpunkte $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}$ des Durchmessers auf dem Hauptkegelschnitt liegen, so haben wir die vorige Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{mt}^2}{\mathfrak{mm}^0 \cdot \mathfrak{mm}'} = \frac{\mathfrak{nt}^2}{\mathfrak{nn}^0 \cdot \mathfrak{nn}'},$$

wo $\mathfrak{mm}^0$, $\mathfrak{nn}^0$, $\mathfrak{mm}'$, $\mathfrak{nn}'$ die Perpendikel aus $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ auf die Geraden l und l', oder, was dasselbe ist, auf die Ebenen ε und ε' bedeuten, die auf der Ebene des Hauptschnitts normal stehen. Fällen wir aus $\mathfrak{x}$ das Perpendikel $\mathfrak{xp}$ auf den Durchmesser $\mathfrak{mn}$ des Kreises, so haben wir:

$$\mathfrak{xp}^2 = \mathfrak{mp} \cdot \mathfrak{pn}$$

und, da $|\mathfrak{px}|$ normal steht auf der Ebene des Hauptschnittes, in welcher der Punkt $\mathfrak{t}$ liegt,

$$\mathfrak{xt}^2 = \mathfrak{tp}^2 + \mathfrak{px}^2 = \mathfrak{tp}^2 + \mathfrak{mp} \cdot \mathfrak{pn}.$$

In dem Dreiecke $\mathfrak{tmn}$, dessen Grundlinie $\mathfrak{mn}$ den Punkt $\mathfrak{p}$ enthält (Fig. 43) haben wir die bekannte Relation:

Fig. 43.

$$\frac{\mathfrak{tp}^2}{\mathfrak{pm} \cdot \mathfrak{pn}} + \frac{\mathfrak{tm}^2}{\mathfrak{mp} \cdot \mathfrak{mn}} + \frac{\mathfrak{tn}^2}{\mathfrak{np} \cdot \mathfrak{nm}} = 1,$$

woraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{tp}^2 + \mathfrak{mp} \cdot \mathfrak{pn}}{\mathfrak{pm} \cdot \mathfrak{pn}} = \frac{\mathfrak{mt}^2}{\mathfrak{nm} \cdot \mathfrak{mp}} + \frac{\mathfrak{nt}^2}{\mathfrak{nm} \cdot \mathfrak{pn}},$$

also:

$$\frac{\mathfrak{tx}^2}{\mathfrak{pm} \cdot \mathfrak{pn}} = \frac{\mathfrak{mt}^2}{\mathfrak{mn} \cdot \mathfrak{pm}} + \frac{\mathfrak{nt}^2}{\mathfrak{mn} \cdot \mathfrak{np}};$$

hieraus folgt wegen der obigen Relation:

$$\frac{\mathfrak{mt}^2}{\mathfrak{mm}^0 \cdot \mathfrak{mm}'} = \frac{\mathfrak{nt}^2}{\mathfrak{nn}^0 \cdot \mathfrak{nn}'},$$

und, da wegen der Parallelität von $|\mathfrak{mn}|$ mit l

$$\mathfrak{mm}^0 = \mathfrak{nn}^0$$

ist, die Beziehung:

$$\mathfrak{xt}^2 = \frac{\mathfrak{mt}^2}{\mathfrak{mm}'} \left\{ \frac{\mathfrak{mm}' \cdot \mathfrak{pn} + \mathfrak{nn}' \cdot \mathfrak{mp}}{\mathfrak{mn}} \right\}.$$

Der Ausdruck in der letzten Parenthese ist aber einer einfachen Umformung fähig, wenn wir nämlich aus $\mathfrak{p}$ das Perpendikel $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ auf die Gerade l' fällen, so verhält sich (Fig. 44):

$$\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} = \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{n}' - \mathfrak{p}\mathfrak{p}'}{\mathfrak{n}\mathfrak{n}' - \mathfrak{m}\mathfrak{m}'},$$

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{p}' - \mathfrak{m}\mathfrak{m}'}{\mathfrak{n}\mathfrak{n}' - \mathfrak{m}\mathfrak{m}'},$$

woraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{p}\mathfrak{n} + \mathfrak{n}\mathfrak{n}' \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{p}}{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}',$$

und, da $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ gleich ist dem Perpendikel $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ aus $\mathfrak{x}$ auf die Ebene ε', zugleich auch das Perpendikel $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^0$ gleich ist dem

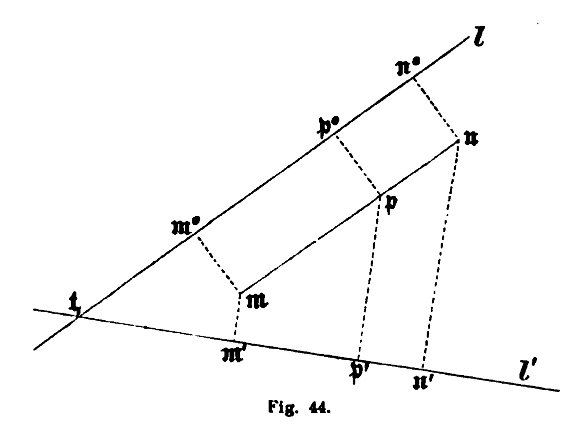


Fig. 44.

Perpendikel $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^0$ aus $\mathfrak{x}$ auf die, so folgt: Ebene ε

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}^0 \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{x}'} = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{t}^2}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}^0 \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{m}'} = \text{konst.}$$

Dieses Verhältnis behält nicht nur für alle Punkte $\mathfrak{x}$ des Kreises in der Transversalebene, welche zu ε parallel gelegt ist, denselben konstanten Wert, sondern auch für jeden andern Kreis auf der Fläche $F^{(2)}$, der in einer zu ε oder ε' parallelen Ebene liegt, weil das Verhältnis dasselbe bleibt für alle Punkte des Hauptkegelschnitts. Das Verhältnis bleibt also überhaupt konstant für alle Punkte der Fläche $F^{(2)}$, und wir können daher folgendes Resultat aussprechen*):

*) G. Salmon: Analytic Geometry of three Dimensions, IIIrd ed. 1874, p. 108.

Wenn ein fester Punkt t und zwei feste Ebenen $\varepsilon\varepsilon'$ gegeben sind, so ist der Ort eines Punktes $\mathfrak{x}$, für welchen das Quadrat seines Abstandes von dem festen Punkte t zu dem Rechteck aus seinen Abständen von den beiden festen Ebenen $\varepsilon\varepsilon'$ in einem gegebenen unveränderlichen Verhältnis steht, eine Oberfläche 2. O., und zwar kann diese keine geradlinige sein, also nur ein Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid oder ein elliptisches Paraboloid. Der Punkt t ist dabei ein beliebiger Punkt desjenigen Fokalkegelschnitts der Fläche $F^{(2)}$, welcher die Kreispunkte derselben enthält; die beiden festen Ebenen $\varepsilon\,\varepsilon'$ besitzen die Eigenschaft, daſs die ihnen zugehörigen ebenen Polarsysteme von t aus projiziert ein orthogonales Polarbündel in t liefern; ε und ε' sind parallel den beiden Stellungen der Kreisschnittebenen der $F^{(2)}$ und schneiden sich in derjenigen Geraden, welche normal steht auf der Ebene des Fokalkegelschnitts in einem Punkte $\mathfrak{t}_1$, dem Pole der Tangente t am Fokalkegelschnitt im Punkte t in Bezug auf den in derselben Ebene liegenden Hauptkegelschnitt.

Da unsere Betrachtung durchaus unabhängig war von der Lage des Mittelpunkts der Fläche $F^{(2)}$, so gilt sie unverändert für das elliptische Paraboloid, wie für die beiden Mittelpunktsflächen, die keine geraden Linien enthalten. Wir können aber die hier auftretende Konstante noch näher bestimmen und müssen dann allerdings trennen die Mittelpunktsflächen von dem Paraboloid.

Legen wir eine Ebene durch den Punkt t und die Gerade t_1, so wird dieselbe die Fläche $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitte schneiden, für den, wie wir wissen, t ein Brennpunkt und t_1 die Polare desselben, d. h. die zugehörige Leitlinie ist. Für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ dieses Kegelschnittes ist bekanntlich das Verhältnis seiner Abstände von t und t_1 konstant. Bezeichnen wir dieses konstante Verhältnis durch λ und den Wert der ursprünglichen Konstanten durch μ, so läſst sich μ leicht durch λ ausdrücken. Nennen wir n die Normale des Fokalkegelschnittes im Punkte t, und sei $\mathfrak{x}$ einer der beiden Schnittpunkte derselben mit dem Hauptkegelschnitte, so ist:

$$\mu = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{t}^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{t}_1^2 \,.\, \sin(n,l)\sin(n,l')}\,.$$

Es ist aber das Verhältnis:

$$\left(\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{t}}{\mathfrak{r}\mathfrak{t}_1}\right)^2 = \lambda^2,$$

und wir erhalten daher:

$$\lambda^2 = \mu \,.\, \sin(n, l) \,.\, \sin(n, l').$$

Fügen wir noch die Richtung der a-Axe hinzu, so gilt bekanntlich*) zwischen den Winkeln von drei Richtungen $n\,l\,a$ in der Ebene die Beziehung:

$$(n, l) + (l, a) + (a, n) = 0,$$

also

$$(n, l) = (n, a) - (l, a)$$

und in gleicher Weise:

$$(n, l') = (n, a) - (l', a).$$

Da aber l und l' gleich geneigt sind gegen die a-Axe (ohne parallel zu sein), so ist:

$$(a, l) = -(a, l'),$$

und wir erhalten für das sin-Produkt:

$$\sin(n, l) \,.\, \sin(n, l') = \sin\{(n, a) + (l, a)\} \,.\, \sin\{(n, a) - (l, a)\}$$
$$= \sin^2(n, a) - \sin^2(l, a) = \cos^2(l, a) - \cos^2(n, a)$$

also

$$\lambda^2 = \mu\{\cos^2(l, a) - \cos^2(n, a)\}.$$

Setzen wir nun den Fall des **Ellipsoids** voraus, also die Fokalhyperbel $H_{ac}^{(2)}$ und die Hauptellipse $\mathfrak{E}_{ac}^{(2)}$ in der $[ac]$-Ebene, so ist nach S. 614:

$$\cos^2(l, a) = \frac{P_a(P_b - P_c)}{P_b(P_a - P_c)},$$

und wir erhalten somit:

$$\lambda^2 = \mu\left\{\frac{P_a(P_b - P_c) - \cos^2(n, a)\, P_b(P_a - P_c)}{P_b(P_a - P_c)}\right\}$$
$$= \mu \,.\, \frac{P_a P_c}{P_a - P_c}\left\{\frac{\cos^2(n, a)}{P_a} + \frac{\sin^2(n, a)}{P_c} - \frac{1}{P_b}\right\}.$$

Nennen wir nun d den zu n parallelen Durchmesser der Ellipse $\mathfrak{E}_{ac}^{(2)}$ und bezeichnen mit P_d die Potenz der ihm zugehörigen Punktinvolution, so ist bekanntlich (S. 521):

*) R. Baltzer: Elemente der Mathematik. Bd. II. S. 297. 3. Aufl. 1870.

$$\frac{1}{P_d} = \frac{\cos^2(n, a)}{P_a} + \frac{\sin^2(n, a)}{P_c},$$

mithin wird:

$$\lambda^2 = \mu \cdot \frac{P_a P_c}{P_b(P_a - P_c)} \left\{ \frac{P_b}{P_d} - 1 \right\}.$$

Das Quadrat des Abstandsverhältnisses λ für den Kegelschnitt, in welchem die Ebene $[t t_1]$ die $F^{(2)}$ schneidet, ist bekanntlich nur abhängig von dem Verhältnis der Potenzen der Punktinvolutionen auf den Hauptaxen dieses Kegelschnittes, und die durch den Mittelpunkt der $F^{(2)}$ parallel zur Ebene $[t t_1]$ gelegte Ebene schneidet die $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitte, welcher dasselbe Axenverhältnis hat; die Axen dieses Kegelschnittes sind aber der Durchmesser d und die Hauptaxe b; demnach ist:

$$\lambda^2 = 1 - \frac{P_b}{P_d},$$

und wir erhalten für unsere Konstante μ den Wert:

$$\mu = \frac{P_b}{P_a} - \frac{P_b}{P_c},$$

d. h. der konstante Wert μ ist unabhängig von der Wahl des Punktes t auf dem betrachteten Fokalkegelschnitte.

Wenig anders gestaltet sich die Rechnung beim zweischaligen Hyperboloid, wo die Hauptebene $[a b]$ mit dem Fokalkegelschnitte $E_{ab}^{(2)}$ und dem Hauptkegelschnitte $\mathfrak{H}_{ab}^{(2)}$ in Betracht kommt; wir haben nur zu setzen (S. 616) für

$$\cos^2(l, a) = \frac{P_a(P_c - P_b)}{P_c(P_a - P_b)}$$

und erhalten den Wert:

$$\mu = \frac{P_c}{P_b} - \frac{P_c}{P_a}.$$

Endlich bleibt noch beim elliptischen Paraboloid der Wert der Konstanten μ zu bestimmen; hier ist die Hauptebene $[a b^\infty]$ mit der Fokalparabel $P_{ab^\infty}^{(2)}$ und der Hauptparabel $\mathfrak{P}_{ab^\infty}^{(2)}$ zu betrachten, und wir können uns desselben Hilfsmittels bedienen, wie in § 67. Es ist hier (S. 623):

$$\cos^2(l, a) = \frac{c - b}{c}, \qquad \sin^2(l, a) = \frac{b}{c},$$

wo b und c die früher angegebene Bedeutung haben; demgemäfs wird:

$$\lambda^2 = \mu\left\{\frac{c \cdot \sin^2(n, a) - b}{c}\right\},$$

und der Wert von λ^2 bestimmt sich durch die Parabel $P^{(2)}_{ab\infty}$ wie auf S. 635, indem wir dort nur b und c mit einander zu vertauschen haben:

$$\lambda^2 = \frac{b - c \cdot \sin^2(n, a)}{b},$$

wodurch wir erhalten:

$$\mu = -\frac{c}{b},$$

also ebenfalls unabhängig von der Wahl des Punktes $\mathfrak{t}$ auf der Fokalparabel.

§ 69. Die Schar konfokaler Flächen 2. O.

Die Fokalkegelschnitte in den Hauptebenen einer Fläche $F^{(2)}$ oder die sie vertretenden ebenen Polarsysteme werden bestimmt (S. 567) durch die Potenzen der Punktinvolutionen auf den Hauptaxen, und wir haben für diese folgende Werte gefunden:

	$[ab]$-Ebene	$[ac]$-Ebene	$[bc]$-Ebene
Hauptkegelschnitt	P_a, P_b	P_a, P_c	P_b, P_c
Fokalkegelschnitt	$P_a - P_c$, $P_b - P_c$	$P_a - P_b$, $P_c - P_b$	$P_b - P_a$, $P_c - P_a$

Die Werte dieser Differenzen bestimmen aber gleichzeitig die (reellen oder imaginären) Brennpunkte der Hauptkegelschnitte, nämlich $P_a - P_c$ die Brennpunkte des Hauptkegelschnittes in der $[ac]$-Ebene auf der a-Axe u. s. f., d. h.:

In jeder der drei Hauptaxen schneiden sich je zwei Hauptebenen; die (reellen oder imaginären) Brennpunkte des Hauptkegelschnittes in der einen Hauptebene sind allemal die Scheitel des Fokalkegelschnittes in der andern Hauptebene auf der ihnen gemeinschaftlichen Hauptaxe.

Die Fokalkegelschnitte hängen daher lediglich ab von

den Brennpunkten der drei Hauptkegelschnitte, und wir können den Satz aussprechen:

Alle Flächen 2. O., deren Kegelschnitte in den drei Hauptebenen dieselben Brennpunkte haben, müssen auch dieselben Fokalkegelschnitte haben.

Um zu erfahren, ob es mehrere solche Flächen giebt, und die Gesamtheit derselben zu übersehen, gehen wir von einer $F^{(2)}$ aus, deren Punktinvolutionen auf den drei Hauptaxen die Potenzwerte haben:

$$P_a \quad P_b \quad P_c.$$

Eine zweite Fläche, deren drei Hauptkegelschnitte dieselben Brennpunkte haben sollen, wie die erste, mufs einmal zusammenfallende Hauptaxen mit jener haben, und zweitens mufs, wenn die Potenzen der ihnen zugehörigen Punktinvolutionen beziehlich

$$P_{a'} \quad P_{b'} \quad P_{c'}$$

sind, jede der drei Bedingungen erfüllt werden:

$$P_a - P_b = P_{a'} - P_{b'}$$
$$P_a - P_c = P_{a'} - P_{c'}$$
$$P_b - P_c = P_{b'} - P_{c'},$$

die sich auch so schreiben lassen:

$$P_{a'} - P_a = P_{b'} - P_b = P_{c'} - P_c = \lambda.$$

Nennen wir diese konstante Differenz λ, so ergeben sich aus den Potenzwerten $P_a\ P_b\ P_c$ die Potenzwerte der neuen Fläche $P_{a'} = P_a + \lambda$, $P_{b'} = P_b + \lambda$, $P_{c'} = P_c + \lambda$, und indem wir dem λ alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegen, erhalten wir eine ganze Schar von konfokalen Flächen 2. O.

Nehmen wir, um von einem bestimmten Falle auszugehen, die gegebene Fläche $F^{(2)}$ als Ellipsoid an, also

$$P_a > 0 \quad P_b > 0 \quad P_c > 0,$$

und der Gröfse nach geordnet, so dafs

$$P_a > P_b > P_c$$

ist, dann werden die Werte

$$P_a + \lambda \quad P_b + \lambda \quad P_c + \lambda$$

so lange positiv bleiben als λ positiv ist, und auch noch, wenn

λ negativ ist, bis zu dem Werte $\lambda = -P_c$. Die konfokale Fläche bleibt also von $\lambda = \infty$ bis $\lambda = -P_c$ ein Ellipsoid. Für $\lambda = -P_c$ tritt ein Übergangsfall ein; die Fläche, deren Potenz auf der c-Axe Null wird, degeneriert in den Fokalkegelschnitt $E_{ab}^{(2)}$ in der $[ab]$-Ebene und ist aufzufassen als eine unendlich-dünne $F^{(2)}$, die den Übergang bildet vom Ellipsoid zum einschaligen Hyperboloid (S. 517); für die Werte von $\lambda = -P_c$ bis $\lambda = -P_b$ bleibt die konfokale Fläche ein einschaliges Hyperboloid, und für $\lambda = -P_b$ tritt wiederum ein Übergangsfall ein, indem sich die Fläche auf den Fokalkegelschnitt $H_{ac}^{(2)}$ reduziert in der $[ac]$-Ebene, eine Hyperbel, die den Übergang bildet vom einschaligen zum zweischaligen Hyperboloid. Für die Werte von $\lambda = -P_b$ bis $\lambda = -P_a$ bleibt die konfokale Fläche ein zweischaliges Hyperboloid und degeneriert für $\lambda = -P_a$ in den imaginären Fokalkegelschnitt $I_{bc}^{(2)}$ in der $[bc]$-Ebene, der den Übergang bildet vom zweischaligen Hyperboloid zur imaginären Fläche 2. O. Für die Werte von $\lambda = -P_a$ bis $\lambda = -\infty$ bleibt die konfokale Fläche imaginär.

Hiernach zerfällt die ganze Schar konfokaler Flächen in vier Gruppen:

eine Gruppe Ellipsoide,
„ „ einschalige Hyperboloide,
„ „ zweischalige Hyperboloide,
„ „ imaginäre Flächen,

welche durch die drei Fokalkegelschnitte als Grenzflächen in einander übergehen. (Will man noch den imaginären Kreis in ε_∞ als vierten Fokalkegelschnitt hinzufügen, so würde derselbe den Übergang vermitteln von den imaginären Flächen zu den reellen Ellipsoiden.)

Wir erkennen ferner, dafs zwei konfokale Flächen derselben Gattung (d. h. zwei konfokale Ellipsoide oder einschalige Hyperboloide oder zweischalige Hyperboloide) keinen reellen Punkt gemeinschaftlich haben können; denn seien die Potenzen der Punktinvolutionen auf den Hauptaxen für eine Fläche $P_a P_b P_c$ und für eine konfokale Fläche $P_{a'} = P_a + \lambda$, $P_{b'} = P_b + \lambda$, $P_{c'} = P_c + \lambda$, so werden für irgend einen durch den gemeinsamen Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ gezogenen Durch-

messer d die Potenzwerte der zugehörigen Punktinvolutionen bei beiden Flächen gefunden nach S. 531 durch die Gleichungen:

$$\frac{1}{P_d} = \frac{\cos^2(d, a)}{P_a} + \frac{\cos^2(d, b)}{P_b} + \frac{\cos^2(d, c)}{P_c}$$

$$\frac{1}{P_{d'}} = \frac{\cos^2(d, a)}{P_{a'}} + \frac{\cos^2(d, b)}{P_{b'}} + \frac{\cos^2(d, c)}{P_{c'}},$$

also

$$\frac{1}{P_d} - \frac{1}{P_{d'}} = \lambda \left\{ \frac{\cos^2(d, a)}{P_a \cdot P_{a'}} + \frac{\cos^2(d, b)}{P_b \cdot P_{b'}} + \frac{\cos^2(d, c)}{P_c \cdot P_{c'}} \right\};$$

sobald nun die beiden konfokalen Flächen derselben Gruppe angehörig sind oder derselben Gattung sind, haben immer P_a und $P_{a'}$, ebenso P_b und $P_{b'}$, endlich P_c und $P_{c'}$ gleiche Vorzeichen; die Summe rechts ist daher immer positiv und kann nie Null werden, folglich kann auch niemals der Wert P_d gleich dem Werte $P_{d'}$ werden; mithin können die beiden konfokalen Flächen keinen gemeinschaftlichen Punkt haben, weil ein solcher mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ verbunden zwei gleiche Durchmesser oder gleiche Werte P_d und $P_{d'}$ liefern würde.

Wir können nunmehr ein früher (S. 597) gefundenes Resultat allgemeiner aussprechen: Wenn man einen willkürlichen Punkt $\mathfrak{O}$ des Raumes mit einem der Fokalkegelschnitte der $F^{(2)}$ verbindet, so erhält man einen Kegel, welcher dieselben Fokalstrahlen (Brennstrahlen S. 58), also auch Hauptaxen und Hauptebenen hat, wie der aus $\mathfrak{O}$ an die Fläche $F^{(2)}$ gelegte Berührungskegel. Da nun eine Schar konfokaler Flächen dieselben Fokalkegelschnitte besitzt, so folgt: Die Berührungskegel aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ des Raumes an sämtliche Flächen einer konfokalen Schar haben alle dieselben drei Hauptebenen und in ihnen dieselben Brennstrahlen. Diese sämtlichen Berührungskegel bilden daher selbst eine Schar konfokaler Kegel von dem gemeinsamen Mittelpunkte $\mathfrak{O}$ aus; die Fokalkegelschnitte dieser Schar konfokaler Kegel bestehen aus einem reellen Linienpaar (Fokalhyperbel) und zwei imaginären Linienpaaren in den drei Hauptebenen, die Ebene der beiden reellen Brennstrahlen ist selbst die eine Hauptebene; halbieren wir Winkel und Nebenwinkel zwischen den beiden Brenn-

strahlen und legen durch diese Halbierungslinien zwei zu einander und auf der Ebene der beiden Brennstrahlen normale Ebenen, so erhalten wir die beiden andern Hauptebenen; die (reellen und imaginären) Brennstrahlen werden aber bestimmt durch die Potenzen der Strahleninvolutionen in den Hauptebenen (S. 63).

Unter dieser Schar konfokaler Kegel giebt es drei, welche in (doppelt zu zählende) Ebenen ausarten; dieses sind die drei gemeinsamen Hauptebenen selbst. Für einen solchen Berührungskegel einer Fläche $F^{(2)}$, welcher in eine Ebene ausartet, ist diese Ebene selbst Berührungsebene der Fläche $F^{(2)}$, und der Mittelpunkt des Kegels $\mathfrak{O}$ Berührungspunkt. Der Kegelschnitt, längs dessen ein Berührungskegel die $F^{(2)}$ berührt, artet in diesem Falle in ein (reelles oder imaginäres) Linienpaar aus, welches also gleichzeitig der Berührungsebene in $\mathfrak{O}$ und der Fläche $F^{(2)}$ angehört; dieses Linienpaar ist ein Paar Kegelstrahlen, und da bei dem zerfallenden Kegel die Brennstrahlen mit einem Paar Kegelstrahlen zusammenfallen, so fällt das Linienpaar, in welchem eine Hauptebene des Kegels als Berührungsebene einer durch $\mathfrak{O}$ gehenden Fläche der konfokalen Flächenschar dieselbe schneidet, zusammen mit den beiden Brennstrahlen in dieser Hauptebene des Kegels. Wir erhalten also folgendes Resultat:

Durch einen willkürlich gegebenen Punkt $\mathfrak{O}$ im Raume gehen allemal drei Flächen einer konfokalen Schar; diese haben in $\mathfrak{O}$ zu Berührungsebenen die drei Hauptebenen des Kegels, welcher von $\mathfrak{O}$ durch einen der Fokalkegelschnitte gelegt werden kann; sie durchschneiden sich also in $\mathfrak{O}$ orthogonal, d. h. ihre Berührungsebenen sind zu einander normal. Von diesen drei Flächen ist allemal die eine ein Ellipsoid, die andere ein einschaliges, die dritte ein zweischaliges Hyperboloid (denn wir haben oben bewiesen, daſs zwei gleichartige Flächen einer konfokalen Schar keinen reellen Punkt gemeinschaftlich haben können). Jede der drei Hauptebenen des aus $\mathfrak{O}$ durch einen der Fokalkegelschnitte gelegten Kegels enthält zwei Brennstrahlen, von denen ein Paar reell, die beiden andern Paare konjugiert-

imaginär sind. Diese Linienpaare sind die Durchschnittskurven der Berührungsebenen in $\mathfrak{O}$ mit den drei durch $\mathfrak{O}$ gehenden Flächen der konfokalen Schar; die reellen Brennstrahlen sind also ein Paar Erzeugender des einschaligen Hyperboloids, die beiden andern Linienpaare werden vertreten durch elliptische Strahleninvolutionen (S. 484).

Um die drei konfokalen Flächen einer Schar, welche durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{O}$ des Raumes gehen, zu erhalten, braucht man nur die drei Hauptebenen des Kegels $\mathfrak{O}^{(2)}$ zu ermitteln, welcher von $\mathfrak{O}$ aus durch einen der Fokalkegelschnitte gelegt werden kann. Trifft eine solche Hauptebene die drei Hauptaxen der konfokalen Flächenschar, nämlich

die a-Axe . . . in $\mathfrak{x}$
„ b-Axe . . . „ $\mathfrak{y}$
„ c-Axe . . . „ $\mathfrak{z}$,

und legt man durch $\mathfrak{O}$ drei Ebenen parallel den Hauptebenen der konfokalen Flächenschar, deren Durchschnittspunkte mit der a-, b-, c-Axe bez. seien $\mathfrak{x}'\ \mathfrak{y}'\ \mathfrak{z}'$, so werden die drei Werte:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{x} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{x}' = P_a$$
$$\mathfrak{M}\mathfrak{y} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{y}' = P_b$$
$$\mathfrak{M}\mathfrak{z} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{z}' = P_c$$

die Potenzen der Punktinvolutionen auf den Hauptaxen für die gesuchte Fläche $F^{(2)}$ sein, welche durch $\mathfrak{O}$ geht und der konfokalen Flächenschar angehört, und durch diese drei Potenzwerte ist die Fläche $F^{(2)}$ vollständig bestimmt. Aus denselben liefs sich ebenfalls die Natur der drei konfokalen Flächen durch $\mathfrak{O}$ ermitteln, aber wir verzichten auf diese Untersuchung.

Wir haben auf S. 596 den Satz ausgesprochen: Eine beliebige Ebene $\mathfrak{k}$ und das aus ihrem Pole $\mathfrak{x}$ (in Bezug auf eine Fläche $F^{(2)}$) auf $\mathfrak{k}$ herabgelassene Perpendikel durchschneiden eine der Hauptebenen der $F^{(2)}$ allemal in einer Geraden l und einem Punkte $\mathfrak{p}$, welche Polare und Pol sind in Bezug auf den in der Hauptebene liegenden Fokalkegelschnitt. Hieraus folgt, da alle Flächen einer konfokalen Schar dieselben Fokalkegelschnitte haben, der Satz:

Die Pole einer festen Ebene in Bezug auf sämtliche Flächen einer konfokalen Schar liegen auf einer geraden Linie, welche normal steht auf der Ebene.

Denn schneidet diese gegebene Ebene $\mathfrak{x}$ eine der Hauptebenen in einer Geraden l, und ist deren Pol in Bezug auf den in der Hauptebene enthaltenen Fokalkegelschnitt $\mathfrak{p}$, so wird das aus $\mathfrak{p}$ auf die Ebene $\mathfrak{x}$ herabgelassene Perpendikel den Pol $\mathfrak{x}$ enthalten müssen der Ebene $\mathfrak{x}$ in Bezug auf jede Fläche $F^{(2)}$, welche denselben Fokalkegelschnitt in der betrachteten Hauptebene hat; folglich liegen alle Pole $\mathfrak{x}$ in dem aus $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{x}$ herabgelassenen Perpendikel.

Weiter folgt hieraus, wenn man eine beliebige Ebene $\mathfrak{x}$ annimmt, dass es nur eine Fläche $F^{(2)}$ aus der konfokalen Schar giebt, welche die Ebene $\mathfrak{x}$ berührt; damit nämlich $\mathfrak{x}$ Berührungsebene werde, mufs ihr Pol in sie selbst hineinfallen und wird der Berührungspunkt; schneidet daher die Ebene $\mathfrak{x}$ eine Hauptebene in der Geraden g, deren Pol in Bezug auf den Fokalkegelschnitt in dieser Hauptebene der Punkt $\mathfrak{p}$ sei, so wird das aus $\mathfrak{p}$ auf die Ebene $\mathfrak{x}$ herabgelassene Perpendikel in einem Punkte $\mathfrak{t}$ dieselbe treffen, und $\mathfrak{t}$ wird der Berührungspunkt der einzigen Fläche $F^{(2)}$ der konfokalen Schar sein, welche die Ebene $\mathfrak{x}$ berührt; die Gerade $|\mathfrak{t}\mathfrak{p}|$ ist daher Normale der Fläche.

Drehen wir die Ebene $\mathfrak{x}$ um eine feste Gerade l, so beschreibt ihre Durchschnittslinie g mit der Hauptebene ein ebenes Strahlenbüschel, und der Pol $\mathfrak{p}$ der Geraden g in Bezug auf den Fokalkegelschnitt durchläuft eine gerade Punktreihe, welche bekanntlich mit dem von g beschriebenen Strahlenbüschel, also auch mit dem von $\mathfrak{x}$ beschriebenen Ebenenbüschel projektivisch ist; die Perpendikel aus $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{x}$ werden mithin (S. 213) eine Regelschar eines hyperbolischen Paraboloids bilden, und wir können den Satz aussprechen:

Wenn sich eine veränderliche Ebene $\mathfrak{x}$ um eine feste Gerade l dreht, so giebt es für jede Lage von $\mathfrak{x}$ eine bestimmte Fläche $F^{(2)}$ aus der konfokalen Schar, welche $\mathfrak{x}$ zur Berührungsebene hat; die in dem Berührungspunkt errichtete Normale der

Fläche durchläuft bei der Bewegung der Ebene ξ eine Regelschar eines hyperbolischen Paraboloids.

Da dieses hyperbolische Paraboloid die Gerade l im allgemeinen zweimal trifft, so werden die beiden Erzeugenden aus der Regelschar des hyperbolischen Paraboloids, welche durch die beiden Treffpunkte gehen, die Normalen für zwei Flächen aus der konfokalen Schar sein, und da die Berührungsebenen durch l gehen, so sind die Treffpunkte die Berührungspunkte, also schliefsen wir:

Es giebt im allgemeinen zwei Flächen aus einer konfokalen Schar, welche eine gegebene Gerade l berühren.

Bezeichnen wir die beiden Berührungspnnkte auf der Geraden l durch t_0 und t_1, die zugehörigen Berührungsebenen durch τ_0 und τ_1, die sich in der Geraden l schneiden, so wissen wir, dafs alle Berührungskegel, welche von dem Punkte t_0 an die Flächen $F^{(2)}$ der konfokalen Schar gelegt werden können, die Ebene τ_0 zu einer Hauptebene haben; alle Paare von Berührungsebenen, welche durch die in dieser Hauptebene liegende Gerade l an sämtliche Kegel gelegt werden können, haben also dieselbe Halbierungsebene τ_0; sie bilden mithin eine gleichseitig hyperbolische Ebeneninvolution (S. 15), von welcher τ_0 eine Doppelebene ist; diese Paare von Berührungsebenen fallen aber zusammen mit den Paaren von Berührungsebenen, welche durch l an die Flächen $F^{(2)}$ der konfokalen Schar gelegt werden können; diese bilden mithin eine gleichseitig-hyperbolische Ebeneninvolution, deren eine Doppelebene τ_0 und deren andere Doppelebene also τ_1 ist; die Ebenen τ_0 und τ_1 müssen daher auf einander senkrecht stehen, und wir erhalten folgenden Satz:

Wenn man durch eine gegebene Gerade l die Paare von Berührungsebenen an die Flächen $F^{(2)}$ einer konfokalen Schar legt, so bilden dieselben eine gleichseitig-hyperbolische Ebeneninvolution, deren Doppelebenen (die Berührungsebenen an den beiden die Gerade l berührenden Flächen $F^{(2)}$ der konfokalen Schar) zu einander normal sind.

Wir haben bisher den allgemeinsten Fall einer Schar von konfokalen Flächen $F^{(2)}$ vorausgesetzt, bei welchem die

beiden reellen Fokalkegelschnitte, welche allen Flächen gemeinschaftlich sind, die Fokalellipse und die Fokalhyperbel sind, und der gemeinschaftliche Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Flächenschar im Endlichen liegt. Einige Modifikationen treten ein, wenn wir von einem Paraboloide ausgehen, die beiden Fokalparabeln desselben bestimmen und nach der Flächenschar fragen, welche dieselben Fokalkegelschnitte hat. Dafs die Flächen dieser Schar sämtlich Paraboloide sein müssen, ist unmittelbar ersichtlich, denn die Hauptkegelschnitte müssen Parabeln sein, welche mit den Fokalparabeln dieselben Brennpunkte haben.

Gehen wir nun von einem beliebigen Paraboloid aus, dessen Scheitel $\mathfrak{S}$, und dessen durch denselben gehende Hauptaxe die a-Axe sei. Die beiden zu einander normalen Hauptebenen, welche sich in dieser Axe des Paraboloids schneiden, enthalten die beiden Hauptparabeln $\mathfrak{P}^{(2)}_{ab\infty}$ $\mathfrak{P}^{(2)}_{ac\infty}$, deren Brennpunkte $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$ um die Stücke b und c von dem gemeinschaftlichen Scheitel $\mathfrak{S}$ abstehen ($c > b$). Die Fokalparabeln in diesen beiden Hauptebenen $P^{(2)}_{ab\infty}$ $P^{(2)}_{ac\infty}$ werden dadurch erhalten, dafs wir zur Konstruktion der ersteren $\mathfrak{f}_b$ als Brennpunkt und $\mathfrak{f}_c$ als Scheitel, zur Konstruktion der letzteren $\mathfrak{f}_c$ als Brennpunkt und $\mathfrak{f}_b$ als Scheitel wählen. Es hängt also alles von den drei Punkten $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{f}_b$ $\mathfrak{f}_c$ in der a-Axe ab, durch welche die beiden in Betracht kommenden unveränderlichen Hauptebenen $[ab^\infty]$ und $[ac^\infty]$ gehen. Die Fokalparabeln hängen allein von den beiden Punkten $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$ ab, und um alle Paraboloide, denen dieselben beiden Fokalparabeln in den beiden unveränderlichen Hauptebenen zugehören, zu erhalten, brauchen wir nur $\mathfrak{S}$ auf der a-Axe zu verändern. Wir wissen, dafs, so lange $\mathfrak{S}$ zwischen den beiden Punkten $\mathfrak{f}_b$ $\mathfrak{f}_c$ liegt, das Paraboloid ein hyperbolisches, im andern Falle ein elliptisches ist.

Die ganze Schar konfokaler Paraboloide zerfällt daher in eine Gruppe hyperbolischer und eine Gruppe elliptischer Paraboloide; den Übergang von der einen Gruppe zur andern vermitteln zweimal die Fokalparabeln, wie auf S. 517 bemerkt wurde. Die Gruppe elliptischer Paraboloide zerfällt aber durch den unendlich-entfernten Punkt der a-Axe

wieder in zwei Unterabteilungen, je nachdem nämlich der Scheitel $\mathfrak{S}$ aufserhalb der Strecke $\mathfrak{f}_b \mathfrak{f}_c$ auf dem Teile der Hauptaxe von $\mathfrak{f}_c$ bis ∞, oder auf dem Teile von $\mathfrak{f}_b$ bis ∞ liegt. Die elliptischen Paraboloide aus diesen beiden Abteilungen unterscheiden sich dadurch von einander, dafs zwei derselben Abteilung angehörige Paraboloide ihre Öffnungen gleich gerichtet, die verschiedenen Abteilungen angehörigen ihre Öffnungen entgegengesetzt gerichtet haben. Wir werden daher besser die gesamten Paraboloide der konfokalen Schar in drei Gruppen einteilen, eine Gruppe hyperbolischer und zwei Gruppen elliptischer Paraboloide, indem wir den Scheitel $\mathfrak{S}$ gehen lassen

I.	II.	III.
von ∞ bis $\mathfrak{f}_b$,	von $\mathfrak{f}_b$ bis $\mathfrak{f}_c$,	von $\mathfrak{f}_c$ bis ∞,
elliptische	hyperbolische	elliptische
Paraboloide	Paraboloide	Paraboloide.

Bei dieser Einteilung können wir den Satz aussprechen:

Zwei konfokale Paraboloide derselben Gruppe haben niemals einen reellen Punkt gemeinschaftlich.

In der That, legen wir durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{m}$ der gemeinschaftlichen Hauptaxe a der Paraboloide eine Normalebene auf derselben, so wird sie ein Paraboloid der konfokalen Schar in einem Kegelschnitt schneiden, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ ist, und dessen Hauptaxen die Durchschnittslinien mit den beiden Hauptebenen $[a b^{\infty}]$ und $[a c^{\infty}]$ sind. Die Potenzen der Punktinvolutionen auf diesen beiden Hauptaxen können wir leicht ermitteln durch die Hauptparabeln $\mathfrak{P}^{(2)}_{a b^{\infty}}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}_{a c^{\infty}}$. Ist nämlich $\mathfrak{S}$ der Scheitel des Paraboloids, so sind diese Potenzwerte:

$$4\,\mathfrak{S}\mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{S}\mathfrak{f}_b \quad \text{und} \quad 4\,\mathfrak{S}\mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c,$$

und dadurch ist der ganze Durchschnittskegelschnitt bestimmt; ist d ein beliebiger durch den Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ gezogener Durchmesser, und nennen wir φ den Winkel, welchen seine Richtung mit der Hauptebene $[a b^{\infty}]$ bildet, so ist die Potenz der zugehörigen Punktinvolution (S. 521):

$$\frac{4}{P_d} = \frac{\cos^2 \varphi}{\mathfrak{S}\mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{S}\mathfrak{f}_b} + \frac{\sin^2 \varphi}{\mathfrak{S}\mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c} \,.$$

Nehmen wir ein zweites Paraboloid aus der konfokalen Schar mit dem Scheitel $\mathfrak{S}_1$, so schneidet die in $\mathfrak{m}$ errichtete Normalebene einen andern Kegelschnitt aus, welcher mit dem vorigen zusammenfallende Hauptaxen hat, aber andere Potenzwerte; derselbe Durchmesser $d_1 = d$ besitzt den Potenzwert:

$$\frac{4}{P_{d_1}} = \frac{\cos^2\varphi}{\mathfrak{S}_1\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_b} + \frac{\sin^2\varphi}{\mathfrak{S}_1\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_c}.$$

Hieraus folgt der Unterschied beider Potenzwerte:

$$4\left\{\frac{1}{P_d} - \frac{1}{P_{d_1}}\right\} = \cos^2\varphi \left\{\frac{\mathfrak{S}_1\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_b - \mathfrak{S}\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}_b}{\mathfrak{S}_1\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_b \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}_b}\right\}$$

$$+ \sin^2\varphi \left\{\frac{\mathfrak{S}_1\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_c - \mathfrak{S}\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c}{\mathfrak{S}_1\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_c \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c}\right\},$$

oder:

$$\frac{4\,\mathfrak{S}_1\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{m}}{\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}} \left\{\frac{1}{P_d} - \frac{1}{P_{d_1}}\right\} = \cos^2\varphi \left\{\frac{\mathfrak{S}_1\mathfrak{m} + \mathfrak{S}\mathfrak{f}_b}{\mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_b \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}_b}\right\}$$

$$+ \sin^2\varphi \left\{\frac{\mathfrak{S}_1\mathfrak{m} + \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c}{\mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_c \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c}\right\}.$$

Nehmen wir nun zwei elliptische Paraboloide derselben Gruppe an, und sei $\mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_c > \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c$, so wird nur für solche Lagen von $\mathfrak{m}$, für die $\mathfrak{S}\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{f}_c$ gleich gerichtet sind, die in $\mathfrak{m}$ errichtete Normalebene beiden Paraboloiden begegnen können. Für diese Lage von $\mathfrak{m}$ sind aber auch $\mathfrak{S}_1\mathfrak{m}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{f}_c$, $\mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{f}_c$ alle gleich gerichtet, daher kann die rechte Seite der letzten Gleichung nie verschwinden, weil sie eine Summe von lauter positiven (oder lauter negativen) Werten ist; da also auch die linke Seite der Gleichung nicht Null werden kann, so können niemals zwei Werte P_d und P_{d_1} auf demselben Durchmesser einander gleich werden; folglich können zwei konfokale elliptische Paraboloide, welche derselben Gruppe angehören, niemals reelle Punkte gemeinschaftlich haben. Dagegen werden wohl zwei elliptische Paraboloide, die verschiedenen Gruppen angehören, reelle Punkte gemein haben; denn hier wird man $\mathfrak{m}$, wenn die Transversalebene beiden elliptischen Paraboloiden gleichzeitig begegnen soll', so wählen müssen, dafs es zwischen $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ liegt; alsdann werden die Strecken $\mathfrak{S}_1\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{f}_b$ entgegengesetzt gerichtet sein, und ebenso die Strecken

$\mathfrak{S}_1\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{f}_c$, und da $\mathfrak{S}\mathfrak{f}_b > \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c$, so werden für Punkte $\mathfrak{m}$ zwischen $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$ die Werte:

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{m} + \mathfrak{S}\mathfrak{f}_b \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_1\mathfrak{m} + \mathfrak{S}\mathfrak{f}_c$$

entgegengesetzt werden, also werden sich immer Richtungen $d = d_1$ ermitteln und durch die vorige Gleichung bestimmen lassen, für welche P_d und P_{d_1} gleichwertig werden; mithin werden konfokale elliptische Paraboloide verschiedener Gruppen gemeinschaftliche Punkte besitzen.

Umständlicher wird diese algebraische Diskussion der vorigen Gleichung für den Fall hyperbolischer Paraboloide; allein wir sind derselben überhoben durch die allgemein-gültige Bemerkung, welche auch für den Fall, wo die beiden Fokalkegelschnitte Ellipse und Hyperbel sind, zu machen war.

Legt man aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ des Raumes an eine Fläche $F^{(2)}$ den Berührungskegel $K^{(2)}$ und den Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher durch einen der beiden reellen Fokalkegelschnitte geht, so haben diese beiden Kegel nicht allein dieselben Hauptebenen und Hauptaxen, sondern auch in ersteren dieselben Fokalstrahlen. Ist insbesondere $\mathfrak{O}$ ein Punkt der Fläche $F^{(2)}$ selbst, so artet der Berührungskegel $K^{(2)}$ in eine Ebene (die Berührungsebene) aus und die beiden Fokalstrahlen gehen in das (reelle oder imaginäre) Linienpaar über, in welchem die Berührungsebene in $\mathfrak{O}$ die Fläche $F^{(2)}$ schneidet.

Sind umgekehrt die beiden reellen Fokalkegelschnitte, in unserem Falle Fokalparabeln, und ein beliebiger Punkt $\mathfrak{O}$ des Raumes gegeben, so legen wir von $\mathfrak{O}$ aus einen Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}$ durch eine der Fokalparabeln, bestimmen die drei Hauptebenen des Kegels $\mathfrak{K}^{(2)}$ und in jeder derselben die Strahleninvolutionen, deren Doppelstrahlen Fokalstrahlen des Kegels sind; dann sind bekanntlich (S. 58) zwei dieser Strahleninvolutionen elliptisch, eine hyperbolisch. Verlangen wir nun, es solle durch den Punkt $\mathfrak{O}$ ein Paraboloid gelegt werden, welches zu der Schar konfokaler Paraboloide gehöre, die die gegebenen Parabeln zu Fokalkegelschnitten haben, so kann jede der drei Hauptebenen des Kegels $\mathfrak{K}^{(2)}$ als Berührungsebene in $\mathfrak{O}$ eines gesuchten Paraboloids gewählt werden; dasselbe ist dann vollständig bestimmt und wird

folgendermafsen gefunden: Die Berührungsebene in $\mathfrak{O}$ treffe die a-Axe (in welcher die beiden Brennpunkte $\mathfrak{f}_b \mathfrak{f}_c$ liegen) in dem Punkte $\mathfrak{z}$, und der Fufspunkt des aus $\mathfrak{O}$ auf die a-Axe herabgelassenen Perpendikels sei $\mathfrak{z}'$, dann wird die Mitte $\mathfrak{S}$ zwischen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ der Scheitel des gesuchten Paraboloids sein, und dieses ist nun vollständig bestimmt, indem wir die Parabeln in den beiden Hauptebenen kennen, welche $\mathfrak{S}$ zum gemeinschaftlichen Scheitel, $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$ zu Brennpunkten haben.

Da durch den Punkt $\mathfrak{O}$ drei Ebenen gehen, die drei Hauptebenen des Kegels $\mathfrak{K}^{(2)}$, so giebt es drei Paraboloide, welche der Forderung der Aufgabe genügen. Von diesen drei Paraboloiden kann nur eines ein hyperbolisches sein, weil von den drei Strahleninvolutionen in den Hauptebenen, deren Doppelstrahlen die Fokalstrahlen des Kegels $\mathfrak{K}^{(2)}$ sind, nur eine hyperbolisch ist und die beiden andern elliptisch sind. Die beiden übrigen Paraboloide müssen daher elliptische sein und verschiedenen Gruppen angehören, weil wir oben bewiesen haben, dafs zwei elliptische Paraboloide derselben Gruppe keinen reellen Punkt gemein haben.

Wir haben hierdurch folgendes Resultat erlangt:

Sind auf einer Geraden, in welcher sich zwei zu einander rechtwinklige Ebenen schneiden, zwei Punkte $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$ gegeben, und beschreibt man in der einen Ebene eine Parabel, welche $\mathfrak{f}_c$ zum Scheitel und $\mathfrak{f}_b$ zum Brennpunkt, in der andern Ebene eine Parabel, welche $\mathfrak{f}_b$ zum Scheitel und $\mathfrak{f}_c$ zum Brennpunkt hat, so giebt es eine Schar von Paraboloiden, welche diese beiden Parabeln zu Fokalkegelschnitten haben. Diese Schar konfokaler Paraboloide zerfällt in drei Gruppen: die eine derselben besteht aus hyperbolischen Paraboloiden, deren Scheitel zwischen $\mathfrak{f}_b$ und $\mathfrak{f}_c$ liegen, die andere aus elliptischen Paraboloiden, deren Scheitel zwischen $\mathfrak{f}_c$ und $\mathfrak{f}_\infty$ liegen (wo $\mathfrak{f}_\infty$ der unendlich-entfernte Punkt der Geraden $|\mathfrak{f}_b \mathfrak{f}_c|$ sei) und die dritte Gruppe aus elliptischen Paraboloiden, deren Scheitel zwischen $\mathfrak{f}_\infty$ und $\mathfrak{f}_b$ liegen.

Durch einen willkürlich gewählten Punkt $\mathfrak{O}$ im Raume gehen allemal drei reelle Paraboloide

der konfokalen Schar, die je einer der drei Gruppen angehören, von denen also eines ein hyperbolisches, die beiden andern elliptische Paraboloide der beiden verschiedenen Gruppen sind. Diese drei Paraboloide durchschneiden sich in dem Punkte $\mathfrak{O}$ rechtwinklig, d. h. ihre Berührungsebenen in $\mathfrak{O}$ sind drei zu einander normale Ebenen; es sind dies die drei Hauptebenen eines Kegels, welcher von $\mathfrak{O}$ aus durch eine (oder die andere) der beiden Fokalparabeln gelegt werden kann. Dieser Kegel hat ferner in jeder der drei Hauptebenen durch $\mathfrak{O}$ eine Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die Fokalstrahlen des Kegels heifsen; von diesen drei Strahleninvolutionen sind zwei elliptisch, die dritte ist hyperbolisch. Die Doppelstrahlen der hyperbolischen Strahleninvolution sind die beiden Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids, welche sich in $\mathfrak{O}$ kreuzen. Die elliptischen Strahleninvolutionen vertreten die imaginären Linienpaare in den Berührungsebenen der beiden elliptischen Paraboloide, welche durch $\mathfrak{O}$ gehen.

Da die übrigen Eigenschaften der Schar konfokaler Paraboloide in unveränderter Weise Gültigkeit behalten, wie bei der früher betrachteten allgemeineren Schar konfokaler Flächen $F^{(2)}$, so brauchen wir dieselben hier nicht zu wiederholen.

§ 70. Metrische Eigenschaften der Krümmungslinien der Flächen 2. O.*)

Wir haben gesehen, dafs von einer Schar konfokaler Flächen 2. O., welche dieselben drei zu einander rechtwinkligen Hauptebenen und in ihnen dieselben Fokalkegelschnitte haben, durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ des Raumes allemal

*) Die nachfolgenden Eigenschaften sind auf analytischem Wege von Heilermann abgeleitet in dem Aufsatze: Über die Fokalpunkte der Flächen zweiten Grades", Crelle-Borchardt's Journal f. r. u. a. M. Bd. 56, S. 345 ff.

drei Flächen gehen, nämlich ein Ellipsoid (0), ein einschaliges Hyperboloid (I) und ein zweischaliges Hyperboloid (II). Diese drei Flächen durchschneiden sich rechtwinklig, d. h. die drei Berührungsebenen derselben im Punkte $\mathfrak{O}$ bilden ein rechtwinkliges Dreiflach und sind die drei Hauptebenen für jeden Berührungskegel, der von $\mathfrak{O}$ aus an irgend eine Fläche der konfokalen Schar gelegt werden kann. Für jede der drei Flächen (0) (I) (II) selbst degeneriert der Berührungskegel in die Berührungsebene. Die Durchschnittslinien einer Berührungsebene mit den beiden anderen sind daher die Axen der Strahleninvolution in der Berührungsebene, welche in dem Berührungspunkte $\mathfrak{O}$ ihren Mittelpunkt und zu Asymptoten das auf der Fläche durch $\mathfrak{O}$ gehende (reelle oder imaginäre) Linienpaar hat; die Schnittlinie der beiden anderen Ebenen ist die Normale der ersten Berührungsebene im Punkte $\mathfrak{O}$.

Betrachtet man nur *eine* der drei Flächen (0) (I) (II), so kann man den Punkt $\mathfrak{O}$ willkürlich auf ihr wählen, und von den vorigen drei Ebenen wird eine die *Berührungsebene*; die beiden anderen, welche sich in der Normale der Fläche am Punkte $\mathfrak{O}$ schneiden, heifsen die *Hauptnormalebenen* und sind diejenigen, welche durch die Normale und die beiden Axen der eben erwähnten durch die Fläche selbst bestimmten Strahleninvolution in der Berührungsebene gelegt werden können. Diese beiden Axen der Strahleninvolution in der Berührungsebene heifsen auch *Haupttangenten* in dem Punkte $\mathfrak{O}$ der Fläche.

Die beiden übrigen durch $\mathfrak{O}$ gehenden Flächen der konfokalen Schar durchschneiden nun die zuerst angenommene Fläche in zwei Raumkurven 4. O., welche man *Krümmungslinien* der Fläche 2. O. nennt, und deren aus der allgemeinen Theorie der Krümmung von Flächen entspringende Bedeutung hier nicht näher erörtert werden soll. Für uns genügt es zu wissen, dafs durch jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ einer Fläche 2. O. zwei Krümmungslinien derselben gehen, die sich rechtwinklig durchkreuzen, nämlich die Durchschnittskurven der beiden übrigen durch $\mathfrak{O}$ zu der gegebenen konfokal gelegten Flächen. Die sämtlichen Krümmungslinien einer Fläche 2. O. (für alle Punkte $\mathfrak{O}$ derselben) bilden also eine doppelte

Schar von Raumkurven auf der Fläche, welche sich überall rechtwinklig durchschneiden. Die Krümmungslinien einer Fläche 2. O. besitzen gewisse metrische Eigenschaften, welche manche Analogie darbieten mit den bekannten Fokaleigenschaften des ebenen Kegelschnitts. Um zu diesen zu gelangen, schicken wir einige elementar-stereometrische Betrachtungen voraus und führen zunächst folgende einfache Bezeichnungen ein:

Es seien $\tau\,\tau_1\,\tau_{11}$ die drei zu einander rechtwinkligen durch den Punkt $\mathfrak{O}$ gelegten Ebenen, welche die drei konfokalen Flächen der Schar (0) (I) (II), die durch $\mathfrak{O}$ gehen, in diesem Punkte berühren, nämlich

τ die Berührungsebene des Ellipsoids (0) im Punkte $\mathfrak{O}$,
τ_1 „ „ des einschaligen Hyperboloids (I) im Punkte $\mathfrak{O}$,
τ_{11} „ „ des zweischaligen Hyperboloids (II) im Punkte $\mathfrak{O}$.

Die Durchschnittslinien dieser drei Ebenen geben das Tripel der zu einander rechtwinkligen Strahlen $s\,s_1\,s_{11}$:

$$s = |\tau_1\tau_{11}|; \quad s_1 = |\tau_{11}\tau|; \quad s_{11} = |\tau\tau_1|.$$

Ferner sei $\mathfrak{M}$ der gemeinschaftliche Mittelpunkt für alle Flächen der konfokalen Schar; die drei gemeinsamen Hauptaxen seien die Strahlen:

$$a\ b\ c,$$

und die drei sie paarweise verbindenden Hauptebenen:

$$[bc] = \alpha, \quad [ca] = \beta, \quad [ab] = \gamma.$$

Wir haben demnach zwei rechtwinklige Dreikante und gleichzeitig Dreiflache mit den Mittelpunkten $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{M}$, die in einer gewissen Abhängigkeit von einander stehen.

Bezeichnen wir noch die Durchbohrungspunkte

der	Ebene	τ	durch	die	Strahlen	$a\ b\ c$	mit	$\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}$,
„	„	τ_1	„	„	„	$a\ b\ c$	„	$\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_1\ \mathfrak{C}_1$,
„	„	τ_{11}	„	„	„	$a\ b\ c$	„	$\mathfrak{A}_{11}\ \mathfrak{B}_{11}\ \mathfrak{C}_{11}$,
„	„	α	„	„	„	$s\,s_1\,s_{11}$	„	$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_{11}$,
„	„	β	„	„	„	$s\,s_1\,s_{11}$	„	$\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_{11}$,
„	„	γ	„	„	„	$s\,s_1\,s_{11}$	„	$\mathfrak{c}\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{c}_{11}$,

endlich die Abstände des Punktes $\mathfrak{O}$ von den Ebenen

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma$$

durch

$$p_a \quad p_b \quad p_c,$$

des Punktes $\mathfrak{M}$ von den Ebenen

$$\tau \quad \tau_1 \quad \tau_{11}$$

durch

$$p \quad p_1 \quad p_{11},$$

und verstehen wir zugleich unter den Werten dieser sechs Strecken diejenigen, welche in entgegengesetzter Richtung zu nehmen sind, wie das von dem Punkte auf die Ebene hinabgelassene Perpendikel, dann lassen sich die Potenzwerte der den drei Hauptaxen zugehörigen Punktinvolutionen für die drei konfokalen Flächen durch $\mathfrak{O}$ leicht ausdrücken.

Da die Berührungsebene τ im Punkte $\mathfrak{O}$ am Ellipsoid (0) der Hauptaxe a desselben im Punkte $\mathfrak{A}$ begegnet, so ist die Polarebene des Punktes $\mathfrak{A}$ in Bezug auf das Ellipsoid die durch $\mathfrak{O}$ zur Ebene α parallel gelegte Ebene, deren Abstand von $\mathfrak{M}$ in dem bezeichneten Richtungssinne p_a ist; folglich wird die Potenz der Punktinvolution, welche der a-Axe des Ellipsoids zugehört, und die wir mit P_a bezeichnen wollen, den Wert haben:

$$P_a = p_a \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A};$$

in gleicher Weise erhalten wir die übrigen Potenzwerte der Punktinvolutionen, nämlich:

$$\begin{array}{l|l|l} P_a = p_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A} & P_{a_1} = p_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 & P_{a_{11}} = p_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11} \\ P_b = p_b \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{B} & P_{b_1} = p_b \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{B}_1 & P_{b_{11}} = p_b \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{B}_{11} \\ P_c = p_c \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{C} & P_{c_1} = p_c \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{C}_1 & P_{c_{11}} = p_c \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{C}_{11}. \end{array}$$

Diese Werte lassen sich aber auch noch anders ausdrücken. Da der Strahl a parallel dem Perpendikel p_a ist, und der Strahl s parallel dem Perpendikel p, so wird

$$\cos(a, p) = \cos(s, p_a)$$

sein, woraus folgt:

$$\frac{p}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}} = \frac{p_a}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}},$$

oder

$$p_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A} = p \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{a} = P_a;$$

wir haben in gleicher Weise die Werte:

$$\begin{array}{l|l|l} P_a = p \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{a} & P_{a_1} = p_1 \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{a}_1 & P_{a_{11}} = p_{11} \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11} \\ P_b = p \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{b} & P_{b_1} = p_1 \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{b}_1 & P_{b_{11}} = p_{11} \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{b}_{11} \\ P_c = p \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{c} & P_{c_1} = p_1 \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{c}_1 & P_{c_{11}} = p_{11} \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{c}_{11}. \end{array}$$

Zwischen diesen Werten bestehen, da die drei Flächen, das Ellipsoid, das einschalige und das zweischalige Hyperboloid, konfokal sind, d. h. dieselben Fokalkegelschnitte in den Hauptebenen oder dieselben Brennpunkte der Hauptschnitte haben, die Bedingungen:

$$P_b - P_c = P_{b_1} - P_{c_1} = P_{b_{11}} - P_{c_{11}},$$
$$P_c - P_a = P_{c_1} - P_{a_1} = P_{c_{11}} - P_{a_{11}},$$
$$P_a - P_b = P_{a_1} - P_{b_1} = P_{a_{11}} - P_{b_{11}},$$

die sich auch so schreiben lassen:

$$P_a - P_{a_1} = P_b - P_{b_1} = P_c - P_{c_1},$$
$$P_{a_1} - P_{a_{11}} = P_{b_1} - P_{b_{11}} = P_{c_1} - P_{c_{11}},$$
$$P_{a_{11}} - P_a = P_{b_{11}} - P_b = P_{c_{11}} - P_c.$$

Die drei zu einander rechtwinkligen Ebenen $\tau\,\tau_1\,\tau_{11}$ schneiden aus einer der drei übrigen, z. B. der Ebene α, ein Dreiseit heraus, dessen Ecken $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ sind. In dem Tetraeder $\mathfrak{O}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ ist jedes Paar Gegenkanten ein Paar rechtwinklig zu einander gerichteter Strahlen; um den Neigungswinkel zwischen den Ebenen τ und α zu bestimmen, können wir uns eine Ebene durch s normal zur Gegenkante $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}|$ gelegt denken; diese schneidet die Ebene α in dem Perpendikel h, welches aus der Ecke $\mathfrak{a}$ auf die gegenüberliegende Seite $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}|$ des Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ herabgelassen wird und die Ebene τ in dem Perpendikel, welches aus $\mathfrak{O}$ auf die Gerade $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}|$ herabgelassen wird; das letztere Perpendikel läſst sich so ausdrücken:

$$\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}},$$

und wir erhalten daher:

$$\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}} \cdot tg\,(\tau, \alpha) = \mathfrak{O}\mathfrak{a}.$$

Andererseits schneidet die Ebene τ die Normale a der Ebene α im Punkte $\mathfrak{A}$, und wenn wir aus $\mathfrak{M}$ das Perpendikel π auf die Schnittlinie $|\tau\alpha| = |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}|$ herablassen, so ist:

$$\pi \,.\, \mathrm{tg}\,(\tau, \alpha) = \mathfrak{M}\mathfrak{A},$$

also haben wir

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A} \cdot \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}} = \pi \,.\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}^2 .$$

Das Produkt $\mathfrak{O}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}$ ist der sechsfache Inhalt des Tetraëders $\mathfrak{O}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$; derselbe ist, wenn wir mit $\varDelta$ die Fläche des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ bezeichen, auch $= 2\varDelta \,.\, p_a$, also

$$\mathfrak{O}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11} = 2\varDelta \,.\, p_a ,$$

und, wenn wir mit h die aus der Ecke $\mathfrak{a}$ auf die Gegenseite $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}|$ herabgelassene Höhe des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ bezeichnen, so ist:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11} \,.\, h = 2\varDelta ;$$

hieraus folgt die Beziehung:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A} \,.\, p_a = \frac{\pi}{h} \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{a}^2 .$$

Bezeichnen wir weiter durch

$$\pi \quad \pi_1 \quad \pi_{11}$$

die drei Perpendikel, welche aus $\mathfrak{M}$ auf die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ herabgelassen werden und durch

$$h \quad h_1 \quad h_{11}$$

die drei Höhen des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$, so folgen aus den drei Gleichungen:

$$\begin{cases} p_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A} = \dfrac{\pi}{h} \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{a}^2 \\ p_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 = \dfrac{\pi_1}{h_1} \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{a}_1{}^2 \\ p_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11} = \dfrac{\pi_{11}}{h_{11}} \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}^2 \end{cases}$$

verschiedene bemerkenswerte Beziehungen; zunächst durch Multiplikation, weil

$$\mathfrak{O}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11} = 2\varDelta \,.\, p_a$$

und nach bekannten elementaren Sätzen:

$$r h h_1 h_{11} = 2\varDelta^2$$

ist, wo r den Radius des dem Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ umschriebenen Kreises bedeutet:

$$\text{(I)} \qquad p_a \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11} = 2r \,.\, \pi\pi_1\pi_{11} ,$$

ein Resultat, welches sich auch unabhängig von unserer Untersuchung als elementarer stereometrischer Satz aussprechen läſst:

Wenn drei durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ gehende zu einander rechtwinklige Ebenen $\tau\,\tau_1\,\tau_{11}$ aus einer beliebigen Ebene α ein Dreiseit ausschneiden, dessen Ecken $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ seien, und in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{M}$ der Ebene α auf derselben die Normale a errichtet wird, welche von den Ebenen $\tau\,\tau_1\,\tau_{11}$ in den Punkten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_{11}$ getroffen wird; wenn ferner r der Radius des dem Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ umschriebenen Kreises und $\pi\pi_1\pi_{11}$ die drei aus $\mathfrak{M}$ auf die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ herabgelassenen Perpendikel sind, p_a das aus $\mathfrak{O}$ auf die Ebene α herabgelassene Perpendikel bedeutet, so gilt die obige Beziehung (I):

$$p_a\,.\,\mathfrak{M}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1\,.\,\mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11} = 2r\,.\,\pi\pi_1\pi_{11}.$$

Zweitens erhalten wir durch Addition der vorigen drei Gleichungen:

$$p_a\left\{\mathfrak{M}\mathfrak{A} + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11}\right\}$$
$$= \frac{\pi}{h}\,\mathfrak{O}\mathfrak{a}^2 + \frac{\pi_1}{h_1}\,\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1^2 + \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\,\mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}^2.$$

Diese Beziehung läſst eine einfachere Gestalt zu, wenn wir aus $\mathfrak{O}$ das Perpendikel $p_a = \mathfrak{O}\mathfrak{H}$ auf die Ebene α herablassen, dessen Fuſspunkt $\mathfrak{H}$ sei; dann haben wir nämlich:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{O}\mathfrak{a}^2 &= \mathfrak{O}\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{H}\mathfrak{a}^2\\
\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1^2 &= \mathfrak{O}\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{H}\mathfrak{a}_1^2\\
\mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}^2 &= \mathfrak{O}\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{H}\mathfrak{a}_{11}^2
\end{aligned}$$

und ferner in der Ebene α:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}\mathfrak{a}^2 &= \mathfrak{H}\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{a}^2 - 2\,.\,\mathfrak{H}\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}\,.\cos(|\mathfrak{H}\mathfrak{M}|, |\mathfrak{M}\mathfrak{a}|)\\
\mathfrak{H}\mathfrak{a}_1^2 &= \mathfrak{H}\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{a}_1^2 - 2\,.\,\mathfrak{H}\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1\,.\cos(|\mathfrak{H}\mathfrak{M}|, |\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1|)\\
\mathfrak{H}\mathfrak{a}_{11}^2 &= \mathfrak{H}\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}^2 - 2\,.\,\mathfrak{H}\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}.\cos(|\mathfrak{H}\mathfrak{M}|, |\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}|).
\end{aligned}$$

Substituieren wir diese Werte in die obige Relation und berücksichtigen die bekannten elementaren Beziehungen:

$$\frac{\pi}{h} + \frac{\pi_1}{h_1} + \frac{\pi_{11}}{h_{11}} = 1$$

$$\frac{\pi}{h}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}\,.\cos(|\mathfrak{M}\mathfrak{a}|, |\mathfrak{M}\mathfrak{H}|) + \frac{\pi_1}{h_1}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1\,.\cos(|\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1|, |\mathfrak{M}\mathfrak{H}|)$$
$$+ \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}\cdot\cos(|\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}|, |\mathfrak{M}\mathfrak{H}|) = 0$$

$$\frac{\pi}{h}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}^2 + \frac{\pi_1}{h_1}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1^2 + \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}^2 = -P_{\mathfrak{M}}{}^{*)}\ \text{(vgl. S. 556)},$$

*) Wenn man in der Ebene ein Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ und einen beliebigen Punkt $\mathfrak{M}$ hat und die Perpendikel aus $\mathfrak{M}$ auf die Seiten des Drei-

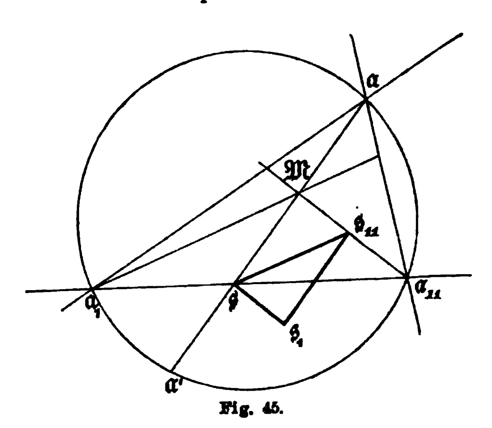


Fig. 45.

ecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ durch $\pi\,\pi_1\,\pi_{11}$, die mit diesen parallelen Höhen durch $h\,h_1\,h_{11}$ bezeichnet (Fig. 45), wenn man ferner die drei Strahlen $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}|$ zieht, und $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}|$ die Gegenseite $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}|$ in $\mathfrak{s}$ trifft, so ist:

$$\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{a}_{11}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}} = \frac{\pi_1}{h_1}\cdot\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{M}} \quad\Big|\quad \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{s}} = \frac{\pi}{h}$$

$$\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_1} = \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\cdot\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{M}} \quad\Big|\quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{M}}{\mathfrak{a}\mathfrak{s}} = 1 - \frac{\pi}{h},$$

und es folgt durch Addition:

$$1)\qquad \frac{\pi}{h} + \frac{\pi_1}{h_1} + \frac{\pi_{11}}{h_{11}} = 1.$$

Ziehen wir durch $\mathfrak{s}$ eine Parallele $|\mathfrak{s}\mathfrak{s}_{11}|$ zu $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{M}|$, welche in $\mathfrak{s}_{11}$ dem Strahle $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}|$ begegne, so ist

$$\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{s}_{11}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{s}\mathfrak{a}_{11}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}} = \frac{\pi_1}{h_1}\cdot\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{M}},$$

also:

$$\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s} = \frac{\pi_1}{h_1}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1\cdot\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{M}};$$

und ziehen wir ferner durch $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}_{11}$ Parallele zu $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}|$ und $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}|$, die sich in $\mathfrak{s}_1$ treffen, so wird $\mathfrak{M}\mathfrak{s}_{11} = \mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$, also

$$\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}} = \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\cdot\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{M}},$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1 = \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}\cdot\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{M}};$$

wo $P_{\mathfrak{M}}$ die Potenz des Punktes $\mathfrak{M}$ in Bezug auf den dem Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ umschriebenen Kreis bedeutet, so folgt, weil

---

endlich ist $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{11} = \mathfrak{s}\mathfrak{M} = \frac{\pi}{h} \cdot \mathfrak{s}\mathfrak{a}$, oder

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{11} = \frac{\pi}{h}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a} \cdot \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{M}}.$$

Die drei Seiten des Dreiecks $\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_{11}$ haben also folgende Werte:

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{11} = \frac{\pi}{h}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a} \cdot \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{M}}\,; \quad \mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s} = \frac{\pi_1}{h_1}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_1 \cdot \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{M}}\,;$$

$$\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1 = \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11} \cdot \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{M}}\,;$$

wenn man die Seiten des Dreiecks, in bestimmtem Sinne herum durchlaufen, auf irgend eine gerade Linie g projiziert, so ist bekanntlich die algebraische Summe der Projektionen gleich Null, und da die Richtungen der Seiten $|\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{11}|$, $|\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s}|$, $|\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1|$ dieselben sind, wie diejenigen der Strahlen $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}|$, so folgt:

$$2)\quad \begin{cases} \frac{\pi}{h}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a} \,.\, \cos(|\mathfrak{M}\mathfrak{a}|, g) + \frac{\pi_1}{h_1}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_1 \,.\, \cos(|\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1|, g) \\ \qquad\qquad + \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11} \,.\, \cos(|\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}|, g) = 0\,. \end{cases}$$

Drittens gilt in dem Dreieck $\mathfrak{a}_1\mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}$, dessen Grundlinie $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ den Punkt $\mathfrak{s}$ enthält, die bekannte Relation:

$$\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{a}_{11}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{a}_1^2 + \frac{\mathfrak{s}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_1} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{s}^2 - \mathfrak{s}\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{s}\mathfrak{a}_{11}\,,$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{\pi_1}{h_1}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_1^2 + \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}^2 = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}}{\mathfrak{s}\mathfrak{a}}\, \mathfrak{M}\mathfrak{s}^2 - \mathfrak{s}\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{s}\mathfrak{a}_{11} \,.\, \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{a}}{\mathfrak{s}\mathfrak{a}}\,,$$

und da $\frac{\pi}{h} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}$, also $\frac{\pi}{h}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}^2 = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{s} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}$ ist, so folgt:

$$\frac{\pi}{h}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}^2 + \frac{\pi_1}{h_1}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_1^2 + \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{s}\mathfrak{M} - \mathfrak{M}\mathfrak{a} \,.\, \frac{\mathfrak{s}\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{s}\mathfrak{a}_{11}}{\mathfrak{s}\mathfrak{a}}.$$

Denken wir uns nun um das Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ einen Kreis gelegt, und schneidet $|\mathfrak{M}\mathfrak{a}|$ denselben zum andern Male in $\mathfrak{a}'$, so ist die Potenz des Punktes $\mathfrak{s}$ in Bezug auf den umschriebenen Kreis:

$$\mathfrak{s}\mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{s}\mathfrak{a}_{11} = \mathfrak{s}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{s}\mathfrak{a}'\,,$$

folglich:

$$\frac{\pi}{h}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}^2 + \frac{\pi_1}{h_1}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_1^2 + \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}^2 = -\, \mathfrak{M}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}'\,,$$

d. h. gleich der negativen Potenz des Punktes $\mathfrak{M}$ in Bezug auf den dem Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ umschriebenen Kreis, also

$$\frac{\pi}{h}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}^2 + \frac{\pi_1}{h_1}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_1^2 + \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\, \mathfrak{M}\mathfrak{a}_{11}^2 = -\, P_{\mathfrak{M}}.$$

$$\mathfrak{O}\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{H}\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{O}\mathfrak{M}^2$$

ist, die zweite Beziehung:

$$\text{(II)} \qquad p_a(\mathfrak{M}\mathfrak{A} + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11}) = \mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 - P_{\mathfrak{M}},$$

welche sich als elementarer stereometrischer Satz so aussprechen läſst:

Wenn drei durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ gehende zu einander rechtwinklige Ebenen $\tau\,\tau_1\,\tau_{11}$ aus einer beliebigen Ebene α ein Dreiseit ausschneiden, dessen Ecken $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ seien, und in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{M}$ der Ebene α auf derselben die Normale a errichtet wird, welche von den Ebenen $\tau\tau_1\tau_{11}$ in den Punkten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_{11}$ getroffen wird; wenn ferner $P_{\mathfrak{M}}$ die Potenz des Punktes $\mathfrak{M}$ in Bezug auf den dem Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ umschriebenen Kreis und p_a das aus $\mathfrak{O}$ auf die Ebene α herabgelassene Perpendikel bedeutet, so gilt die obige Beziehung (II):

$$p_a(\mathfrak{M}\mathfrak{A} + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11}) = \mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 - P_{\mathfrak{M}}.$$

Von den mannigfachen metrischen Beziehungen, welche sich aus dem Obigen ergeben, wollen wir nur noch folgende hervorheben:

Aus den Gleichungen:

$$p_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A} = \frac{\pi}{h}\,\mathfrak{O}\mathfrak{a}^2$$

$$p_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 = \frac{\pi_1}{h_1}\,\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1{}^2$$

$$p_a \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11} = \frac{\pi_{11}}{h_{11}}\,\mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}^2$$

folgt durch Addition, weil $\frac{\pi}{h} + \frac{\pi_1}{h_1} + \frac{\pi_{11}}{h_{11}} = 1$ ist, nach dem Obigen (S. 669):

$$\frac{p}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}} + \frac{p_1}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1} + \frac{p_{11}}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}} = 1,$$

eine Beziehung, welche sich ebenfalls leicht in Worte kleiden läſst:

Wenn drei durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ gehende zu einander rechtwinklige Ebenen $\tau\,\tau_1\,\tau_{11}$ aus einer beliebigen Ebene α ein Dreiseit ausschneiden, dessen Ecken $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$ seien, und aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{M}$ der Ebene α auf die drei Ebenen $\tau\,\tau_1\,\tau_{11}$ die

Perpendikel $p p_1 p_{11}$ herabgelassen werden, deren Strecken in entgegengesetztem Richtungsinne genommen werden, so gilt die Beziehung:

$$\frac{p}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}} + \frac{p_1}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1} + \frac{p_{11}}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}} = 1$$

(welche bekanntlich in der analytischen Geometrie die Gleichung der Ebene im rechtwinkligen Koordinatensysteme liefert).

Bemerken wir ferner, daſs das aus $\mathfrak{M}$ auf die Ebene τ herabgelassene Perpendikel p sich so ausdrücken läſst:

$$p = \mathfrak{M}\mathfrak{A} \,.\, \cos(p, a)$$
$$p = \mathfrak{M}\mathfrak{B} \,.\, \cos(p, b)$$
$$p = \mathfrak{M}\mathfrak{C} \cdot \cos(p, c),$$

und daſs bekanntlich wegen der Rechtwinkligkeit der drei Strahlen $a\ b\ c$ unter einander

$$\cos^2(p, a) + \cos^2(p, b) + \cos^2(p, c) = 1$$

ist (S. 383), so folgt:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{C}^2} = \dfrac{1}{p^2} \text{ und analog} \\ \dfrac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}_1^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{C}_1^2} = \dfrac{1}{p_1^2} \\ \dfrac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11}^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}_{11}^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{C}_{11}^2} = \dfrac{1}{p_{11}^2}. \end{cases}$$

In gleicher Weise gelten die Beziehungen:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11}^2} = \dfrac{1}{p_a^2} \\ \dfrac{1}{\mathfrak{O}\mathfrak{b}^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_1^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{O}\mathfrak{b}_{11}^2} = \dfrac{1}{p_b^2} \\ \dfrac{1}{\mathfrak{O}\mathfrak{c}^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{O}\mathfrak{c}_1^2} + \dfrac{1}{\mathfrak{O}\mathfrak{c}_{11}^2} = \dfrac{1}{p_c^2}. \end{cases}$$

Wir kehren nach diesen vorbereitenden Ermittelungen zu der Betrachtung der drei in $\mathfrak{O}$ sich durchkreuzenden konfokalen Flächen zurück, welche die drei in $\mathfrak{M}$ sich durchkreuzenden Strahlen $a\ b\ c$ zu Hauptaxen und die drei sie paarweise verbindenden Ebenen $\alpha\ \beta\ \gamma$ zu Hauptebenen haben. Alle Flächen der konfokalen Schar haben in den drei Hauptebenen dieselben Fokalkegelschnitte; diese haben ebenfalls $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunkt und zu Potenzen der Punktinvolutionen auf ihren Hauptaxen, wie wir früher gefunden haben, die Werte:

$\alpha = [bc]$-Ebene:		$\beta = [ca]$-Ebene:		$\gamma = [ab]$-Ebene:	
b-Axe:	$P_b - P_a$	c-Axe:	$P_c - P_b$	a-Axe:	$P_a - P_c$
c-Axe:	$P_c - P_a$	a-Axe:	$P_a - P_b$	b-Axe:	$P_b - P_c$,

welche Werte ungeändert bleiben, wenn wir an Stelle von $P_a P_b P_c$ setzen $P_{a_1} P_{b_1} P_{c_1}$ oder $P_{a_{11}} P_{b_{11}} P_{c_{11}}$.

Wir haben aber auch früher gesehen, dafs die drei Berührungsebenen $\tau\,\tau_1\,\tau_{11}$ im Punkte $\mathfrak{O}$ an den drei konfokalen Flächen auf der Hauptebene α ein Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ ausschneiden, welches ein Polardreieck sein mufs für den in der Ebene α enthaltenen (reellen oder imaginären) Fokalkegelschnitt. Durch ein Polardreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ und den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ ist ein ebenes Polarsystem vollständig bestimmt, und wir kennen (Th. d. K. S. 219) von den Potenzwerten der Punktinvolutionen auf den Hauptaxen

$$\text{die Summe } = P_{\mathfrak{M}}$$
$$\text{und das Produkt } = 2r\pi\pi_1\pi_{11},$$

wo $P_{\mathfrak{M}}$ die Potenz des Punktes $\mathfrak{M}$ in Bezug auf den dem Polardreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ umschriebenen Kreis, dessen Radius r ist, und $\pi\pi_1\pi_{11}$ die drei Perpendikel aus $\mathfrak{M}$ auf die Seiten des Polardreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{11}$ bedeuten.

Benutzen wir also diese bekannten Beziehungen, so gestalten sich die oben gefundenen Resultate (I) und (II) folgendermafsen:

$$\text{(I')} \quad p_a \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11} = (P_b - P_a)(P_c - P_a)$$
$$\text{(II')} \quad p_a \left\{\mathfrak{M}\mathfrak{A} + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11}\right\} = \mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 - (P_b - P_a) - (P_c - P_a).$$

Betrachten wir von diesen beiden Resultaten zunächst das erste und seine beiden analogen, so können wir sie, durch Potenzwerte ausgedrückt, so schreiben:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} P_a \,.\, P_{a_1} \,.\, P_{a_{11}} = p_a^2 (P_b - P_a)(P_c - P_a) \\ P_b \,.\, P_{b_1} \,.\, P_{b_{11}} = p_b^2 (P_c - P_b)(P_a - P_b) \\ P_c \,.\, P_{c_1} \,.\, P_{c_{11}} = p_c^2 (P_a - P_c)(P_b - P_c); \end{cases}$$

wenn wir aber die Potenzwerte durch die auf S. 668 u. 669 gefundenen Ausdrücke ersetzen, so erhalten wir die Beziehungen:

$$\text{(III')}\quad \begin{cases} p_a \cdot \mathfrak{MA} \cdot \mathfrak{MA}_1 \cdot \mathfrak{MA}_{11} = p^2 \cdot \mathfrak{ab} \cdot \mathfrak{ac} \\ p_b \cdot \mathfrak{MB} \cdot \mathfrak{MB}_1 \cdot \mathfrak{MB}_{11} = p^2 \cdot \mathfrak{bc} \cdot \mathfrak{ba} \\ p_c \cdot \mathfrak{MC} \cdot \mathfrak{MC}_1 \cdot \mathfrak{MC}_{11} = p^2 \cdot \mathfrak{ca} \cdot \mathfrak{cb}. \end{cases}$$

Die erste dieser drei Gleichungen läfst sich so schreiben:

$$\frac{p_a\{\mathfrak{MA}+\mathfrak{AA}_1\}\{\mathfrak{MA}+\mathfrak{AA}_{11}\}}{\mathfrak{MA}\cdot\mathfrak{ab}\cdot\mathfrak{ac}} = \frac{p^2}{\mathfrak{MA}^2};$$

gestalten wir in ähnlicher Weise die beiden andern Gleichungen um, addieren alle drei und bemerken, dafs

$$\frac{p^2}{\mathfrak{MA}^2} + \frac{p^2}{\mathfrak{MB}^2} + \frac{p^2}{\mathfrak{MC}^2} = 1$$

ist, so erhalten wir, wenn wir links die Multiplikation ausführen und die obigen Beziehungen benutzen:

$$p\left\{\frac{\mathfrak{Da}}{\mathfrak{ab}\cdot\mathfrak{ac}} + \frac{\mathfrak{Db}}{\mathfrak{bc}\cdot\mathfrak{ba}} + \frac{\mathfrak{Dc}}{\mathfrak{ca}\cdot\mathfrak{cb}}\right\}$$

$$+ p_a(\mathfrak{AA}_1+\mathfrak{AA}_{11})\left\{\frac{1}{\mathfrak{ab}\cdot\mathfrak{ac}} + \frac{1}{\mathfrak{bc}\cdot\mathfrak{ba}} + \frac{1}{\mathfrak{ca}\cdot\mathfrak{cb}}\right\}$$

$$+ p_a^2\cdot\frac{\mathfrak{AA}_1\cdot\mathfrak{AA}_{11}}{p}\left\{\frac{1}{\mathfrak{Da}\cdot\mathfrak{ab}\cdot\mathfrak{ac}} + \frac{1}{\mathfrak{Db}\cdot\mathfrak{bc}\cdot\mathfrak{ba}} + \frac{1}{\mathfrak{Dc}\cdot\mathfrak{ca}\cdot\mathfrak{cb}}\right\} = 1.$$

Nun liegen aber die vier Punkte $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ auf einer Geraden s, und es gelten für vier beliebige Punkte $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ einer Geraden die identischen Beziehungen:

$$\frac{\mathfrak{Da}}{\mathfrak{ab}\cdot\mathfrak{ac}} + \frac{\mathfrak{Db}}{\mathfrak{bc}\cdot\mathfrak{ba}} + \frac{\mathfrak{Dc}}{\mathfrak{ca}\cdot\mathfrak{cb}} = 0$$

$$\frac{1}{\mathfrak{ab}\cdot\mathfrak{ac}} + \frac{1}{\mathfrak{bc}\cdot\mathfrak{ba}} + \frac{1}{\mathfrak{ca}\cdot\mathfrak{cb}} = 0$$

$$\frac{1}{\mathfrak{Da}\cdot\mathfrak{ab}\cdot\mathfrak{ac}} + \frac{1}{\mathfrak{Db}\cdot\mathfrak{bc}\cdot\mathfrak{ba}} + \frac{1}{\mathfrak{Dc}\cdot\mathfrak{ca}\cdot\mathfrak{cb}} = \frac{1}{\mathfrak{Da}\cdot\mathfrak{Db}\cdot\mathfrak{Dc}}\ ^{*)};$$

---

*) Die beiden ersten identischen Relationen sind in Th. d. K. (S. 4 und 5) angegeben; die letztere folgt aus der dort abgeleiteten Relation:

$$\frac{\mathfrak{Da}^2}{\mathfrak{ab}\cdot\mathfrak{ac}} + \frac{\mathfrak{Db}^2}{\mathfrak{bc}\cdot\mathfrak{ba}} + \frac{\mathfrak{Dc}^2}{\mathfrak{ca}\cdot\mathfrak{cb}} = 1,$$

wenn wir die beiden Beziehungen $\frac{\mathfrak{Db}}{\mathfrak{ab}} = 1 + \frac{\mathfrak{Da}}{\mathfrak{ab}}$ und $\frac{\mathfrak{Dc}}{\mathfrak{ac}} = 1 + \frac{\mathfrak{Da}}{\mathfrak{ac}}$ mit einander multiplizieren, die beiden analogen hinzufügen und addieren:

$$\frac{\mathfrak{Db}\cdot\mathfrak{Dc}}{\mathfrak{ab}\cdot\mathfrak{ac}} + \frac{\mathfrak{Dc}\cdot\mathfrak{Da}}{\mathfrak{bc}\cdot\mathfrak{ba}} + \frac{\mathfrak{Da}\cdot\mathfrak{Db}}{\mathfrak{ca}\cdot\mathfrak{cb}}$$

$$= 4 + \mathfrak{Da}\left(\frac{1}{\mathfrak{ab}} + \frac{1}{\mathfrak{ac}}\right) + \mathfrak{Db}\left(\frac{1}{\mathfrak{bc}} + \frac{1}{\mathfrak{ba}}\right) + \mathfrak{Dc}\left(\frac{1}{\mathfrak{ca}} + \frac{1}{\mathfrak{cb}}\right) = 1.$$

demgemäfs erhalten wir die Beziehungen:

$$(\mathrm{IV}')\begin{cases} p \;.\, \mathfrak{O}\mathfrak{a} \;.\, \mathfrak{O}\mathfrak{b} \;.\, \mathfrak{O}\mathfrak{c} = p_a^2 .\, \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \;.\, \mathfrak{A}\mathfrak{A}_{11} & \text{und ebenso} \\ p_1 .\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}_1 .\, \mathfrak{O}\mathfrak{b}_1 .\, \mathfrak{O}\mathfrak{c}_1 = p_a^2 .\, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{11} .\, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A} \\ p_{11} .\, \mathfrak{O}\mathfrak{a}_{11} .\, \mathfrak{O}\mathfrak{b}_{11} .\, \mathfrak{O}\mathfrak{c}_{11} = p_a^2 .\, \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A} .\, \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_1 \end{cases}$$

oder, wenn wir wiederum die Potenzwerte der Punktinvolutionen zurücksubstituieren:

$$(\mathrm{IV})\begin{cases} P_a \;.\, P_b \;.\, P_c = p^2\,(P_a - P_{a_1})\,(P_a - P_{a_{11}}) \\ P_{a_1} .\, P_{b_1} .\, P_{c_1} = p_1^2\,(P_{a_1} - P_{a_{11}})\,(P_{a_1} - P_a) \\ P_{a_{11}} .\, P_{b_{11}} .\, P_{c_{11}} = p_{11}^2\,(P_{a_{11}} - P_a)\,(P_{a_{11}} - P_{a_1}). \end{cases}$$

Betrachten wir an zweiter Stelle die Beziehung (II'), so können wir dieselbe und ihre beiden analogen also schreiben:

$$(\mathrm{V})\begin{cases} P_a + P_{a_1} + P_{a_{11}} = \mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 + (P_a - P_b) + (P_a - P_c) \\ P_b + P_{b_1} + P_{b_{11}} = \mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 + (P_b - P_c) + (P_b - P_a) \\ P_c + P_{c_1} + P_{c_{11}} = \mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 + (P_c - P_a) + (P_c - P_b); \end{cases}$$

aus der ersten derselben folgt:

$$P_{a_1} + P_{a_{11}} = \mathfrak{M}\mathfrak{O}^2 + P_a - P_b - P_c,$$

also

$$P_a + P_b + P_c = \mathfrak{M}\mathfrak{O}^2 + (P_a - P_{a_1}) + (P_a - P_{a_{11}})$$

woraus die drei den vorigen (V) entsprechenden Beziehungen hervorgehen:

$$(\mathrm{VI})\begin{cases} P_a + P_b + P_c = \mathfrak{M}\mathfrak{O}^2 + (P_a - P_{a_1}) + (P_a - P_{a_{11}}) \\ P_{a_1} + P_{b_1} + P_{c_1} = \mathfrak{M}\mathfrak{O}^2 + (P_{a_1} - P_{a_{11}}) + (P_{a_1} - P_a) \\ P_{a_{11}} + P_{b_{11}} + P_{c_{11}} = \mathfrak{M}\mathfrak{O}^2 + (P_{a_{11}} - P_a) + (P_{a_{11}} - P_{a_1}). \end{cases}$$

Die Beziehungen (III) (IV) (V) (VI) lassen eine gewisse Reziprozität erkennen, wonach die Ebenen $\tau\ \tau_1\ \tau_{11}$ mit den Ebenen $\alpha\ \beta\ \gamma$ vertauschbar sind, und die sich in folgendem Satze aussprechen läfst:

Wenn drei durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ gehende zu einander rechtwinklige Ebenen $\tau\ \tau_1\ \tau_{11}$ aus einer beliebigen Ebene α ein Dreiseit ausschneiden, dessen Ecken $\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_{11}$ seien, und in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{M}$ der Ebene α auf derselben die Normale a errichtet wird; wenn man ferner in der Ebene α

den Punkt $\mathfrak{M}$ als den Mittelpunkt und das Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_{1}\,\mathfrak{a}_{11}$ als ein Polardreieck eines ebenen Polarsystems auffafst, welches dadurch gerade bestimmt wird, und dessen Axen durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ die Geraden b und c seien, dann werden die drei Ebenen:

$$[bc] = \alpha \quad [ca] = \beta \quad [ab] = \gamma$$

zu den drei ursprünglichen Ebenen $\tau\,\tau_{1}\,\tau_{11}$ eine solche eigentümliche Lage haben, dafs von diesen sechs Ebenen jede durch die fünf übrigen in einem Paar Hauptaxen und einem Polardreiseit eines ebenen Polarsystems durchschnitten wird.

Die in dem Vorstehenden abgeleiteten metrischen Beziehungen, deren Anzahl sich noch vermehren läfst, gestatten eine mehrseitige geometrische Interpretation, die zu Eigenschaften der Krümmungslinien der Flächen 2. O. führt.

Betrachten wir z. B. die Beziehung (I') und dividieren dieselbe durch $p_a \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A} = P_a$, so folgt:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A}_{1} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11} = \frac{(P_b - P_a)(P_c - P_a)}{P_a}.$$

Halten wir jetzt das Ellipsoid, für welches $P_a\ P_b\ P^c$ die Potenzen der Punktinvolutionen auf den drei Hauptaxen sind, fest und verändern den Punkt $\mathfrak{O}$ willkürlich auf dem Ellipsoid, so ändern sich die jedesmaligen beiden Hauptnormalebenen $\tau_{1}\ \tau_{11}$ (S. 666) des Punktes $\mathfrak{O}$, also mit ihnen auch die Schnittpunkte derselben mit der a-Axe, aber das Rechteck $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_{1} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11}$ bleibt konstant; folglich sind $\mathfrak{A}_{1}$ und $\mathfrak{A}_{11}$ Punktepaare einer Punktinvolution auf der a-Axe, deren Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ ist, und wir erhalten den Satz:

Wenn man in jedem Punkte eines Ellipsoids (einer Mittelpunktsfläche 2. O.) die beiden Hauptnormalebenen konstruiert, so treffen dieselben jede der drei Hauptaxen in Punktepaaren einer Punktinvolution. deren Mittelpunkt der Mittelpunkt des Ellipsoids ist.

Dasselbe gilt in gleicher Weise für das einschalige und zweischalige Hyperboloid, wie wir sofort erkennen, wenn wir die vorige Beziehung so schreiben:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11} = \frac{(P_{b_1} - P_{a_1})(P_{c_1} - P_{a_1})}{P_{a_1}}$$

und

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{1} = \frac{(P_{b_{11}} - P_{a_{11}})(P_{c_{11}} - P_{a_{11}})}{P_{a_{11}}} \,.$$

Diese neuen Punktinvolutionen auf den drei Hauptaxen der Fläche 2. O. werden hyperbolisch oder elliptisch sein, je nachdem ihre Potenzen positive oder negative Werte haben; es besteht aber eine Beziehung zwischen solchen drei Potenzwerten, aus welcher wir sofort einen Schlufs auf ihren hyperbolischen oder elliptischen Charakter ziehen können. Ersetzen wir nämlich die Werte P_a, P_b, P_c durch die ihnen gleichen $p.\mathfrak{O}\mathfrak{a}$, $p.\mathfrak{O}\mathfrak{b}$, $p.\mathfrak{O}\mathfrak{c}$, so folgt nach (III'):

$$\frac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{a}\mathfrak{c}}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{B}_{11}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{b}\mathfrak{a}}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{C}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{C}_{11}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c}\mathfrak{b}} \,,$$

und vermöge der obigen Identität:

$$\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{a}\mathfrak{c}} + \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{b}\mathfrak{a}} + \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c}\mathfrak{b}} = 0$$

ergiebt sich:

$$\frac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11}} + \frac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{B}_{11}} + \frac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{C}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{C}_{11}} = 0.$$

Hieraus folgt, dafs die drei Potenzwerte der neuen Punktinvolutionen auf den drei Hauptaxen weder alle drei hyperbolisch, noch alle drei elliptisch, sondern notwendig entweder zwei hyperbolisch und eine elliptisch, oder zwei elliptisch und eine hyperbolisch sein müssen. Dies gilt sowohl für das Ellipsoid, als auch für das ein- und zweischalige Hyperboloid; welcher von den beiden übrigbleibenden Fällen nun aber wirklich bei jeder dieser drei Flächen eintritt, können wir geradezu ermitteln aus den Potenzen der den Flächen selbst zugehörigen Involutionen auf den Hauptaxen.

1) Für das Ellipsoid haben wir:

$P_a > 0$, $P_b > 0$, $P_c > 0$ und nehmen an $P_a > P_b > P_c$, dann werden die Werte der Potenzen der neuen Punktinvolutionen:

auf der a-Axe: $\dfrac{(P_b - P_a)(P_c - P_a)}{P_a}$

positiv, also die Involution hyperbolisch,

auf der b-Axe: $\dfrac{(P_c - P_b)(P_a - P_b)}{P_b}$

negativ, also die Involution elliptisch,

auf der c-Axe: $\dfrac{(P_a - P_c)(P_b - P_c)}{P_c}$

positiv, also die Involution hyperbolisch.

Auf der gröſsten und kleinsten Axe des Ellipsoids sind daher die neuen Punktinvolutionen hyperbolisch, auf der mittleren elliptisch.

2) Für das einschalige Hyperboloid haben wir:

$P_{a_1} > 0,\ P_{b_1} > 0,\ P_{c_1} < 0$ und nehmen an $P_{a_1} > P_{b_1}$,

dann werden die Werte der Potenzen der neuen Punktinvolutionen:

auf der a_1-Axe: $\dfrac{(P_{b_1} - P_{a_1})(P_{c_1} - P_{a_1})}{P_{a_1}}$

positiv, also die Involution hyperbolisch,

auf der b_1-Axe: $\dfrac{(P_{c_1} - P_{b_1})(P_{a_1} - P_{b_1})}{P_{b_1}}$

negativ, also die Involution elliptisch,

auf der c_1-Axe: $\dfrac{(P_{a_1} - P_{c_1})(P_{b_1} - P_{c_1})}{P_{c_1}}$

negativ, also die Involution elliptisch.

Auf der gröſseren der beiden reellen Hauptaxen des einschaligen Hyperboloids sind daher die neuen Punktinvolutionen hyperbolisch, auf den beiden andern Hauptaxen elliptisch.

3) Für das zweischalige Hyperboloid haben wir:

$P_{a_{11}} > 0,\ P_{b_{11}} < 0,\ P_{c_{11}} < 0$ und nehmen an $(-P_{b_{11}}) < (-P_{c_{11}})$,

dann werden die Werte der Potenzen der neuen Punktinvolutionen:

auf der a_{11}-Axe: $\dfrac{(P_{b_{11}} - P_{a_{11}})(P_{c_{11}} - P_{a_{11}})}{P_{a_{11}}}$

positiv, also die Involution hyperbolisch,

$$\text{auf der } b_{11}\text{-Axe: } \frac{(P_{c_{11}} - P_{b_{11}})(P_{a_{11}} - P_{b_{11}})}{P_{b_{11}}}$$

positiv, also die Involution hyperbolisch,

$$\text{auf der } c_{11}\text{-Axe: } \frac{(P_{a_{11}} - P_{c_{11}})(P_{b_{11}} - P_{c_{11}})}{P_{c_{11}}}$$

negativ, also die Involution elliptisch.

Auf der reellen Hauptaxe und auf derjenigen der beiden imaginären Hauptaxen, deren absoluter Potenzwert der kleinere ist, sind daher die neuen Punktinvolutionen hyperbolisch, auf der dritten elliptisch.

Wir nennen die Asymptotenpunkte (Doppelpunkte) der neuen Punktinvolutionen, mögen dieselben hyperbolisch oder elliptisch sein, die Fokalpunkte der Fläche 2. O., und haben demnach folgendes Ergebnis:

Sowohl das Ellipsoid, als auch das zweischalige Hyperboloid haben vier reelle und zwei imaginäre, das einschalige Hyperboloid zwei reelle und vier imaginäre Fokalpunkte auf den Hauptaxen.

Die reellen Fokalpunkte bei den nicht-geradlinigen Flächen 2. O. lassen eine sehr einfache Konstruktion zu, wenn wir Folgendes bemerken:

Die Berührungsebene in einem Punkte einer Fläche 2. O. enthält, wie wir wissen, immer eine Strahleninvolution, deren Mittelpunkt der Berührungspunkt ist, und deren Doppelstrahlen das (reelle oder imaginäre) Linienpaar bildet, in welchem die Berührungsebene die Fläche schneidet; die immer reellen Hauptaxen dieser Strahleninvolution sind die Haupttangenten in dem Berührungspunkte, und die durch dieselben und die Normale der Fläche gelegten Ebenen die Hauptnormalebenen. Durch jeden Punkt der Fläche gehen also im allgemeinen zwei zu einander rechtwinklige Hauptnormalebenen. Es giebt aber besondere Punkte bei den nicht geradlinigen Flächen 2. O., die wir Kreispunkte genannt haben, für welche die vorige Strahleninvolution eine orthogonale wird; ein Kreispunkt hat also nicht bloſs ein einziges Paar Hauptnormalebenen, sondern unendlich-viele Paare, welche eine orthogonale Ebeneninvolution bilden, deren Axe

die Normale der Fläche im Kreispunkte ist. Die vier Kreispunkte einer Fläche 2. O. liegen, wie wir wissen, in einer der drei Hauptebenen, in welcher mithin auch ihre Normalen liegen; da nun jedes Paar Hauptnormalebenen die drei Hauptaxen der Fläche in einem Paar konjugierter Punkte der neuen Punktinvolution schneiden, so ergiebt sich folgendes Resultat:

Die Normalen in den Kreispunkten einer Fläche 2. O. bilden ein Parallelogramm, dessen Ecken die rellen Fokalpunkte der Fläche sind. Die orthogonale Ebeneninvolution, welche durch die Normale eines Kreispunktes als Axe gelegt werden kann, schneidet auf derjenigen (dritten) Hauptaxe der Fläche 2. O., welche von dieser Normale nicht getroffen wird, eine elliptische Punktinvolution aus, welche die beiden übrigen imaginären Fokalpunkte der Fläche vertritt.

Nehmen wir nun irgend ein Paar reeller Fokalpunkte einer der drei Flächen heraus, z. B. für das Ellipsoid die reellen Fokalpunkte auf der a-Axe:

$$\mathfrak{f}_a \text{ und } \mathfrak{f}'_a,$$

d. h. die Asymptotenpunkte der hyperbolischen Punktinvolution auf der a-Axe, deren Potenz den Wert hat:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11} = \frac{(P_b - P_a)(P_c - P_a)}{P_a} = \mathfrak{M}\mathfrak{f}_a^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{f}_a'^2,$$

so geben die oben gefundenen Beziehungen (IV) u. a. folgende Gleichung:

$$P_{a_1} \cdot P_{b_1} \cdot P_{c_1} = p_1^2 (P_{a_1} - P_{a_{11}})(P_{a_1} - P_a);$$

aus dieser folgt:

$$\frac{(P_{a_1} - P_{a_{11}}) \cdot p_1^2}{P_{a_1}} = \frac{P_{b_1} \cdot P_{c_1}}{P_{a_1} - P_a},$$

oder nach den früher ermittelten Ausdrücken der Potenzwerte:

$$p_a (\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11}) \frac{p_1}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1} = \frac{p_a^2}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1^2} \{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1^2 - \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11}\}$$
$$= \frac{P_{b_1} P_{c_1}}{P_{a_1} - P_a}.$$

Es ist aber:

$$\frac{p_a}{\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1} = \sin(s_1, \alpha) = \cos(\tau_1, a)$$

und

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{11} = \mathfrak{M}\mathfrak{f}_a^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{f}_a'^2,$$

also erhalten wir:

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1^2 - \mathfrak{M}\mathfrak{f}_a^2) \,.\, \cos^2(a, \tau_1) = \frac{P_{b_1} \,.\, P_{c_1}}{P_{a_1} - P_a};$$

die linke Seite zerfällt aber in das Produkt:

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{M}\mathfrak{f}_a)(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{M}\mathfrak{f}_a) \,.\, \cos^2(a, \tau_1)$$

oder

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{f}_a'\mathfrak{M})(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{f}_a\mathfrak{M}) \,.\, \cos^2(a, \tau_1)$$

oder

$$\mathfrak{f}_a\mathfrak{A}_1 \,.\, \mathfrak{f}_a'\mathfrak{A}_1 \cos^2(a, \tau_1),$$

also wird die letzte Gleichung:

$$\mathfrak{f}_a\mathfrak{A}_1 \,.\, \cos(a, \tau_1) \,.\, \mathfrak{f}_a'\mathfrak{A}_1 \,.\, \cos(a, \tau_1) = \frac{P_{b_1} \,.\, P_{c_1}}{P_{a_1} - P_a}.$$

Links steht das Produkt der Perpendikel aus den Fokalpunkten $\mathfrak{f}_a$ und $\mathfrak{f}_a'$ auf die Hauptnormalebene τ_1; verändern wir dieselben entlang derjenigen Krümmungslinie, in welcher das Ellipsoid von dem konfokalen einschaligen Hyperboloid durchschnitten wird, so bleibt die rechte Seite $\frac{P_{b_1} \,.\, P_{c_1}}{P_{a_1} - P_a}$ der vorigen Gleichung von konstantem Werte, also gilt der Satz:

Das Produkt der Abstände einer Hauptnormalebene von zwei Fokalpunkten auf einer Hauptaxe einer Fläche 2. O. bleibt von unverändertem Werte, wenn diese Ebene sich längs einer Krümmungslinie der Fläche fortbewegt.

Wir haben dieses Resultat gleich in seiner Allgemeinheit ausgesprochen, weil es sich in ganz gleicher Weise für ein anderes Paar Fokalpunkte, eine andere Krümmungslinie und eine der beiden andern konfokalen Flächen ableiten läfst. Seine Analogie mit bekannten Eigenschaften des Kegelschnitts springt in die Augen.

Da die reellen Fokalpunkte bei den beiden nicht-geradlinigen Flächen 2. O. die Durchschnittspunkte der Normalen in den Kreispunkten der Fläche sind, so lassen sich leicht die Abstände der Fokalpunkte von den Kreispunkten ermitteln.

Sei z. B. $\mathfrak{k}$ ein Kreispunkt des Ellipsoids, gelegen auf der Hauptellipse $\mathfrak{E}_{ac}^{(2)}$, und schneidet die Normale des Kreispunktes $\mathfrak{k}$ die beiden Hauptaxen a und c in den Fokalpunkten $\mathfrak{f}_a$ und $\mathfrak{f}_c$, so gilt die Beziehung (Th. d. K. S. 172):

$$\frac{\mathfrak{k}\mathfrak{f}_a}{\mathfrak{k}\mathfrak{f}_c} = \frac{P_c}{P_a}, \quad \text{also} \quad \frac{\mathfrak{f}_a\mathfrak{f}_c}{\mathfrak{k}\mathfrak{f}_c} = \frac{P_a - P_c}{P_a};$$

aus den Werten:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{f}_a^2 = \frac{(P_b - P_a)(P_c - P_a)}{P_a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}\mathfrak{f}_c^2 = \frac{(P_a - P_c)(P_b - P_c)}{P_c}$$

ergiebt sich aber wegen des rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{f}_a\mathfrak{M}\mathfrak{f}_c$:

$$\mathfrak{f}_a\mathfrak{f}_c^2 = \frac{(P_a - P_c)}{P_a P_c} \{P_c(P_a - P_b) + P_a(P_b - P_c)\}$$

$$= \frac{(P_a - P_c)^2}{P_a P_c} \cdot P_b$$

und daher:

$$\begin{cases} \mathfrak{k}\mathfrak{f}_a^2 = \dfrac{P_b \cdot P_c}{P_a} \\ \mathfrak{k}\mathfrak{f}_c^2 = \dfrac{P_a \cdot P_b}{P_c}. \end{cases}$$

Die Entfernungen der Kreispunkte von den Fokalpunkten des Ellipsoids erscheinen hiernach als die vierten Proportionalen aus den Werten der drei Hauptaxen; in gleicher Weise ermitteln wir diese Abstände für das zweischalige Hyperboloid, wo unserer obigen Annahme gemäfs die Kreispunkte $\mathfrak{k}_{11}$ und die reellen Fokalpunkte $\mathfrak{f}_{a_{11}}$ und $\mathfrak{f}'_{a_{11}}$, $\mathfrak{f}_{b_{11}}$ und $\mathfrak{f}'_{b_{11}}$ in der $[a_{11}\, b_{11}]$-Ebene gelegen sind, nämlich:

$$\begin{cases} \mathfrak{k}_{11}\mathfrak{f}_{a_{11}}^2 = \dfrac{P_{b_{11}} P_{c_{11}}}{P_{a_{11}}} \\ \mathfrak{k}_{11}\mathfrak{f}_{b_{11}}^2 = \dfrac{P_{a_{11}} P_{c_{11}}}{P_{b_{11}}}. \end{cases}$$

Beim einschaligen Hyperboloid haben wir nur ein Paar reeller Fokalpunkte $\mathfrak{f}_{a_1}$ und $\mathfrak{f}'_{a_1}$ auf der a_1-Axe; Kreispunkte existieren hier nicht; wohl aber können wir auch hier die analoge Gröfse bilden:

$$\frac{P_{b_1} \cdot P_{c_1}}{P_{a_1}},$$

welche negativ wird.

In der folgenden Betrachtung treten gewisse Kugeln auf, die wir hier schon einführen wollen. Nehmen wir nämlich beim Ellipsoid die Fokalpunkte $\mathfrak{f}_a$ und $\mathfrak{f}'_a$ als Mittelpunkte zweier Kugeln, deren Radien den Wert $\mathfrak{f}_a\mathfrak{k}$ haben, so sollen diese Fokalkugeln heifsen; ein zweites Paar Fokalkugeln erhalten wir, indem wir die Fokalpunkte $\mathfrak{f}_c$ und $\mathfrak{f}'_c$ zu Mittelpunkten zweier Kugeln mit dem Radius $\mathfrak{f}_c\mathfrak{k}$ machen. Wir erhalten also vier Fokalkugeln, und jede derselben berührt das Ellipsoid in zwei symmetrisch liegenden Kreispunkten. Wir wollen die ersteren beiden die inneren, die letzteren die äufseren Fokalkugeln nennen und werden sogleich erkennen, dafs jene ganz innerhalb des Ellipsoids liegen, diese das Ellipsoid ganz einschliefsen. Das Paar der inneren Fokalkugeln berührt das Paar der äufseren Fokalkugeln innerlich.

In gleicher Weise erhalten wir beim zweischaligen Hyperboloid zwei innere und zwei äufsere Fokalkugeln, die paarweise das Hyperboloid in zwei symmetrisch liegenden Kreispunkten berühren und selbst in diesen Punkten einander äufserlich berühren.

Beim einschaligen Hyperboloid können die beiden reellen Fokalpunkte $\mathfrak{f}_{a_1}$ und $\mathfrak{f}'_{a_1}$ als Mittelpunkte zweier imaginären Fokalkugeln betrachtet werden, für die das Quadrat des Radius den negativen Wert hat $\frac{P_{b_1} \cdot P_{c_1}}{P_{a_1}}$. Wir können uns diese imaginären Fokalkugeln durch reelle räumliche Polarsysteme vertreten denken, die elliptischen Charakters sind.

Nehmen wir nun, um von einem bestimmten Falle auszugehen, das Ellipsoid und die innere Fokalkugel desselben mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{f}_a$, so läfst sich die Potenz eines beliebigen Ellipsoidpunktes $\mathfrak{O}$ in Bezug auf diese Kugel ermitteln. Wir haben nämlich zunächst:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{f}_a^2 = \mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{f}_a^2 - 2 \,.\, \mathfrak{O}\mathfrak{M} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{f}_a \,.\, \cos(|\mathfrak{O}\mathfrak{M}|, |\mathfrak{M}\mathfrak{f}_a|),$$

und wir kennen aus den Relationen (V) den Wert:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 = P_{a_1} + P_{a_{11}} + P_b + P_c - P_a,$$

ferner

$$\mathfrak{M}\mathfrak{f}_a^2 = \frac{(P_b - P_a)(P_c - P_a)}{P_a} = \frac{P_b P_c}{P_a} - P_b - P_c + P_a,$$

endlich

$$\mathfrak{O}\mathfrak{M} \,.\, \cos(|\mathfrak{O}\mathfrak{M}|, |\mathfrak{M}\mathfrak{f}_a|) = \pm p_a\,,$$

d. h. gleich dem Abstande des Punktes $\mathfrak{O}$ von der Hauptebene $[bc]$, positiv oder negativ, je nachdem der Punkt $\mathfrak{O}$ mit dem Punkte $\mathfrak{f}_a$ auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Ebene $[bc]$ liegt; nach (III) ist aber der absolute Wert:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{f}_a^2 \,.\, p_a^2 = P_{a_1} \,.\, P_{a_{11}}\,;$$

folglich erhalten wir:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{f}_a^2 = -\frac{P_b \,.\, P_c}{P_a} + P_{a_1} + P_{a_{11}} \mp 2\sqrt{P_{a_1} P_{a_{11}}}\,,$$

und da $\frac{P_b P_c}{P_a}$ das Quadrat des Radius der inneren Fokalkugel ist, deren Radius $\mathfrak{k}\mathfrak{f}_a$ ist, so folgt:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{f}_a^2 - \mathfrak{k}\mathfrak{f}_a^2 = (\sqrt{P_{a_1}} \mp \sqrt{P_{a_{11}}})^2.$$

Der Wert $(\mathfrak{O}\mathfrak{f}_a^2 - \mathfrak{k}\mathfrak{f}_a^2)$ ist aber die Potenz des Ellipsoidpunktes $\mathfrak{O}$ in Bezug auf die betrachtete innere Fokalkugel, und zwar ist diese Potenz positiv, denn die Werte P_{a_1} und $P_{a_{11}}$ sind wesentlich positiv, also $(\mathfrak{O}\mathfrak{f}_a^2 - \mathfrak{k}\mathfrak{f}_a^2)$ das Quadrat einer reellen Gröfse, mithin positiv. Der Punkt $\mathfrak{O}$ liegt daher notwendig aufserhalb der Fokalkugel, oder, wie oben behauptet wurde, die betrachtete Fokalkugel ist eine innere, d. h. liegt ganz im Innern des Ellipsoids.

Nennen wir die Tangente aus $\mathfrak{O}$ an die innere Fokalkugel einen Fokalstrahl t_a, so nimmt das vorige Resultat die einfache Gestalt an:

$$t_a = \sqrt{P_{a_1}} \mp \sqrt{P_{a_{11}}},$$

d. h.: Die aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ des Ellipsoids an eine innere Fokalkugel desselben gezogene Tangente (der Fokalstrahl eines Ellipsoidpunktes) ist gleich der Summe oder Differenz der Halbaxen der beiden durch den Punkt $\mathfrak{O}$ mit dem Ellipsoid konfokal gelegten Hyperboloide, nämlich derjenigen Halbaxen, deren Richtung zusammenfällt mit der Richtung der Halbaxe des Ellipsoids, welche den Mittelpunkt $(\mathfrak{f}_a)$ der Fokalkugel enthält, und es gilt die Differenz oder die Summe, je

nachdem der Punkt $\mathfrak{O}$ und der Fokalpunkt $\mathfrak{f}_a$ auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Hauptebene $[bc] = \alpha$ liegen.

Nehmen wir daher die zweite innere Fokalkugel des Ellipsoids hinzu, deren Mittelpunkt $\mathfrak{f}_a'$ ist, so folgt, da $\mathfrak{f}_a$ und $\mathfrak{f}_a'$ durch die Ebene $[bc]$ getrennt werden, der Fokalstrahl aus $\mathfrak{O}$ an die andere innere Fokalkugel:

$$t_a' = \sqrt{P_{a_{\text{I}}}} \pm \sqrt{P_{a_{\text{II}}}},$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\begin{cases} t_a + t_a' = 2\sqrt{P_{a_{\text{I}}}} \\ t_a' - t_a = 2\sqrt{P_{a_{\text{II}}}}. \end{cases}$$

Verändern wir nun den Punkt $\mathfrak{O}$ des Ellipsoids derartig, daſs er eine Krümmungskurve desselben durchläuft, etwa die Schnittkurve eines mit dem Ellipsoid konfokalen einschaligen Hyperboloids, so bleibt in der ersten der beiden letzten Gleichungen die rechte Seite ungeändert; für die andere Krümmungskurve bleibt die rechte Seite der zweiten Gleichung ungeändert, und wir erhalten die Sätze:

1) Wenn man von sämtlichen Punkten der Schnittkurve eines Ellipsoids und eines mit ihm konfokalen einschaligen Hyperboloids (einer Krümmungskurve des Ellipsoids) die Tangenten an die beiden inneren Fokalkugeln des Ellipsoids (Fokalstrahlen) zieht, so ist die Summe derselben von unverändertem Werte, nämlich gleich der gröſseren reellen Hauptaxe des einschaligen Hyperboloids.

2) Wenn man von sämtlichen Punkten der Schnittkurve eines Ellipsoids und eines mit ihm konfokalen zweischaligen Hyperboloids (der anderen Krümmungskurve des Ellipsoids) die Tangenten an die beiden inneren Fokalkugeln des Ellipsoids (Fokalstrahlen) zieht, so ist die Differenz derselben von unverändertem Werte, nämlich gleich der reellen Hauptaxe des zweischaligen Hyperboloids.

Diese Sätze lassen eine gewisse Analogie erkennen mit den bekannten Eigenschaften der konstanten Summe der Fokalstrahlen für die Punkte einer Ellipse und Differenz der Fokalstrahlen für die Punkte einer Hyperbel.

Fassen wir dagegen eine äufsere Fokalkugel des Ellipsoids ins Auge, deren Mittelpunkt $\mathfrak{f}_c$ sei, so ergiebt die gleiche Rechnung:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{f}_c^2 - \mathfrak{k}\mathfrak{f}_c^2 = (\sqrt{P_{c_1}} \pm \sqrt{P_{c_{11}}})^2,$$

und da hier P_{c_1} und $P_{c_{11}}$ beide negativ sind, so wird der Wert von $(\mathfrak{O}\mathfrak{f}_c^2 - \mathfrak{k}\mathfrak{f}_c^2)$ das Quadrat einer rein-imaginären Gröfse, also negativ; die Potenz jedes Ellipsoidpunktes in Bezug auf eine äufsere Fokalkugel ist daher negativ, d. h. alle Punkte des Ellipsoids liegen innerhalb der Kugel, oder, wie oben behauptet wurde, die betrachtete Fokalkugel liegt ganz aufserhalb des Ellipsoids; setzt man hier an Stelle der Tangente aus einem Ellipsoidpunkte an die Fokalkugel die halbe kleinste Sehne, welche sich von dem Punkte aus durch die Kugel ziehen läfst, und führt auch für die reellen Werte $\sqrt{-P_{c_1}}$ und $\sqrt{-P_{c_{11}}}$ ihre bekannte geometrische Bedeutung ein, so ändert sich zwar die Bedeutung von „Fokalstrahl" und der Sinn von „Hauptaxe", als Strecke aufgefafst, aber die vorigen Sätze 1) und 2) können in unveränderter Form ausgesprochen werden.

Man übersieht ohne weiteres, dafs beim zweischaligen Hyperboloid durchaus analoge Resultate hervortreten, nur mit dem Unterschied, dafs hier die Tangenten aus irgend einem Hyperboloidpunkte an alle vier reellen Fokalkugeln reell sind; beim einschaligen Hyperboloid sind zwei Fokalpunkte reell, aber die Mittelpunkte imaginärer Fokalkugeln und der „Fokalstrahl" ändert wiederum seine Bedeutung, indem die Potenz eines Punktes $\mathfrak{O}$ in Bezug auf eine imaginäre Kugel mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{f}_{a_1}$ und dem Quadrate des Radius $-r_{a_1}^2$ ausgedrückt wird durch die Summe $\mathfrak{O}\mathfrak{f}_a^2 + r_{a_1}^2$, und die Quadratwurzel aus diesem Werte den Fokalstrahl aus $\mathfrak{O}$ an die imaginäre Fokalkugel ausdrückt. Es würde unschwer, aber ermüdend sein, in jedem einzelnen sich darbietenden Falle das besondere Resultat hervorzuheben; wir begnügen uns daher mit dem Ausspruch des allgemeinen Satzes:

Für alle Punkte einer Krümmungslinie einer Fläche 2. O. mit einem Mittelpunkt ist entweder die Summe oder die Differenz der von ihnen an

zwei zusammengehörige Fokalkugeln der Fläche gehenden Fokalstrahlen von unverändertem Werte, nämlich gleich der durch die Mittelpunkte der Fokalkugeln (Fokalpunkte) gehenden Hauptaxe derjenigen Fläche, welche die Krümmungslinie bestimmt.

Endlich läfst das vorhin erlangte Resultat noch eine andere Folgerung zu, die zu einer weiteren Analogie der Krümmungslinien einer Fläche 2. O. mit dem Paare einer Ellipse und einer mit ihr konfokalen Hyperbel führt.

Kehren wir zu dem Ellipsoid zurück und betrachten, wie oben, eine innere Fokalkugel mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{f}_a$; der aus einem beliebigen Ellipsoidpunkte $\mathfrak{O}$ an die Fokalkugel gezogene Fokalstrahl war:

$$t_a = \sqrt{P_{a_1}} \mp \sqrt{P_{a_{11}}};$$

wir können vermöge der Beziehungen (III) setzen:

$$t_a = \sqrt{P_{a_1}} \mp \sqrt{\frac{(P_b - P_a)(P_c - P_a)}{P_a \cdot P_{a_1}}} \cdot p_a$$

$$= \sqrt{\frac{(P_b - P_a)(P_c - P_a)}{P_a \cdot P_{a_1}}} \left\{ \frac{P_{a_1}}{\mathfrak{M}\mathfrak{f}_a} \mp p_a \right\}.$$

Nehmen wir nun zu dem Fokalpunkte $\mathfrak{f}_a$ auf der a-Axe des Ellipsoids die Polarebene in Bezug auf das konfokale einschalige Hyperboloid durch $\mathfrak{O}$, so wird der Abstand derselben von dem Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ gleich sein $\frac{P_{a_1}}{\mathfrak{M}\mathfrak{f}_a}$; also ist $\frac{P_{a_1}}{\mathfrak{M}\mathfrak{f}_a} \mp p_a$ gleich dem Abstand des Punktes $\mathfrak{O}$ von derselben Polarebene; nennen wir diesen Abstand d_a, so ergiebt das vorige Resultat:

$$\frac{t_a}{d_a} = \sqrt{\frac{(P_b - P_a)(P_c - P_a)}{P_a \cdot P_{a_1}}} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{f}_a}{\sqrt{P_{a_1}}} = \text{konst.},$$

d. h. für alle Punkte der Krümmungskurve, in welcher das Ellipsoid von dem konfokalen einschaligen Hyperboloid durchschnitten wird, ein unverändertes Verhältnis; wir erhalten demnach den Satz:

Für jeden Punkt einer Krümmungslinie, in

welcher ein Ellipsoid von einem einschaligen Hyperboloid durchschnitten wird, hat das Verhältnis seiner Tangente an eine der inneren Fokalkugeln zu seinem Abstande von der Polarebene des Mittelpunktes dieser Fokalkugel in Bezug auf das Hyperboloid einen unveränderten Wert.

Man kann diesen Wert die „Excentricität" der Krümmungslinie und die feste Polarebene des Fokalpunktes die „Direktrix" derselben nennen, dann erscheint dieser Satz in gewissem Sinne als ein Analogon einer bekannten Eigenschaft des Kegelschnitts; es leuchtet unmittelbar ein, dafs derselbe sich nicht blofs auf eine Krümmungslinie des Ellipsoids und den besonderen Fokalpunkt $\mathfrak{f}_a$ beschränkt, sondern allgemein so ausgesprochen werden kann:

Für alle Punkte einer Krümmungslinie steht ein Fokalstrahl zu dem Abstande von der zugehörigen Direktrix in unverändertem Verhältnis, dessen Wert die Excentricität der Krümmungslinie ist.

§ 71. Das Flächenbüschel 2. O.

Die von uns in § 69 betrachtete Schar konfokaler Flächen 2. O. ist ein besonderer Fall eines allgemeineren Gebildes, der Flächenschar 2. O., welcher dual gegenübersteht das Flächenbüschel 2. O. Beide Gebilde von einfach-unendlicher Mannigfaltigkeit entsprechen im Raume der Kegelschnittschar und dem Kegelschnittbüschel in der Ebene. Eine eingehende und erschöpfende Behandlung dieser räumlichen Gebilde 2. O. analog derjenigen, welche in dem dritten Abschnitt der „Theorie der Kegelschnitte" gegeben ist, würde die Grenzen dieses Buches zu weit hinausrücken. Wir beschränken uns daher auf eine kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Flächenbüschels 2. O. und verweisen im übrigen auf die Untersuchungen von Th. Reye*), welcher von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus, einem „Strahlenkomplex zweiten Grades", zu den Eigenschaften des Flächen-

*) Th. Reye: Die Geometrie der Lage, II. Aufl. 1880, zweite Abtheilung, neunzehnter und zwanzigster Vortrag.

büschels gelangt, sowie auf diejenigen von R. Sturm*), welcher vermittelst des Flächenbüschels und Flächenbündels 2. O. die Eigenschaften der allgemeinen Fläche 3. O. ableitet.

Bei der Konstruktion einer Fläche $F^{(2)}$ durch die zu ihrer Bestimmung notwendige Anzahl von Punkten (S. 473) sind wir auf ein Büschel von Flächen 2. O. geführt worden, welche sämtlich eine Raumkurve 4. O. $C^{(4)}$ gemeinschaftlich haben. Diese Raumkurve $C^{(4)}$ ist vollständig bestimmt durch zwei gegebene Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$; sie hat mit jeder beliebigen Ebene ε im allgemeinen vier Punkte gemein, nämlich die vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte, in welchen die Ebene ε die beiden Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ schneidet; diese können reell oder auch paarweise konjugiert-imaginär sein. Die Raumkurve $C^{(4)}$ kann auch ganz imaginär sein; wir werden aber in jeder beliebigen Ebene vermittelst der beiden Kegelschnitte, in denen sie $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ schneidet, oder der sie vertretenden ebenen Polarsysteme die reellen oder konjugiert-imaginären Punkte der Raumkurve $C^{(4)}$ ermitteln können als die Doppelpunkte hyperbolischer oder elliptischer Punktinvolutionen auf bekannten Geraden (Th. d. K. § 62).

Da wir früher durch acht willkürlich gewählte Punkte des Raumes, die von einander unabhängig liegen (d. h. keine drei in einer Geraden, keine vier in einer Ebene), zwei Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ und das durch dieselben bestimmte Büschel von Flächen $F^{(2)}$ konstruiert haben, so folgt zugleich, dafs eine Raumkurve 4. O. $C^{(4)}$ durch acht von einander unabhängige willkürlich im Raume gewählte Punkte bestimmt wird.

Die Raumkurve $C^{(4)}$, welche den beiden gegebenen Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ gemeinschaftlich ist, kann unter Umständen zerfallen 1) in zwei Kegelschnitte; wenn nämlich zwei Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ einen ebenen Kegelschnitt gemeinschaftlich haben, so müssen sie sich aufserdem in den Punkten eines zweiten

*) R. Sturm: Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. O., 1867, S. 28 ff.

ebenen Kegelschnitts schneiden; denn haben sie einen Kegelschnitt $K^{(2)}$ gemein und außerdem noch andere gemeinschaftliche Punkte, so können wir durch drei derselben eine Ebene legen, welche dadurch gerade bestimmt wird. Diese Ebene ε_1 schneidet die Ebene ε des Kegelschnitts $K^{(2)}$ in einer Geraden $s = |\varepsilon \varepsilon_1|$, welche der Träger einer dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ zugehörigen Punktinvolution ist, und da beide Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ durch $K^{(2)}$ gehen, so muſs diese Punktinvolution auf s auch demjenigen Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ zugehören, in welchem die Ebene ε_1 die Fläche $F^{(2)}$ schneidet, sowie demjenigen Kegelschnitt, in welchem die Ebene ε_1 die andere Fläche $F_1^{(2)}$ schneidet; durch die drei gemeinschaftlichen Punkte von $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ in der Ebene ε_1 und die beiden (reellen oder konjugiert-imaginären) Doppelpunkte der Punktinvolution auf s ist aber nur ein Kegelschnitt möglich, folglich müssen die beiden Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ auch in der Ebene ε_1 den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ gemeinschaftlich haben; da weitere Punkte, die beiden Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ gemeinschaftlich wären, auſser den Punkten der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nicht existieren können, weil sonst eine durch einen solchen Punkt gelegte Ebene mit der $C^{(4)}$ fünf Punkte gemein hätte, so zerfällt die $C^{(4)}$ in zwei Kegelschnitte, welche in der Schnittlinie ihrer Ebenen gemeinschaftliche Punkte haben müssen.

2) Wenn einer der beiden Kegelschnitte, z. B. $K^{(2)}$, in ein reelles Linienpaar zerfällt, so muſs auch der andere $K_1^{(2)}$ reell sein und von den beiden reellen Geraden des Linienpaares getroffen werden. Die $C^{(4)}$ besteht also in diesem Falle aus einem reellen Kegelschnitt und zwei sich schneidenden Geraden, die den Kegelschnitt treffen.

3) Wenn beide Kegelschnitte in reelle Linienpaare zerfallen, so müssen diese in der Schnittlinie ihrer Ebenen sich begegnen. Die $C^{(4)}$ zerfällt also in diesem Falle in ein windschiefes (räumliches) Vierseit.

4) Wenn die beiden Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ eine gerade Linie gemein haben, also zwei Hyperboloide mit einer gemeinschaftlichen Erzeugenden sind, so haben sie auſserdem

noch eine Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$ gemein (S. 229). Die $C^{(4)}$ zerfällt also in diesem Falle in eine $C^{(3)}$ und eine Sekante derselben.

Wenn wir uns nunmehr andere Flächen $F_x^{(2)}$ gelegt denken, welche durch dieselben Punkte gehen, die den beiden gegebenen Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ gemeinschaftlich sind, d. h. durch die Raumkurve $C^{(4)}$, so müssen dieselben so beschaffen sein, dafs sie jede Ebene ε in den Kegelschnitten $K_x^{(2)}$ eines Kegelschnittbüschels mit vier festen Grundpunkten, den Durchschnittspunkten der Ebene ε mit der Raumkurve $C^{(4)}$ schneiden, also jede beliebige gerade Linie in den Punktepaaren einer Punktinvolution treffen. Wir nennen alle solche Flächen $F_x^{(2)}$ einem **Flächenbüschel** 2. O. angehörig mit der **Grundkurve** $C^{(4)}$ und haben als die charakteristische Eigenschaft eines solchen Flächenbüschels diese:

Sämtliche Flächen $F^{(2)}$ eines Flächenbüschels schneiden eine beliebige Ebene in Kegelschnitten eines Kegelschnittbüschels und eine beliebige Gerade in Punktepaaren einer Punktinvolution.

Aus dieser Definition ergiebt sich die Konstruktion beliebig vieler Flächen eines Büschels, sobald zwei dasselbe bestimmende Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ gegeben sind. Ziehen wir durch einen beliebigen festgehaltenen Punkt $\mathfrak{p}$ Strahlen s, welche $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ in zwei Punktepaaren treffen, so bestimmen diese eine Punktinvolution auf s, und in derselben gehört dem Punkte $\mathfrak{p}$ nur ein einziger bestimmter konjugierter Punkt $\mathfrak{p}'$ zu; wenn der Strahl s sich im Raume um $\mathfrak{p}$ herumdreht, so durchläuft $\mathfrak{p}'$ die ganze Fläche $F_{\mathfrak{p}}^{(2)}$ des Büschels, welche durch den Punkt $\mathfrak{p}$ geht, also:

Durch einen beliebig gewählten Punkt $\mathfrak{p}$ des Raumes geht immer eine und nur eine Fläche $F_{\mathfrak{p}}^{(2)}$ des Büschels.

Die Punktinvolution, welche die Flächen $F_x^{(2)}$ eines Büschels auf einer beliebigen Geraden g ausschneidet, hat im allgemeinen zwei Doppelpunkte, die reell oder konjugiert-imaginär sind, je nachdem die Punktinvolution hyperbolisch oder elliptisch ist; wir schliefsen hieraus:

Es giebt im allgemeinen zwei Flächen eines Büschels, welche eine gegebene Gerade berühren.

Da die sämtlichen Flächen $F_x^{(2)}$ eines Büschels eine beliebige Ebene ε in Kegelschnitten eines Kegelschnittbüschels schneiden, und unter diesen im allgemeinen nur drei Linienpaare vorkommen, andererseits aber eine Ebene, welche eine Fläche $F^{(2)}$ in einem (reellen oder imaginären) Linienpaar schneidet, allemal Berührungsebene dieser Fläche ist (S. 482), so schliefsen wir:

Es giebt im allgemeinen drei Flächen eines Büschels, welche eine gegebene Ebene berühren.

Wenn wir von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{p}$ des Raumes die beiden Polarebenen π und π_1 in Bezug auf die beiden das Büschel bestimmenden Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ (oder die sie vertretenden räumlichen Polarsysteme) nehmen, so schneiden sich dieselben in einer Geraden $g = |\pi \pi_1|$. Legen wir nun durch $\mathfrak{p}$ eine beliebige Ebene ε, so schneidet dieselbe das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel und die Gerade g in einem Punkte $\mathfrak{q}$, der die Eigenschaft besitzt, dafs die Polaren von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels durch $\mathfrak{q}$ laufen; folglich müssen auch alle Polarebenen von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf sämtliche Flächen $F_x^{(2)}$ des Büschels durch $\mathfrak{q}$ laufen; dasselbe gilt für eine zweite beliebige Ebene ε', die durch $\mathfrak{p}$ gelegt wird, folglich laufen alle Polarebenen von $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$, also durch die Gerade g, und wir schliefsen:

Die Polarebenen eines Punktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf sämtliche Flächen $F_x^{(2)}$ eines Büschels laufen durch eine feste (zu $\mathfrak{p}$ konjugierte) Gerade g und bilden also ein Ebenenbüschel.

Nehmen wir von zwei beliebigen Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ die Polarebenen in Bezug auf alle Flächen $F_x^{(2)}$ des Büschels, so erhalten wir zwei Ebenenbüschel mit den Axen g und g_1; eine beliebige Ebene durch die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ gelegt, schneidet nun das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel, die beiden Ebenenbüschel g und g_1 in zwei Strahlenbüscheln, und diese sind bekanntlich projektivisch, indem die Polaren von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ in Bezug auf denselben Kegelschnitt einander entsprechen, also sind auch die Ebenenbüschel g und g_1 projektivisch, und wir erhalten den Satz:

Wenn man von irgend zwei Punkten im Raume die Polarebenen in Bezug auf sämtliche Flächen $F_x^{(2)}$ eines Büschels nimmt, so erhält man zwei Ebenenbüschel, die allemal projektivisch sind, indem die Polarebenen der beiden Punkte in Bezug auf dieselbe Fläche des Büschels einander entsprechen.

Hieraus ergiebt sich einerseits die gleiche Mächtigkeit des Flächenbüschels 2. O. mit dem Ebenenbüschel und andererseits die Möglichkeit, das Flächenbüschel in projektivische Beziehung zu setzen mit irgend einem anderen Gebilde von gleicher Mächtigkeit. An Stelle des Büschels von Polarebenen können wir auch das Büschel von Berührungsebenen nehmen in irgend einem Punkte der Raumkurve $C^{(4)}$ an sämtlichen Flächen $F_x^{(2)}$; alle diese Berührungsebenen gehen durch die Tangente der $C^{(4)}$ in dem gewählten Punkte.

Da die Ebenenbüschel g und g_1 projektivisch sind, so erzeugen sie ein Hyperboloid, d. h. ihre entsprechenden Ebenen schneiden sich in den Erzeugenden einer Regelschar eines einfachen Hyperboloids. Die Schnittlinie der beiden Polarebenen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ in Bezug auf eine Fläche $F_x^{(2)}$ ist aber die konjugierte Gerade der Verbindungslinie $|\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1|$ in Bezug auf diese Fläche $F_x^{(2)}$; wir schliefsen also:

Die zu einer gegebenen festen Geraden l konjugierten Geraden in Bezug auf sämtliche Flächen $F_x^{(2)}$ eines Büschels bilden eine Regelschar eines Hyperboloids.

Die Geraden g und g_1, die Axen der erzeugenden Ebenenbüschel, liegen ebenfalls auf diesem Hyperboloid und gehören der anderen Regelschar an; nehmen wir statt der Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ andere Punkte $\mathfrak{p}_x$ auf derselben Geraden l, so bleibt das Hyperboloid unverändert, also wird durch die entsprechende Gerade g_x die zweite Regelschar desselben erzeugt; wir können daher den vorigen Satz so vervollständigen:

Nehmen wir von sämtlichen Punkten $\mathfrak{p}_x$ einer Geraden l die ihnen konjugierten Geraden g_x in Bezug auf das Flächenbüschel, so bilden dieselben eine Regelschar eines Hyperboloids, während die

konjugierten Strahlen von l in Bezug auf die einzelnen Flächen des Büschels die andere Regelschar desselben Hyperboloids bilden.

Nehmen wir von drei beliebigen Punkten $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3$ des Raumes die Polarebenen in Bezug auf sämtliche Flächen $F_x^{(2)}$ eines Büschels, so erhalten wir drei projektivische Ebenenbüschel, deren Erzeugnis eine Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$ ist; da nun die drei Polarebenen von $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3$ in Bezug auf eine Fläche $F_x^{(2)}$ sich in dem Pole der Ebene $[\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3]$ schneiden, so folgt der Satz:

Die Pole einer festen Ebene in Bezug auf sämtliche Flächen $F_x^{(2)}$ eines Büschels liegen auf einer Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$.

Hieraus folgt insbesondere, wenn wir für die feste Ebene die unendlich-entfernte Ebene ε_∞ nehmen, deren Pol der Mittelpunkt der $F_x^{(2)}$ ist, das Ergebnis:

Die Mittelpunkte sämtlicher Flächen $F_x^{(2)}$ eines Büschels liegen auf einer Raumkurve $C^{(3)}$ 3. O.; es kommen daher im allgemeinen drei Paraboloide in dem Flächenbüschel vor, von denen mindestens eines reell sein mufs.

Zugleich sehen wir, da jedem Punkte $\mathfrak{p}$ einer Ebene ε eine Gerade g in Bezug auf das Flächenbüschel konjugiert ist, nämlich diejenige, in welcher sich sämtliche Polarebenen von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Flächen $F_x^{(2)}$ des Büschels schneiden, und jede solche Gerade g eine Sekante der Raumkurve $C^{(3)}$ sein mufs:

Die den sämtlichen Punkten $\mathfrak{p}$ einer festen Ebene konjugierten Geraden g in Bezug auf das Flächenbüschel sind Sekanten einer Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$.

Die drei Punkte, in welchen die Raumkurve $C^{(3)}$ der Ebene ε begegnet, sind die Berührungspunkte derjenigen drei Flächen des Büschels, welche die Ebene ε berühren.

Nehmen wir endlich vier beliebige Punkte $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4$ im Raume an, die nicht in einer Ebene liegen, und bestimmen die Polarebenen derselben in Bezug auf sämtliche Flächen $F_x^{(2)}$ des Büschels, so erhalten wir vier projektivische Ebenenbüschel. Es kommt, wie wir S. 251 gesehen haben, im all-

gemeinen viermal vor, dafs sich vier entsprechende Ebenen der vier projektivischen Ebenenbüschel in einem und demselben Punkte schneiden. Wenn aber die Polarebenen von vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, in Bezug auf eine Fläche $F^{(2)}$ durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{O}$ gehen, so müssen die Polarebenen von allen Punkten im Raume ebenfalls durch diesen Punkt $\mathfrak{O}$ gehen; denn bezeichnen wir die vier durch denselben Punkt $\mathfrak{O}$ gehenden zu den vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4$ gehörigen Polarebenen durch $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$, so wird eine beliebige Ebene ε die Ebene $[\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3]$ in einer Geraden schneiden, deren konjugierte Gerade durch $(\pi_1 \pi_2 \pi_3) = \mathfrak{O}$ gehen mufs, und gleichzeitig wird ε die von der Ebene $[\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3]$ verschiedene Ebene $[\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_4]$ in einer Geraden schneiden, deren konjugierte Gerade auch durch $\mathfrak{O} = (\pi_1 \pi_3 \pi_4)$ hindurchgehen mufs; der Pol der Ebene ε ist also der Schnittpunkt der beiden konjugierten Geraden, d. h. der Punkt $\mathfrak{O}$; jede beliebige Ebene ε hat also in $\mathfrak{O}$ ihren Pol, oder für jeden beliebigen Punkt des Raumes mufs die Polarebene durch $\mathfrak{O}$ gehen. Dies ist nicht anders möglich, als wenn die Fläche $F^{(2)}$ in einen Kegel $\mathfrak{O}^{(2)}$ ausartet (vergl. S. 508); wir schliefsen also:

Unter den Flächen eines Büschels kommen im allgemeinen vier Kegel 2. O. vor, oder: Durch eine Raumkurve $C^{(4)}$, den Schnitt zweier Flächen 2. O., lassen sich im allgemeinen vier Kegel 2. O. legen.

Die Raumkurve 4. O. $C^{(4)}$ erscheint daher insbesondere auch als die Durchdringungskurve zweier Kegel 2. O., und hieraus ergiebt sich in einfachster Weise die Bestätigung der obigen Bemerkung über das Zerfallen der Raumkurve $C^{(4)}$; sobald einer der beiden Kegel in ein Ebenenpaar ausartet, zerfällt sie in zwei Kegelschnitte, die in der Schnittlinie ihrer Ebenen ein gemeinschaftliches Punktepaar haben.

Im allgemeinen bilden die vier Mittelpunkte der ermittelten vier Kegel (Kegelspitzen) die Ecken eines Tetraëders, welches zu den Flächen des Büschels in besonderer Beziehung steht. Ziehen wir nämlich die Verbindungslinie zweier Kegelspitzen, so wird diese Gerade, wie wir gesehen haben, von sämtlichen Flächen des Büschels in Punktepaaren einer Punktinvolution geschnitten und nur von zwei Flächen des Büschels berührt.

Diese beiden berührenden Flächen sind aber keine andern als die beiden Kegel selbst, deren Spitzen wir verbunden haben; folglich trennen diese Punkte harmonisch jedes Punktepaar, in welchem eine Fläche $F_x^{(2)}$ des Büschels diese Gerade schneidet oder, was dasselbe sagt, zwei Kegelspitzen sind allemal ein Paar konjugierter Punkte in Bezug auf sämtliche Flächen des Büschels. Nennen wir daher $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ die vier Kegelspitzen, so sind sowohl $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, als auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ Paare konjugierter Punkte für sämtliche Flächen des Büschels, folglich sind der Punkt $\mathfrak{A}$ und die Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ Pol und Polarebene für alle Büschelflächen, und da dasselbe für jeden der vier Punkte $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ und die Verbindungsebene der drei übrigen gilt, so folgt der Satz:

Die sämtlichen Flächen eines Büschels haben ein gemeinschaftliches Polartetraëder, dessen Ecken die Spitzen der vier Kegel sind, welche dem Büschel angehören.

Ein Flächenbüschel besonderer Art und eingehenderem Studium zu empfehlen ist dasjenige, dessen gemeinschaftliche Raumkurve $C^{(4)}$ in ein windschiefes Vierseit zerfällt. Dieses besondere Büschel hat zum Analogon in der Ebene ein Büschel von Kegelschnitten, die einander doppelt berühren — ein Gebilde, welches gleichzeitig als Kegelschnittbüschel und als Kegelschnittschar aufgefafst werden kann. Gleiches gilt auch von diesem Flächenbüschel, welches gleichzeitig als Flächenschar aufgefafst werden kann und die Eigenschaften beider Gebilde in sich vereinigt. Dasselbe kann erzeugt werden durch zwei gegebene im Raume sich nicht treffende Gerade g und g_1, auf deren jeder eine Punktinvolution gegeben ist. Legt man durch g eine Ebeneninvolution perspektivisch mit der Punktinvolution auf g_1, und durch g_1 als Axe eine Ebeneninvolution perspektivisch mit der Punktinvolution auf g, so sind g und g_1 gleichzeitig die Träger von Punktinvolutionen und die Axen von Ebeneninvolutionen; sucht man eine Fläche $F^{(2)}$, für welche g und g_1 konjugierte Strahlen und die gegebenen Punkt- und Ebeneninvolutionen auf g und g_1 die der Fläche zugehörigen sind, so bilden alle solche Flächen ein Büschel, dessen Raumkurve $C^{(4)}$ in dasjenige windschiefe Vierseit zerfällt, dessen Seiten je einen Doppelpunkt der Punktinvolution auf g mit

einem Doppelpunkte der Punktinvolution auf g_1 verbindet. Dieses Vierseit ist vollständig imaginär, sobald die beiden Punktinvolutionen auf g und g_1 elliptisch sind. Ferner wird das gemeinschaftliche Polartetraëder in diesem Falle von besonderer Art (S. 143), indem seine sechs Kanten aus den beiden Geraden $g\,g_1$ und den Seiten des windschiefen Vierseits bestehen, in welches die Raumkurve $C^{(4)}$ zerfällt. Die Flächen eines solchen besonderen Büschels sind sämtlich von derselben Gattung, d. h. entweder alle geradlinige Flächen oder alle nichtgeradlinige Flächen, je nachdem die beiden auf g und g_1 gegebenen Punktinvolutionen gleichartig oder ungleichartig sind.

Die der vorhergehenden dual gegenüberstehende Betrachtung, welche auf eine Flächenschar 2. O. führt, überlassen wir dem Leser.

§ 72. Das Flächenbündel 2. O.*)

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dafs zwei Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$, wenn sie nicht identisch zusammenfallen, in einer Raumkurve 4. O. $C_{12}^{(4)}$ sich schneiden, welche auch durch acht von einander unabhängige willkürlich gewählte Punkte bestimmt wird. Durch einen beliebigen Punkt des Raumes und die Raumkurve $C_{12}^{(4)}$ geht im allgemeinen eine und nur eine Fläche 2. O., was damit übereinkommt, dafs dieselbe im allgemeinen durch neun Punkte bestimmt wird (S. 464). Eine Ausnahme hiervon tritt ein, wenn der neunte Punkt auf der Raumkurve $C_{12}^{(4)}$ selbst liegt. Durch solche neun Punkte, die auf einer Raumkurve 4. O. liegen, geht nicht nur eine, sondern unendlich-viele Flächen 2. O., welche einem Flächenbüschel angehören. Nehmen wir daher eine dritte Fläche $F_3^{(2)}$, welche nicht dem durch die beiden ersten bestimmten Büschel angehört, so kann dieselbe mit der Raumkurve $C_{12}^{(4)}$ nicht neun Punkte gemein haben, sondern höchstens acht; wir schliefsen also: D r e i F l ä c h e n 2. O. $F_1^{(2)}\,F_2^{(2)}\,F_3^{(2)}$, w e l c h e n i c h t d e m s e l b e n B ü s c h e l a n g e h ö r e n, k ö n n e n h ö c h s t e n s a c h t P u n k t e g e m e i n

*) R. Sturm: Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung, Borchardt's Journal f. r. u. a. M. Bd. 70, S. 212.

haben. Dafs drei Flächen 2. O. sich im allgemeinen in acht Punkten schneiden, erkennen wir auch aus dem besonderen Fall, wenn wir drei Ebenenpaare beliebig annehmen, die offenbar nur acht Punkte gemeinschaftlich haben (vergl. S. 457). Die drei Flächen $F_1^{(2)}$ $F_2^{(2)}$ $F_3^{(3)}$ schneiden sich aber paarweise in drei Raumkurven 4. O. $C_{12}^{(4)}$ $C_{13}^{(4)}$ $C_{23}^{(4)}$, welche dieselben acht Punkte gemein haben. Solche acht Punkte bestimmen also nicht eine Raumkurve 4. O., wie es im allgemeinen der Fall ist, und es tritt hier wieder ein Ausnahmefall ein; diese acht Punkte können daher nicht von einander unabhängig sein; wir wollen sie acht associierte Punkte nennen; sie werden bestimmt durch drei Flächen 2. O., die nicht demselben Büschel angehören. Durch die drei Raumkurven $C_{12}^{(4)}$ $C_{13}^{(4)}$, $C_{23}^{(4)}$, welche die acht associierten Punkte gemein haben, lassen sich nun drei Büschel von Flächen 2. O. legen, welche ebenfalls dieselben acht associierten Punkte gemein haben; nehmen wir aus dem einen Büschel, dessen Grundkurve $C_{12}^{(4)}$ ist, eine beliebige von $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ verschiedene Fläche $f_{12}^{(2)}$ und aus dem zweiten Büschel, dessen Grundkurve $C_{13}^{(4)}$ ist, eine beliebige Fläche $f_{13}^{(2)}$, so schneiden sich dieselben in einer neuen Raumkurve 4. O. $c^{(4)}$, welche notwendig durch dieselben acht associierten Punkte gehen mufs, und durch diese Raumkurve $c^{(4)}$ ist wieder ein neues Flächenbüschel bestimmt, welches die acht associierten Punkte gemeinschaftlich hat; ebenso können wir aus dem ersten und dritten oder aus dem zweiten und dritten der drei ursprünglichen Büschel Flächen nehmen, die zu neuen Raumkurven und neuen Flächenbüscheln führen, und mit diesen können wir wieder in gleicher Weise fortfahren; alle dadurch erhaltenen Flächen 2. O. und alle dadurch erhaltenen Raumkurven 4. O. müssen dieselben acht associierten Punkte gemein haben. Wir erhalten dadurch zwei neue Gebilde; das eine wollen wir ein Flächenbündel 2. O. nennen, welches dieselben acht associierten Punkte gemeinschaftlich hat, die wir auch die Grundpunkte des Flächenbündels nennen wollen; das andere wollen wir ein Büschel von Raumkurven 4. O. nennen, welche ebenfalls dieselben acht associierten Punkte gemeinschaftlich haben. Das erstere ist ein Gebilde von doppelt-unendlicher Mächtig-

keit, denn es enthält unendlich-viele Flächenbüschel; es besitzt die charakteristische Eigenschaft:

Ein Flächenbündel 2. O. wird von einer beliebigen Ebene in den Kegelschnitten eines Kegelschnittnetzes geschnitten (Th. d. K. § 63).

Dies geht nämlich unmittelbar aus der Konstruktion des Flächenbündels hervor, welches durch drei willkürliche nicht demselben Büschel angehörige Flächen $F_1^{(2)}$ $F_2^{(2)}$ $F_3^{(2)}$ bestimmt wird; diese drei Flächen schneiden nämlich eine beliebige Ebene in drei Kegelschnitten, die nicht demselben Kegelschnittbüschel angehören, sondern zur Bestimmung eines Kegelschnittnetzes dienen, und die Konstruktion der Kegelschnitte des Netzes aus den zunächst sich darbietenden drei Büscheln, die zu neuen Büscheln führen u. s. f. ist genau dieselbe, wie die Konstruktion der Flächen des Bündels.

Aus den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes folgen diejenigen des Flächenbündels ohne weiteres. Wir wissen: „Durch einen willkürlich in der Ebene eines Kegelschnittnetzes angenommenen Punkt $\mathfrak{p}$ gehen unendlich-viele Kegelschnitte des Netzes und bilden ein Büschel“; daraus folgt:

Durch einen willkürlich angenommenen Punkt $\mathfrak{p}$ des Raumes gehen unendlich-viele Flächen eines Flächenbündels 2. O. und bilden ein Flächenbüschel.

Hieraus ergiebt sich, dafs durch einen willkürlich angenommenen Punkt $\mathfrak{p}$ des Raumes nur eine einzige Raumkurve 4. O. geht, welche einem gegebenen Büschel solcher Raumkurven angehört.

Das Büschel von Raumkurven 4. O. ist daher nur ein Gebilde von einfach-unendlicher Mächtigkeit.

Wir wissen, dafs durch zwei in der Ebene eines Kegelschnittnetzes willkürlich angenommene Punkte nur ein einziger Kegelschnitt des Netzes hindurchgeht; daraus folgt:

Durch zwei willkürlich angenommene Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ des Raumes geht nur eine einzige Fläche eines Flächenbündels 2. O., aufser wenn beide Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ auf einer und derselben Raumkurve 4. O. liegen, welche dem gegebenen Büschel solcher Raumkurven angehört.

Hieraus ergiebt sich, dafs das Flächenbündel ein Gebilde

von doppelt-unendlicher Mächtigkeit ist, weil jedes Element desselben zwei Willkürlichkeiten enthält.

Wir wissen ferner, dafs irgend zwei Büschel in einem Kegelschnittnetze allemal einen Kegelschnitt gemeinschaftlich haben. Hieraus folgt:

Durch irgend zwei Raumkurven eines Büschels von Raumkurven 4. O. geht allemal eine Fläche 2. O.

Wir wissen ferner: Unter den Kegelschnitten eines Netzes giebt es unendlich viele, welche in Linienpaare zerfallen, und die Doppelpunkte dieser Linienpaare liegen auf einer Kurve dritten Grades, der Tripelkurve des Netzes; daraus folgt, da eine Ebene, welche eine Fläche zweiten Grades in einem Linienpaar schneidet, allemal Berührungsebene der Fläche ist:

Unter den Flächen eines Flächenbündels 2. O. giebt es unendlich-viele, welche eine gegebene Ebene berühren; die Berührungspunkte liegen auf einer allgemeinen Kurve dritten Grades; und sodann:

Die sämtlichen in einer Ebene enthaltenen Sehnen für alle Raumkurven 4. O., welche einem und demselben Büschel angehören, umhüllen eine ebene Kurve dritter Klasse.

Gehen wir von den drei nicht demselben Büschel angehörenden Flächen $F_1^{(2)}$ $F_2^{(2)}$ $F_3^{(2)}$, welche das Flächenbündel bestimmen, zu den ihnen gemeinschaftlichen acht associierten Punkten, den Grundpunkten des Bündels, über, so erkennen wir jetzt den Zusammenhang derselben in folgender Weise:

Wir haben gesehen, dafs durch einen willkürlich gewählten Punkt $\mathfrak{p}$ des Raumes eine einzige Raumkurve 4. O. geht, welche dem gegebenen Büschel von Raumkurven mit denselben acht Grundpunkten angehört. Diese Raumkurve ist aber durch den Punkt $\mathfrak{p}$ und irgend sieben von den acht Grundpunkten schon bestimmt; sie mufs aber auch durch den achten Grundpunkt gehen; wir schliefsen hieraus:

Alle Raumkurven 4. O., welche durch dieselben sieben Punkte des Raumes gehen, müssen sich notwendig noch in einem und demselben achten

Punkte treffen, und solche acht Pnnkte bilden die Grundpunkte eines Büschels von Raumkurven 4. O.

Bezeichnen wir durch $C_{13}^{(4)}$ und $C_{23}^{(4)}$ zwei Raumkurven, die durch dieselben sieben, also auch den achten Grundpunkt gehen, aber verschieden von einander sind, so wissen wir, daſs sie auf einer Fläche $F^{(2)}$ liegen müssen; legen wir durch die erste eine andere Fläche $F_1^{(2)}$ und durch die zweite eine andere Fläche $F_2^{(2)}$, so haben wir drei Flächen 2. O., welche nicht demselben Büschel angehören, aber durch dieselben sieben Punkte gehen; sie müssen auch durch den achten Punkt gehen; wir schlieſsen also:

Alle Flächen 2. O., welche durch dieselben sieben Punkte des Raumes gehen, müssen noch durch einen und denselben achten Punkt gehen, und solche acht Punkte bilden die Grundpunkte eines Bündels von Flächen 2. O.*)

Bei einer solchen Gruppe von acht associierten Punkten des Raumes ist einer durch die sieben übrigen bestimmt und kann linear konstruiert werden. Wir können uns zu dieser Konstruktion auch solcher in dem Büschel von Raumkurven 4. O. enthaltenen Raumkurven bedienen, welche zerfallen in eine Raumkurve 3. O. und eine Gerade, die notwendig Sehne der Raumkurve 3. O. sein muſs; dadurch wird die Konstruktion auf eine schon früher (S. 251 und 445) gelöste Aufgabe zurückgeführt und kann folgendermaſsen bewerkstelligt werden:

Sind sieben Punkte im Raume willkürlich gegeben:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7,$$

so lege man durch 1 2 3 4 5 6 die einzige Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$, welche durch diese sechs Punkte bestimmt wird und ziehe durch 7 die einzige Sekante l derselben; man lege zweitens durch 1 2 3 4 5 7 die einzige Raumkurve $C_1^{(3)}$, welche durch diese sechs Punkte bestimmt wird, und ziehe durch 6 die einzige Sekante g_1 derselben; dann treffen

*) Hesse: De curvis et superficiebus secundi ordinis, Crelle's Journal Bd. XX, S. 297.

sich die beiden Geraden l und g_1 in dem gesuchten achten Punkte, so dafs alle Flächen 2. O., welche durch irgend 7 dieser acht Punkte hindurchgehen, auch durch den achten gehen müssen.

Die Aufgabe aber: „durch einen gegebenen Punkt die einzige Sekante einer Raumkurve 3. O. zu ziehen, von welcher sechs Punkte gegeben sind," haben wir früher (S. 234 und 445) auf lineare Weise gelöst.

Die vorige Konstruktion läfst sich auch aussprechen als eine Eigenschaft von acht associierten Punkten im Raume, den Grundpunkten eines Flächenbündels:

Acht associierte Punkte im Raume, die Grundpunkte eines Flächenbündels, besitzen immer die Eigenschaft, dafs, wenn man irgend sechs von ihnen durch eine Raumkurve 3. O. verbindet, die Verbindungslinie der beiden übrigen eine Sekante derselben sein mufs.*)

Nehmen wir daher irgend sechs Punkte des Raumes

1 2 3 4 5 6

und fassen das einfache Sechsflach auf, welches von den sechs Ebenen gebildet wird:

[123] [234] [345] [456] [561] [612],

dann können wir die drei Paare gegenüberliegender Ebenen:

[123] und [456]
[234] und [561]
[345] und [612]

als drei besondere Flächen 2. O. auffassen, welche zur Bestimmung eines Flächenbündels dienen oder sich in acht associierten Punkten, den Grundpunkten des Bündels, treffen; von diesen acht Punkten sind sechs offenbar folgende:

1 2 3 4 5 6

und die beiden übrigen sind die Schnittpunkte:

$\mathfrak{x} = ([123], [345], [561])$
$\mathfrak{y} = ([234], [456], [612]),$

*) Vgl. P. Serret: Géometrie de direction. Paris 1869, p. 311

die Verbindungslinie $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ mufs also nach dem vorigen Satze eine Sekante der Raumkurve $C^{(3)}$ sein, welche durch die sechs Punkte 1 2 3 4 5 6 bestimmt wird. Dies giebt folgenden Satz:

Wenn man sechs beliebige Punkte des Raumes in irgend einer Weise ordnet und durch je drei auf einander folgende eine Ebene legt, so erhält man ein räumliches Sechsflach, bei welchem der Schnittpunkt der drei ungeradstelligen Ebenen mit dem Schnittpunkte der drei geradstelligen Ebenen verbunden allemal eine Sekante der Raumkurve 3. O. liefert, welche durch die sechs gegebenen Punkte bestimmt wird.

Durch Vertauschung der sechs gegebenen Punkte kann man dadurch sechzig Sekanten der Raumkurve 3. O. erhalten, deren weiterer Zusammenhang zu ermitteln wäre.

Acht associierte Punkte im Raume treten allemal auf, wo wir drei Flächen 2. O. haben, die nicht demselben Flächenbüschel angehören; z. B. haben wir auf S. 135 gesehen, dafs sich durch die acht Ecken zweier Polartetraëder eines räumlichen Polarsystems eine Anzahl von einschaligen Hyperboloiden legen lassen, die offenbar nicht alle demselben Büschel angehören. [Denn bezeichnen wir durch $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{d}_1$ die Ecken zweier Polartetraëder eines gegebenen räumlichen Polarsystems, so sind, wie wir gesehen haben, die beiden Ebenenbüschel projektivisch:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|\ [\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1] \barwedge |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|\ [\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1]$$

und erzeugen ein Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$, welches durch die acht Ecken der beiden Polartetraëder hindurchgeht; ebenso liefert die Projektivität:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|\ [\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1] \barwedge |\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1|\ [\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1]$$

ein zweites Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}$ von derselben Eigenschaft und die Projektivität:

$$|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|\ [\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1| \barwedge |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|\ [\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1]$$

ein eben solches drittes Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(2)}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$. Diese drei Hyperboloide gehören aber im allgemeinen nicht demselben Büschel an, denn sonst müfsten sie die Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ in drei Kegelschnitten

schneiden, die einem Büschel angehören, und da diese drei Kegelschnitte in drei Linienpaare zerfallen, von denen je ein Teil die Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ sind, so müssten die drei andern Teile drei Gerade sein, welche sich in einem Punkte träfen, d. h. die drei Schnittlinien der Ebenen $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}]$ $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}]$ $[\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}]$ mit der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ müſsten durch einen Punkt laufen, oder, was dasselbe sagt, die vier Ebenen:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] \quad [\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}] \quad [\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}] \quad [\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}]$$

müſsten sich in einem Punkte treffen. Dies wird aber im allgemeinen nicht der Fall sein, denn die sechs Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1$ reichen noch nicht aus zur Bestimmung eines räumlichen Polarsystems, können vielmehr ganz willkürlich angenommen werden und repräsentieren nur sechs Paare konjugierter Punkte des Polarsystems. Zwischen diesen sechs willkürlich zu wählenden Punkten wird daher keine Bedingung obwalten, und die drei vorigen Hyperboloide werden daher nicht demselben Büschel angehören.] Wir schlieſsen hieraus den Satz:

Die acht Ecken zweier beliebigen Polartetraëder eines räumlichen Polarsystems bilden eine solche Gruppe von acht associierten Punkten des Raumes, daſs jede Fläche 2. O., welche durch sieben derselben hindurchgeht, auch durch den achten Punkt gehen muſs.

Eine andere Gruppe von acht associierten Punkten des Raumes haben wir auf S. 459 kennen gelernt, indem wir drei durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ gehende Strahlen $a\ b\ c$ und drei durch einen Punkt $\mathfrak{O}_1$ gehende Ebenen $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ annehmen; dann schneiden sich die drei Ebenenpaare:

$$[bc] \text{ und } \alpha_1, \quad [ca] \text{ und } \beta_1, \quad [ab] \text{ und } \gamma_1$$

in einer Gruppe von acht associierten Punkten. —

Die Flächen eines Bündels 2. O. mit denselben acht Grundpunkten liefern ähnliche Polaritätsbeziehungen, wie die des Flächenbüschels.

Das Flächenbündel ist bestimmt durch drei nicht demselben Büschel angehörige Flächen $F_1^{(2)}\ F_2^{(2)}\ F_3^{(2)}$. Die beiden Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ bestimmen ein Flächenbüschel mit der

Grundkurve $C_{12}^{(4)}$, die Flächen $F_1^{(2)}$ und $F_3^{(2)}$ ein Flächenbüschel mit der Grundkurve $C_{13}^{(4)}$; die beiden Flächenbüschel haben also die Fläche $F_1^{(2)}$ gemeinschaftlich, welche durch beide Grundkurven $C_{12}^{(4)}$ und $C_{13}^{(4)}$ geht. Die Polarebenen eines willkürlich im Raume gewählten Punktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf alle Flächen des ersten Büschels gehen, wie wir wissen (S. 695), durch eine feste Gerade l_{12}; die Polarebenen von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf sämtliche Flächen des zweiten Büschels gehen ebenfalls durch eine feste Gerade l_{13}, und die beiden Geraden l_{12} l_{13} müssen in einer Ebene liegen, nämlich der Polarebene des Punktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Fläche $F_1^{(2)}$, weil diese sowohl durch l_{12}, als auch durch l_{13} gehen mufs; die beiden Geraden l_{12} und l_{13} begegnen sich daher im allgemeinen in einem Punkte $\mathfrak{q}$ (wofern sie nicht insbesondere ganz zusammenfallen). Irgend eine Fläche aus dem ersten Büschel und irgend eine Fläche aus dem zweiten Büschel bestimmen ein neues Flächenbüschel, und die Polarebenen von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf alle Flächen dieses Büschels laufen ebenfalls durch eine feste Gerade, welche offenbar durch $\mathfrak{q}$ gehen mufs, weil die Polarebenen zweier besonderen Flächen dieses Büschels durch $\mathfrak{q}$ gehen. In gleicher Weise können wir durch $F_2^{(2)}$ und $F_3^{(2)}$ ein Flächenbüschel bestimmen, dessen Grundkurve $C_{23}^{(4)}$ ist, und irgend eine Fläche dieses Büschels mit einer der früheren zur Bildung neuer Flächenbüschel in Verbindung setzen. Die Polarebenen von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf alle diese Flächen der so entstehenden Büschel erfüllen alle dieselbe Bedingung, durch $\mathfrak{q}$ zu gehen; wir sehen also:

Die Polarebenen eines festen Punktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf sämtliche Flächen eines Flächenbündels 2. O. laufen durch einen und denselben festen Punkt $\mathfrak{q}$ und bilden also ein Ebenenbündel.

Dieses Ebenenbündel ist von gleicher Mächtigkeit mit dem Flächenbündel, und beide Gebilde sind durch unsere Konstruktion kollinear (projektivisch) auf einander bezogen, so dafs jeder Fläche des Flächenbündels eine bestimmte Ebene des Ebenenbündels entspricht. Nehmen wir daher von irgend zwei Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ des Raumes die Polarebenen in Bezug

auf sämtliche Flächen eines Bündels, so erhalten wir zwei Ebenenbündel mit den Mittelpunkten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$, die in kollinearer Beziehung stehen, und da die Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier kollinearen Bündel die sämtlichen Sekanten einer Raumkurve $C^{(3)}$ sind (S. 443), so folgt:

Die zu einer festen Geraden $l (\equiv |\mathfrak{p}\mathfrak{p}')$ konjugierten Geraden in Bezug auf sämtliche Flächen eines Bündels mit denselben acht Grundpunkten bilden das System sämtlicher Sekanten einer Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$.

Nennen wir $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei konjugierte Punkte in Bezug auf das Flächenbündel, wenn sie die Eigenschaft besitzen, dafs die Polarebenen von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf alle Flächen des Bündels durch $\mathfrak{q}$, also auch umgekehrt die Polarebenen von $\mathfrak{q}$ in Bezug auf alle Flächen des Bündels durch $\mathfrak{p}$ laufen, dann ist $\mathfrak{q}$ nichts anderes, als der Durchschnittspunkt der drei Polarebenen von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf drei nicht demselben Büschel angehörige Flächen des Bündels; wenn wir daher $\mathfrak{p}$ auf einer beliebigen Geraden l verändern, so wird $\mathfrak{q}$ der Durchschnittspunkt dreier entsprechenden Ebenen von drei projektivischen Ebenenbüscheln sein, deren Axen die drei zu l konjugierten Geraden in Bezug auf die drei angenommenen Flächen des Bündels sind, also ist der Ort von $\mathfrak{q}$ (S. 228) die Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$, deren Sehnen die zu l konjugierten Geraden in Bezug auf die drei angenommenen Flächen des Bündels sind; hiernach erhalten wir den Satz:

Die zu den sämtlichen Punkten $\mathfrak{p}$ einer festen Geraden l konjugierten Punkte $\mathfrak{q}$ in Bezug auf ein Flächenbündel 2. O. liegen auf einer Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$, für welche die sämtlichen konjugierten Geraden von l in Bezug auf die einzelnen Flächen des Bündels Sekanten sind.

Wenn man von drei beliebigen Punkten $\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3$ des Raumes die sämtlichen Polarebenen bestimmt in Bezug auf ein Flächenbündel 2. O., so erhält man drei kollineare Ebenenbündel, deren Mittelpunkte $\mathfrak{q}_1\ \mathfrak{q}_2\ \mathfrak{q}_3$ sind; der Schnittpunkt je dreier entsprechenden Ebenen der drei kollinearen Ebenenbündel, d. h. der drei Polarebenen von $\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3$ in Bezug auf

eine und dieselbe Fläche des Bündels, ist der Pol der Ebene $[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3]$ in Bezug auf diese Fläche. Das Erzeugnis der drei kollinearen Ebenenbündel ist also der Ort der Pole einer festen Ebene $\varepsilon = [\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3]$ in Bezug auf alle Flächen eines Flächenbündels 2. O. Dieses Erzeugnis ist eine allgemeine Fläche 3. O.*), wie a. a. O. nachgewiesen wird; wir erhalten also den Satz:

Der Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf sämtliche Flächen eines Flächenbündels 2. O. ist eine allgemeine Fläche 3. O. $F^{(3)}$, auf welcher gleichzeitig die konjugierten Punkte zu sämtlichen Punkten der festen Ebene in Bezug auf das Flächenbündel liegen.

Das letztere folgt aus der Bemerkung, dafs das Erzeugnis der drei kollinearen Ebenenbündel auch durch die drei Mittelpunkte $\mathfrak{q}_1\ \mathfrak{q}_2\ \mathfrak{q}_3$ der drei Bündel hindurchgeht, d. h. die drei konjugierten Punkte zu $\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3$, also auch die konjugierten Punkte zu allen Punkten der Ebene $\varepsilon = [\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3]$ in Bezug auf das Bündel enthalten mufs. Ferner folgt mit Rücksicht auf den vorhin gefundenen Satz:

Die zu sämtlichen Punkten $\mathfrak{p}$ einer Geraden l konjugierten Punkte $\mathfrak{q}$ in Bezug auf ein Flächenbündel 2. O. liegen auf einer Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$; jeder Geraden l des Raumes wird dadurch eine gewisse Raumkurve $C^{(3)}$ zugeordnet; die den sämtlichen Geraden l einer festen Ebene ε zugeordneten Raumkurven $C^{(3)}$ liegen auf einer und derselben Fläche 3. O. $F^{(3)}$.

Wir wissen endlich (S. 697), dafs die Pole einer festen Ebene ε in Bezug auf sämtliche Flächen eines Büschels auf einer Raumkurve 3. O. $C_1^{(3)}$ liegen; fassen wir daher sämtliche Flächenbüschel auf, die in einem Flächenbündel 2. O. enthalten sind, so erhalten wir folgenden Satz:

---

*) H. Schröter: Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche 3. O., Borchardt's Journal Bd. 62. S. 265. C. F. Geiser: Einige geometrische Beobachtungen, Vierteljahrsschrift der Züricher Naturforscher-Gesellschaft 1865. R. Sturm: Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. O. Leipzig 1867.

Die Pole einer festen Ebene ε in Bezug auf die Flächen eines Flächenbüschels 2. O. liegen auf einer Raumkurve 3. O. $C_1^{(3)}$; für alle Flächenbüschel, welche einem und demselben Flächenbündel 2. O. angehören, erfüllen die zugehörigen Raumkurven $C_1^{(3)}$ eine und dieselbe Fläche 3. O. $F^{(3)}$; wir können also auch sagen: Die Pole einer festen Ebene ε in Bezug auf sämtliche Flächen eines Flächenbündels 2. O. liegen auf einer Fläche 3. O. $F^{(3)}$.

Wenn man von zwei verschiedenen Ebenen ε und ε_1 die Pole in Bezug auf sämtliche Flächen eines Flächenbündels 2. O. aufsucht, so erhält man zwei Flächen 3. O. $F^{(3)}$ und $F_1^{(3)}$, die sich im allgemeinen in einer Raumkurve 9. O. schneiden. Dieselbe zerfällt aber, wie wir leicht sehen, in eine Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$ und eine Raumkurve 6. O. $C^{(6)}$. Denn die Schnittlinie $l = |\varepsilon\varepsilon_1|$ enthält die den beiden Ebenen gemeinschaftlichen Punkte, deren konjugierte Punkte in Bezug auf das Bündel auf einer Raumkurve $C^{(3)}$ liegen; nehmen wir also einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$, welcher den beiden Flächen $F^{(3)}$ und $F_1^{(3)}$ gemeinschaftlich ist, so mufs $\mathfrak{x}$ gleichzeitig der Pol von ε und von ε_1 sein in Bezug auf dieselbe oder in Bezug auf zwei verschiedene dem Bündel angehörige Flächen; ist das letztere der Fall, so ist auch $\mathfrak{x}$ gleichzeitig der Pol von ε und von ε_1 in Bezug auf sämtliche Flächen des Büschels, welches diese beiden Flächen bestimmen; denn in dem Punkte $\mathfrak{x}$ müssen sich die beiden konjugierten Geraden zu $l = |\varepsilon\varepsilon_1|$ in Bezug auf die beiden Flächen 2. O. treffen; da nun die sämtlichen konjugierten Geraden zu l in Bezug auf die Flächen eines Büschels (S. 696) eine Regelschar eines Hyperboloids bilden, so mufs dasselbe, falls zwei Erzeugende der Regelschar sich treffen, in einen Kegel ausarten, durch dessen Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ auch alle übrigen Erzeugenden gehen; die konjugierten Geraden zu l in Bezug auf alle Flächen des Bündels sind aber die sämtlichen Sekanten einer Raumkurve $C^{(3)}$ (S. 709), und da die besonderen Sekanten, auf welche wir gekommen sind, durch denselben Punkt $\mathfrak{x}$ gehen und einen Kegel 2. O. bilden, so ist $\mathfrak{x}$ ein Punkt der Raumkurve $C^{(3)}$, welche den konjugierten Punkt $\mathfrak{q}$ von sämtlichen Punkten $\mathfrak{p}$ der Ge-

raden l in Bezug auf das Flächenbündel enthält. Der gesamte Schnitt der Flächen $F^{(3)}$ und $F_1^{(3)}$ zerfällt also in eine $C^{(3)}$ und die übrig bleibende $C^{(6)}$. Jeder Punkt $\mathfrak{x}$ der Raumkurve $C^{(6)}$ mufs daher die Eigenschaft besitzen, der Pol von ε und ε_1 in Bezug auf eine und dieselbe Fläche des Bündels zu sein. Wenn aber zwei verschiedene Ebenen $\varepsilon\ \varepsilon_1$ in Bezug auf eine Fläche 2. O. denselben Pol $\mathfrak{x}$ haben, so kann diese Fläche nur ein Kegel sein; denn umgekehrt fallen die Pole aller Ebenen des Raumes in Bezug auf einen Kegel 2. O. in einen und denselben Punkt, den Mittelpunkt des Kegels, zusammen (mit Ausnahme solcher Ebenen die durch den Mittelpunkt des Kegels selbst gehen, und für jede solche Ebene giebt es nicht nur einen Pol, sondern unendlich viele Pole, die auf dem Polarstrahl der Ebene liegen (S. 34 und 508)). Wir schliefsen hieraus, dafs der Punkt $\mathfrak{x}$ der Mittelpunkt eines Kegels sein mufs, welcher dem Flächenbündel angehört, also:

Unter den Flächen eines Flächenbündels 2. O. giebt es unendlich-viele, welche in Kegel 2. O. ausarten; die Mittelpunkte aller dieser Kegel liegen auf einer Raumkurve 6. O. $C^{(6)}$.

Da wir wissen (S. 698), dafs in einem Flächenbüschel 2. O. vier Kegel vorkommen, deren Mittelpunkte die Ecken eines Tetraëders bilden, welches ein Polartetraëder ist in Bezug auf sämtliche Flächen des Büschels, so können wir denselben Satz auch so aussprechen:

Irgend zwei Flächen unter sämtlichen Flächen eines Bündels 2. O. haben ein gemeinschaftliches Polartetraëder. Die je vier Ecken aller solcher Polartetraëder liegen auf einer Raumkurve 6. O. $C^{(6)}$. Diese kann daher den Namen „Quadrupelkurve“ führen, entsprechend der „Tripelkurve“ beim Kegelschnittnetz.

Da der Pol einer beliebigen Ebene in Bezug auf einen Kegel allemal der Mittelpunkt dieses Kegels ist, wofern sie nicht selbst durch diesen Mittelpunkt geht, so folgt:

Eine beliebige Ebene $\mathfrak{x}$ des Raumes hat zum Ort der ihren Punkten $\mathfrak{p}$ in Bezug auf das Flächenbündel konjugierten Punkte $\mathfrak{q}$ eine Fläche 3. O. $F^{(3)}$; für alle Ebenen $\mathfrak{x}$ des Raumes laufen die zuge-

hörigen Flächen $F^{(3)}$ durch eine und dieselbe Raumkurve 6. O. $C^{(6)}$, und irgend zwei solcher Flächen $F^{(3)}$ und $F_1^{(3)}$ schneiden sich aufser in $C^{(6)}$ noch in derjenigen Raumkurve 3. O., auf der die konjugierten Punkte $\mathfrak{q}$ zu den Punkten $\mathfrak{p}$ der Schnittlinie $|\xi\xi_1|$ liegen.

Betrachten wir irgend einen Punkt $\mathfrak{q}$ der Raumkurve $C^{(6)}$, so mufs sein konjugierter Punkt in Bezug auf das Flächenbündel sowohl in der Ebene ε, als auch in der Ebene ε_1 liegen; er kann aber nicht in der Schnittlinie beider Ebenen liegen $|\varepsilon\varepsilon_1|$, weil den Punkten $\mathfrak{p}$ derselben die Punkte der Raumkurve $C^{(3)}$ konjugiert sind; folglich mufs der Punkt $\mathfrak{q}$ zwei verschiedene konjugierte Punkte, einen in der Ebene ε und einen in der Ebene ε_1 haben, d. h. die Polarebenen von $\mathfrak{q}$ in Bezug auf sämtliche Flächen des Bündels müssen sowohl durch den einen, wie durch den andern Punkt gehen, also die Verbindungslinie beider Punkte gemein haben; wir schliefsen hieraus:

Es giebt einfach-unendlich-viele Punkte im Raume, deren Polarebenen in Bezug auf die Flächen eines Bündels durch eine und dieselbe Gerade gehen; alle solche Punkte liegen auf der Raumkurve $C^{(6)}$, welche die Mittelpunkte aller Kegel enthält, die in dem Bündel vorkommen.

In diesem Falle erweitert sich der zu einem Punkte $\mathfrak{q}$ in Bezug auf das Flächenbündel konjugierte Punkt $\mathfrak{p}$ zu einer Geraden l. Betrachten wir daher eine beliebige Ebene ε und deren Punkte $\mathfrak{p}$, so wissen wir, dafs der gesamte Ort der zu $\mathfrak{p}$ konjugierten Punkte $\mathfrak{q}$ in Bezug auf das Flächenbündel auf einer Fläche $F^{(3)}$ liegt. Die Raumkurve $C^{(6)}$ schneidet im allgemeinen die Ebene ε in sechs besonderen Punkten, deren konjugierte Punkte in Bezug auf das Flächenbündel sich zu sechs Geraden erweitern, welche ganz der Fläche $F^{(3)}$ angehören müssen. Diese Fläche 3. O. $F^{(3)}$ enthält daher sechs gerade Linien:

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6.$$

Andererseits wissen wir, dafs die Pole der Ebene ε in Bezug auf sämtliche Flächen eines Flächenbündels 2. O. auf der

Fläche $F^{(3)}$ liegen; fassen wir daher die sechs Kegel auf, deren Mittelpunkte in der Ebene ε liegen, so wird der Pol einer durch den Mittelpunkt eines Kegels gehenden Ebene in Bezug auf diesen Kegel nicht mehr ein einzelner Punkt sein, sondern sich zu einer Geraden erweitern, dem Polarstrahl des Polarbündels, dessen Kernfläche der Kegel ist. Diese sechs Polarstrahlen der Ebene ε in Bezug auf die sechs Kegel, deren Mittelpunkte die Durchschnittspunkte der Raumkurve $C^{(6)}$ mit der Ebene ε sind, werden daher sechs neue Gerade:

$$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6$$

sein, welche ganz der Fläche $F^{(3)}$ angehören.

Endlich wissen wir, daſs die zu sämtlichen Punkten $\mathfrak{p}$ einer Geraden l konjugierten Punkte $\mathfrak{q}$ in Bezug auf ein Flächenbündel 2. O. auf einer Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$ liegen müssen; sind nun $\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3\ \mathfrak{p}_4\ \mathfrak{p}_5\ \mathfrak{p}_6$ die sechs Kegelmittelpunkte in der Ebene ε, und wählen wir für l eine der 15 Verbindungslinien zweier solchen Punkte $\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_k$, so wird die zugehörige Raumkurve 3. O. $C^{(3)}$ zerfallen; denn zu $\mathfrak{p}_i$ giebt es nicht nur einen konjugierten Punkt $\mathfrak{q}_i$, sondern unendlich-viele, die auf der Geraden a_i liegen, und ebenso zu $\mathfrak{p}_k$ unendlich-viele konjugierte Punkte, die auf der Geraden a_k liegen; die Geraden $a_i\,a_k$ sind also Teile der Raumkurve $C^{(3)}$, und der übrig bleibende dritte Teil kann nur noch eine Gerade c_{ik} sein, die den beiden Geraden $a_i\,a_k$ begegnen muſs, falls diese selbst sich nicht treffen. [Letzteres wird aber im allgemeinen nicht der Fall sein, denn träfen sich a_i und a_k in irgend einem Punkte $\mathfrak{q}_{ik}$, so müſsten nicht bloſs $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_{ik}$, sondern auch $\mathfrak{p}_k$ und $\mathfrak{q}_{ik}$ konjugierte Punkte in Bezug auf das Bündel sein, d. h. die Polarebenen von $\mathfrak{q}_{ik}$ in Bezug auf alle Flächen des Bündels müſsten sowohl durch $\mathfrak{p}_i$, als auch durch $\mathfrak{p}_k$ gehen, also sich in der Geraden $|\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_k|$ schneiden; die Gerade $|\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_k$ müſste also auf der Fläche $F^{(3)}$ liegen, woraus folgen würde, daſs die Tripelkurve des Kegelschnittnetzes, welches die Ebene ε aus dem gegebenen Flächenbündel ausschneidet, zerfallen müſste in eine Gerade und einén Kegelschnittt; dies wird aber bei einem gegebenen Flächenbündel und einer beliebig angenommenen Ebene ε im allgemeinen nicht der Fall sein, also begegnen sich die Geraden a_i und a_k nicht.]

Demnach haben wir funfzehn neue Gerade c_{ik} auf der Fläche $F^{(3)}$ gefunden. Die Gerade c_{ik} trifft nicht nur die beiden Geraden a_i und a_k, sondern auch die beiden Geraden b_i und b_k und läſst sich noch näher bestimmen. Da nämlich zu allen Punkten der Verbindungslinie $|\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_k| = l$ die konjugierten Punkte in Bezug auf das Flächenbündel auf der in die drei Geraden $a_i a_k c_{ik}$ zerfallenden Raumkurve $C^{(3)}$ liegen, und die konjugierten Punkte zu den Punkten von a_i alle in dem einzigen Punkte $\mathfrak{p}_i$ sich vereinigen, sowie die konjugierten Punkte zu den Punkten von a_k sich alle in dem Punkte $\mathfrak{p}_k$ vereinigen, so müssen die zu den Punkten von c_{ik} konjugierten Punkte die übrigen Punkte der Geraden $l = |\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_k|$ sein, d. h. wenn wir zu irgend einem Punkte $\mathfrak{p}_x$ der Geraden l den konjugierten Punkt in Bezug auf das Flächenbündel bestimmen, so muſs derselbe auf c_{ik} liegen. Wir haben nun in dem Flächenbündel zwei besondere Flächen, nämlich die beiden Kegel $\mathfrak{p}_i^{(2)}$ und $\mathfrak{p}_k^{(2)}$, deren Mittelpunkte $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_k$ sind. Die Polarebene von einem beliebigen andern Punkte $\mathfrak{p}_x$ der Geraden l in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{p}_i^{(2)}$ muſs daher durch den konjugierten Punkt $\mathfrak{q}_x$ auf der Geraden c_{ik} gehen, und ebenso muſs die Polarebene eines zweiten Punktes $\mathfrak{p}_y$ der Geraden l in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{p}_i^{(2)}$ durch den konjugierten Punkt $\mathfrak{q}_y$ auf der Geraden c_{ik} gehen. Die beiden Punkte $\mathfrak{p}_x$ und $\mathfrak{p}_y$ haben aber dieselbe Polarebene in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{p}_i^{(2)}$, weil $\mathfrak{p}_x$ und $\mathfrak{p}_y$ auf demselben durch den Mittelpunkt $\mathfrak{p}_i$ des Kegels $\mathfrak{p}_i^{(2)}$ gehenden Strahle l liegen; folglich liegen $\mathfrak{q}_x$ und $\mathfrak{q}_y$, also die ganze Gerade c_{ik} in der Polarebene des Strahles $l = |\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_k|$ in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{p}_i^{(2)}$, und in gleicher Weise liegt c_{ik} in der Polarebene des Strahles l in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{p}_k^{(2)}$; c_{ik} ist daher die Schnittlinie der beiden Polarebenen des Strahles $|\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_k|$ in Bezug auf die beiden Kegel $\mathfrak{p}_i^{(2)}$ und $\mathfrak{p}_k^{(2)}$, und da in diesen beiden Polarebenen bez. die beiden Geraden b_i und b_k liegen, so begegnet c_{ik} auch denselben. Andererseits wissen wir aber auch, daſs die Pole einer Ebene ε in Bezug auf alle Flächen eines Büschels auf einer Raumkurve $C_1^{(3)}$ liegen, welche die Fläche $F^{(3)}$ erfüllt, wenn wir alle Büschel nehmen, die in einem Flächenbündel enthalten sind. Nehmen wir nun die beiden Kegel, deren Mittelpunkte $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_k$ sind,

aus dem Bündel, so dienen sie zur Konstituierung eines besonderen Flächenbüschels, welches in dem Bündel enthalten ist; die Pole von ε in Bezug auf dieses besondere Flächenbüschel liegen nun auf einer Raumkurve $C_1^{(3)}$, welche zerfallen wird; denn der Pol von ε in Bezug auf den Kegel, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{p}_i$ ist, erweitert sich zu der Geraden b_i, und der Pol von ε in Bezug auf den Kegel, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{p}_k$ ist, erweitert sich zu der Geraden b_k; b_i und b_k sind Teile der Raumkurve $C_1^{(3)}$ und der übrigbleibende dritte Teil kann nur eine Gerade d_{ik} sein, die den beiden Geraden b_i und b_k begegnen mufs, falls diese selbst sich nicht treffen; dies ist nicht der Fall, wie wir sogleich sehen werden: denn da das Flächenbüschel, welches durch die beiden Kegel $\mathfrak{p}_i^{(2)}$ und $\mathfrak{p}_k^{(2)}$, deren Mittelpunkte $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_k$ sind, bestimmt wird und dem gegebenen Flächenbündel angehört, ein gemeinschaftliches Polartetraëder hat, von dem $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_k$ zwei Ecken, also $|\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_k| = l$ eine Kante ist, so wird die Gegenkante des Polartetraëders zugleich der konjugierte Strahl sein in Bezug auf sämtliche Flächen dieses Büschels, d. h. auf ihm müssen die Pole der Ebene ε in Bezug auf alle Flächen dieses Büschels liegen. Diese Pole von ε in Bezug auf alle Flächen dieses Büschels liegen aber, wie wir wissen, auf der in die drei Geraden $b_i\, b_k\, d_{ik}$ zerfallenden Raumkurve $C_1^{(3)}$, und nur in Bezug auf die beiden Kegel $\mathfrak{p}_i^{(2)}$ und $\mathfrak{p}_k^{(2)}$ erweitern sie sich zu den Geraden b_i und b_k; die Pole von ε in Bezug auf alle übrigen Flächen dieses Büschels erfüllen also die Gerade d_{ik}; die Gerade d_{ik} ist mithin die konjugierte Gerade zu der Geraden $l = |\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_k|$ in Bezug auf alle Flächen des Büschels, welches durch die beiden Kegel $\mathfrak{p}_i^{(2)}$ und $\mathfrak{p}_k^{(2)}$ bestimmt wird, und hieraus folgt, dafs d_{ik} die Schnittlinie der beiden Polarebenen des Strahles $l = |\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_k|$ in Bezug auf die beiden Kegel $\mathfrak{p}_i^{(2)}\mathfrak{p}_k^{(2)}$, also identisch ist mit c_{ik}. Da aber die drei Geraden $b_i\, b_k$ und c_{ik} eine zerfallende Raumkurve $C_1^{(3)}$ bilden, und c_{ik}, wie wir gesehen, die beiden Geraden b_i und b_k trifft, so können b_i und b_k im allgemeinen sich nicht treffen.

Die Ebene, welche $\mathfrak{p}_k$ mit der Geraden c_{ik} verbindet, ist die Polarebene des Punktes $\mathfrak{p}_i$ in Bezug auf alle Flächen des Büschels $[\mathfrak{p}_i^{(2)}\,\mathfrak{p}_k^{(2)}]$, welche das gemeinsame Polartetraëder haben, von dem $\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_k$ zwei Ecken sind und c_{ik} die Gegenkante ist; die Polarebene von $\mathfrak{p}_i$ in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{p}_k^{(2)}$ ist daher die Ebene $[\mathfrak{p}_k c_{ik}]$; da aber die Ebene ε durch $\mathfrak{p}_i$ geht, so mufs auch ihr Pol in dieser Ebene $[\mathfrak{p}_k c_{ik}]$ liegen; der Pol der Ebene ε in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{p}_k^{(2)}$ erweitert sich, wie wir wissen, zu der Geraden b_k, also enthält die Ebene $[\mathfrak{p}_k c_{ik}]$ die Gerade b_k; andererseits wissen wir, dafs der zu $\mathfrak{p}_i$ in Bezug auf das Bündel konjugierte Punkt sich zu der Geraden a_i erweitert, oder, was dasselbe sagt, die Polarebenen von $\mathfrak{p}_i$ in Bezug auf alle Flächen des Bündels durch die Gerade a_i laufen; folglich mufs auch die Polarebene von $\mathfrak{p}_i$ in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{p}_k^{(2)}$ durch a_i laufen; es liegt daher c_{ik} mit den beiden Geraden a_i und b_k in derselben Ebene und in gleicher Weise auch mit den beiden Geraden b_i und a_k, wie aus gleichen Gründen folgt, d. h. es ist die Gerade:

$$c_{ik} = |[a_i b_k],\ [a_k b_i]|.$$

Wir erkennen hieraus, dafs je zwei Gerade a_i und b_k mit verschiedenen Indices sich treffen müssen, während keine zwei a und auch keine zwei b sich treffen können, ebensowenig wie a_i und b_i mit gleichem Index sich treffen. Die 15 Geraden c_{ik} begegnen sich auch in gewisser Weise, denn nehmen wir zwei Ebenen:

$$[a_i b_k] \quad \text{und} \quad [a_{i'} b_{k'}],$$

wo i, k von i', k' verschieden angenommen werden, so schneiden sich beide Ebenen in einer Geraden, welche der Fläche $F^{(3)}$ im allgemeinen in drei Punkten begegnen mufs; von diesen drei Punkten ist einer der Schnittpunkt $(a_i b_{k'})$, der andere $(a_{i'} b_k)$, der dritte Schnittpunkt mufs also sowohl auf der Geraden c_{ik}, welche die dritte in der Ebene $[a_i b_k]$ enthaltene Gerade auf der Fläche $F^{(3)}$ ist, als auch in der Geraden $c_{i'k'}$ liegen; die beiden Geraden c_{ik} und $c_{i'k'}$ müssen sich also begegnen, so oft i, k von i', k' verschieden sind; hieraus ergiebt sich, dafs die Geraden c_{ik} nur auf 15 verschiedene Arten zu je dreien in einer Ebene liegen, da i, k nur die

Zahlen 1 2 3 4 5 6 annehmen können; zählen wir hierzu die 30 Ebenen, welche wir durch Verbindung der a_i und b_k erhalten, so haben wir im ganzen 45 Ebenen, welche die Fläche $F^{(3)}$ in je drei Geraden schneiden, und auf welchen sich die 27 Geraden der Fläche verteilen. Wir können also das Resultat aussprechen:

Die Fläche 3. O. $F^{(3)}$ enthält 27 gerade Linien, welche sich zu je dreien auf 45 Ebenen verteilen.

Ein weiteres Eingehen auf diese Betrachtungen würde zu einer Theorie der Flächen 3. O. führen, welche jenseits der Grenzen liegt, die diesem Buche gesteckt sind; die reichhaltige Literatur, welche sich auf diesen Gegenstand bezieht, ist in G. Salmon-Fiedler's analytischer Geometrie des Raumes (Leipzig 1874) zusammengestellt.

Berichtigungen.

Seite 15 Zeile 1 v. o. statt „Hauptebenen“ lies „Asymptotenebenen“
„ 53 „ 17 v. u. statt „e“ lies „ε“.
„ 54 „ 16 v. o. statt „$|\xi'\xi|$“ lies „$|\xi'\varepsilon|$“.
„ 57 „ 9 v. u. statt „sind“ lies „liefern“.
„ 64 „ 5 v. u. das Wort „nicht“ ist auszustreichen.
„ 67 „ 19 v. u. die Buchstaben τ und ξ sind zu vertauschen.
„ 72 „ 9 v. o. statt $\varphi > 90'$ lies $2\varphi > 90^\circ$.
„ 81 „ 7 v. u. statt $[ab]$ lies $[a_1 b_1]$.
„ 140 „ 5 v. o. hinter „und“ ergänze „s_1 muſs“.
„ 183 „ 7 v. o. statt „p_1^∞“ lies „d_1^∞“.
„ 205 „ 3 v. u. statt „6“ lies „8“.
„ 207 „ 18 v. o. statt „mit $\mathfrak{A}$ durch eine Ebene verbindet“ lies „verbindet und durch $\mathfrak{A}$ eine Normalebene zu $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ legt“.
„ 208 „ 2 v. o. statt „die“ lies „von der“.
„ 224 „ 19 v. u. statt „$g_x\, g_y\, l_x\, l_y$“ lies „$g_{\mathfrak{x}}\, g_{\mathfrak{y}}\, l_{\mathfrak{x}}\, l_{\mathfrak{y}}$“.
„ 232 „ 15 v. o. statt „$l_3[\xi_2]$“ lies „$l_3[\xi_3]$“.
„ 247 „ 7 v. o. statt „$|12|, |34|; |23|, |45|; |34|, |56|$“ lies „$|12|, |45|; |23|, |56|; |34|, |61|$“.
„ 266 „ 5 v. u. hinter „im Punkte“ ergänze „$\mathfrak{a}$“.
„ 298 „ 5 v. o. statt „a“ lies „$\mathfrak{a}$“.
„ 314 „ 12 v. u. statt „$\mathfrak{a}_1$“ lies „$\mathfrak{a}$“.
„ 315 „ 17 v. u. statt „t_α“ lies „$t_{\mathfrak{a}}$“.
„ 331 „ 17 v. o. statt „t_∞“ lies „$t_{\mathfrak{a}}$“.
„ 366 „ 9 v. u. statt „α“ lies „2α“.
„ 383 „ 1 v. u. statt „(r, s)“ lies „(r, x)“.
„ 387 „ 10 v. o. statt „$|r_1\xi|$ und $|r_1\xi_1|$“ lies „$|\varrho\xi|$ und $|\varrho_1\xi_1|$“.
„ 388 „ 9 v. u. in der letzten Kolonne statt „$k_2 > 1$“ lies „$k_2 < 1$“.
„ 410 „ 10 v. o. statt „$\mathfrak{r}\mathfrak{q}$“ lies „$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$“.
„ 466 „ 3 v. u. statt „prospektivisch“ lies „perspektivisch“.
„ 478 „ 14 v. u. statt „g_x“ lies „g_0“.
„ 484 (statt 284 lies 484) Zeile 18 v. o. statt „e_1“ lies „ε_1“.

Seite 486 Zeile 12 v. o. statt „$|\mathfrak{D}_1 \mathfrak{x}|$" lies „$|\mathfrak{D}_1 \mathfrak{x}_1|$".

„ 496 „ 9 v. u. statt „y" lies „y_1".

„ 499 „ 19 v. o. statt „welcher" lies „dessen anderer Regelschar".

„ 531 „ 17 v. u. statt „so liegen $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'$ in der Ebene δ" lies „so liegen $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'$ in einer zu δ parallelen Ebene".

„ 536 „ 17 v. o. statt „$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}'}{\mathfrak{m}\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}\mathfrak{m}}$" lies „$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{B}'}{\mathfrak{m}\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}\mathfrak{m}}$".

„ 546 „ 9 v. u. statt „$(\mathfrak{m}\mathfrak{D})^2 \cdot \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}} + (\mathfrak{M}_1\mathfrak{D})^2 \cdot \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}$ u. s. w."

lies „$(\mathfrak{m}\mathfrak{D})^2 \cdot \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}} + (\mathfrak{m}_1\mathfrak{D})^2 \cdot \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1}$ u. s. w."

„ 615 „ 17 v. u. statt „$\cos^2\psi = \frac{P_c(P_a - P_b)}{P_c(P_c - P_b)}$"

lies „$\cos^2\psi = \frac{P_c(P_a - P_b)}{P_a(P_c - P_b)}$".

„ 617 „ 2 v. o. statt „zu der ihr konjugierten Hauptebene" lies „zu den durch sie gehenden Hauptebenen".

„ 684 „ 1 v. o. und in den ff. Zeilen statt „$\cos(\mathfrak{r}_1, a)$" lies „$\sin(\mathfrak{r}_1, a)$".

